УДК 517. 521

*Е. В. РАБЕЦ*

# НЕКОТОРЫЕ СТРУКТУРНЫЕ ВОПРОСЫ ПОЛЕЙ СХОДИМОСТИ $R_a^d$-РЕГУЛЯРНЫХ МАТРИЧНЫХ МЕТОДОВ СУММИРОВАНИЯ ДВОЙНЫХ ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНОСТЕЙ

Структурные вопросы полей сходимости занимают значительное место в исследованиях по теории суммирования простых последовательностей регулярными матричными методами. Изучению этих вопросов посвящены статьи Мазура—Орлича, Брудно, Огиевецкого, Питерсена, Даревского и ряда других авторов. Так, Мазуром и Орличем [1] было установлено, что не существует нетривиальной регулярной матрицы, поле сходимости которой содержало бы только ограниченные последовательности. Обобщая результаты Брудно [2], Огиевецкий И. И. [3] доказал, что каждая регулярная матрица, суммирующая одну ограниченную расходящуюся последовательность, суммирует несчетное множество ограниченных последовательностей, расходящихся одновременно с любой их линейной комбинацией. Методы доказательства этих теорем, как Брудно, так и Огиевецким являются довольно сложными и громоздкими. Позднее Мельником В. И. в работе [4] было дано короткое доказательство этого факта, в основу которого положен принцип «подражающих последовательностей» Питерсена [6]. Эти же идеи позволили Мельнику В. И. [4] доказать не менее интересную теорему, относящуюся к построению $T$-матриц, являющихся «промежуточными» по отношению к двум данным $T$-матрицам. Аналогичные результаты впервые также были установлены Брудно [2] и Огиевецким [3] неэффективными методами.

Рассмотрению аналогичных вопросов для $R_a^d$-регулярных матричных преобразований двойных последовательностей посвящена настоящая статья.

Определения и теоремы, приведенные нами для одномерного случая, можно найти в книге [1], необходимые понятия и факты из теории суммирования двойных последовательностей изложены в работе [5].

Все приведенные в статье теоремы доказаны методом, в основу которого положен принцип «подражающих последовательностей» (теорема 1). При ее доказательстве существенную роль играет

***Лемма 1.*** *Пусть* $A = (a_{ikmn})$ — $R_a^d$*-регулярная матрица. Тогда существует последовательность* $\{\mu_{mn}\}$, $\mu_{mn} \uparrow \infty$, *и* $(d)$*-усеченная матрица* $A^* = (\overset{*}{a}_{ikmn})$ *такая, что для всякой последовательности* $\{s_{mn}\}$, $s_{mn} = O(\mu_{mn})$,

$$\lim_{(d)} \Big( \sum_{m,n=1}^{\infty} a_{ikmn} s_{mn} - \sum_{m,n=1}^{\infty} \overset{*}{a}_{ikmn} s_{mn} \Big) = 0. \tag{1}$$

Построим индуктивно последовательность $\{\rho(j)\}$ следующим образом:

$$\sum_{m,n:\bar{p} \geqslant \rho(1)} 2\,|a_{ikmn}| < 1 \text{ для } \bar{q} = 1;\ \rho(1) > 1;$$

. . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . .

$$\sum_{m,n:\bar{p} \geqslant \rho(j)} (j+1)\,|a_{ikmn}| < \frac{1}{2^{j-1}} \text{ для } \bar{q} = j;\ \rho(j) > \rho(j-1);$$

. . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . .

Тогда, если $\mu_{mn} = 1\,(p < \rho(1))$; $\mu_{mn} = j + 1\,(\rho(j) \leqslant p < \rho(j+1))$; $j = 1, 2, \ldots$, то $\sum\limits_{m,n:\bar{p} \geqslant \rho(\bar{q})} \mu_{mn}\,|a_{ikmn}| = \sum\limits_{j=\bar{q}}^{\infty} \Big( \sum\limits_{m,n:\bar{p}=\rho(j)}^{\rho(j+1)-1} \mu_{mn}\,|a_{ikmn}| \Big) <$

$< \sum\limits_{j=\bar{q}}^{\infty} \frac{1}{2^{j-1}} = \frac{1}{2^{\bar{q}-2}}$ и ряд $\sum\limits_{m,n} \mu_{mn}\,|a_{ikmn}|$ сходится для всех $i$ и $k$.

Здесь и в дальнейшем $p = \min(m, n)$; $\bar{p} = \max(m, n)$; $q = \min(i, k)$; $\bar{q} = \max(i, k)$; $\nu(i, k)$ и $\rho(i, k)$ — грани усечения матриц.

Для $R_a^d$-регулярных матриц $\lim\limits_{(d)} \sum\limits_m |a_{ikmn}| = 0$ при любом фиксированном $n$ и $\lim\limits_{(d)} \sum\limits_n |a_{ikmn}| = 0$ при любом фиксированном $m$, следовательно, $\sum\limits_{n=1}^{r} \sum\limits_{m=1}^{\infty} \mu_{mn}\,|a_{ikmn}| \leqslant \frac{1}{r}$ и $\sum\limits_{m=1}^{r} \sum\limits_{n=1}^{\infty} \mu_{mn}\,|a_{ikmn}| \leqslant \frac{1}{r}$ для $q \geqslant q_r$ $(r = 1, 2, \ldots)$, $((i, k) \in G_\lambda)$. В дальнейшем можем считать $q_r > q_{r-1}$. Последовательность $\{\nu(q)\}$ выберем так, чтобы $\nu(q) = 1\,(q < q_1)$; $\nu(q) = r\,(q_r \leqslant q < q_{r+1})\,(r = 1, 2, \ldots)$. Таким образом, каждой паре $(i, k) \in G_\lambda$ можно поставить в соответствие функции $\nu(i, k) = \nu(q)$ и $\rho(i, k) = \rho(\bar{q})$, $(\nu(i, k) \uparrow \infty,\ \rho(i, k) \uparrow \infty)$.

Матрицу $A^* = (\overset{*}{a}_{ikmn})$ зададим следующим образом:

$$\overset{*}{a}_{ikmn} = \begin{cases} a_{ikmn}, & p \geqslant \nu(q) \wedge \bar{p}) \leqslant \rho(\bar{q}),\ (i, k) \in G_\lambda; \\ 0, & \text{в остальных случаях.} \end{cases}$$

Для построенной матрицы $A^*$ и всякой последовательности $\{s_{mn}\}$, $|s_{mn}| \leqslant H\mu_{mn}$, справедливо утверждение (1).

Следует отметить, что при рассмотрении ($d$)-сходимости, как было установлено в [5], построенные функции $\nu(\boldsymbol{q})$ и $\rho(\overline{q})$ можно считать функциями одной и той же переменной, например $\boldsymbol{q}$.

Доказанная лемма позволяет сформулировать принцип «подражающих последовательностей» в следующей форме:

**Теорема 1**. *Пусть $A = (a_{ikmn})$ — $R_a^d$-матрица. Тогда существует последовательность $\{\mu'_{mn}\}$, $\mu'_{mn} \uparrow \infty$, натуральная возрастающая последовательность $\{\nu(\boldsymbol{q}_j)\}$ и положительная последовательность $\{x_j\}$, $x_j \downarrow 0$, $\sum_{j=1}^{\infty} x_j = \infty$ такие, что $\{s_{mn}\}$, $s_{mn} = 0 \cdot (\mu'_{mn})$, ($d$)-суммируется к 0 матрицей $A$ тогда и только тогда, когда каждая последовательность вида $\{\xi_{mn} s_{mn}\}$ ($d$)-суммируется матрицей $A$, где $\xi_{mn} = \xi_j$ для $\nu(\boldsymbol{q}_j) \leqslant \boldsymbol{p} < \nu(\boldsymbol{q}_{j+1})$, а $\{\xi_j\}$ — ограничена и $|\xi_{j+1} - \xi_j| = 0(x_j)$.*

Использование этого принципа в значительной степени упрощает доказательства многих теорем теории суммирования. Так, установленная нами в [5]

**Теорема 2**. *Если $A$ и $B$ — $R_a^d$-матрицы и $A$ ограниченно сильнее $B$, то $A$* и *$B$ ограниченно совместны* — является его непосредственным следствием. Действительно, допустим противное. Тогда существует последовательность $\{s_{mn}\}$ такая что $A\text{-}\lim\limits_{(d)} s_{mn} = 1$, $B\text{-}\lim\limits_{(d)} s_{mn} = 0$. По теореме 1 существует ограниченная последовательность вида $\{\xi_{mn} s_{mn}\}$, которая ($d$)-суммируема $B$, но не является ($d$)-суммируемой матрицей $A$. Это противоречие и доказывает теорему.

Пусть $A$ и $B$ — регулярные матрицы, $\{\mu_{mn}\}$ — некоторая фиксированная последовательность, $\mu_{mn} \uparrow \infty$.

Если матрица $A$ суммирует каждую $B$-суммируемую последовательность, удовлетворяющую условию $s_{mn} = 0(\mu_{mn})$, то говорят, что $A$ $\mu_{mn}$ сильнее $B$.

Если каждая последовательность $\{s_{mn}\}$, $s_{mn} = O(\mu_{mn})$ суммируется матрицами $A$ и $B$ к одному и тому же значению, то говорят, что $A$ и $B$ $\mu_{mn}$-совместны.

Используя эти определения и противоречие, аналогичное рассматриваемому в теореме 2, из принципа «подражающих последовательностей» легко получается следующее ее обобщение:

**Теорема 3**. *Если $A$ и $B$ — $R_a^d$-матрицы и $A$ $\mu_{mn}$ сильнее $B$, то $A$ и $B$ $p_{mn}$совместны для некоторой последовательности $\{p_{mn}\}$, $p_{mn} \uparrow \infty$, $p_{mn} \leqslant \mu_{mn}$.*

Последовательности $x^{(1)} = \{x_{mn}^{(1)}\}, \ldots, x^{(r)} = \{x_{mn}^{(r)}\}$ будем называть линейно независимыми относительно регулярной матрицы $A$, если линейная комбинация этих последовательностей $\lambda_1 x^{(1)} +$

$+\lambda_2 x^{(2)}+\cdots+\lambda_r x^{(r)}$ не суммируется этой матрицей при любых значениях $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_r$, не равных одновременно нулю. Будем говорить, что элементы множества ограниченных последовательностей линейно независимы относительно матрицы $A$, если произвольное количество последовательностей этого множества линейно независимо относительно матрицы $A$.

**Теорема 4.** *Пусть $A=(a_{ikmn})$ и $B=(b_{ikmn})$ — $R_a^d$-регулярные матрицы, причем $B$ ограниченно сильнее $A$. Существует континуальное множество ограниченных последовательностей, $(d)$-суммируемых матрицей $B$ и линейно независимых относительно матрицы $A$.*

На основании леммы 1 матрицы $A$ и $B$ можно считать усеченными. Из построения граней усечения матриц $A$ и $B$ — $\nu(\boldsymbol{q})$ и $\rho(\boldsymbol{q})$, проведенного при доказательстве леммы, следует, что $\nu(\boldsymbol{q}+1)-\nu(\boldsymbol{q})\leqslant 1$. Значит, существует последовательность $\{\boldsymbol{q}_j\}$ такая, что $\nu(\boldsymbol{q}_j)=\rho(\boldsymbol{q}_{j-1})$. При этом отрезки $[\boldsymbol{q}_{j-1}, \boldsymbol{q}_j]$ могут быть сколь угодно большими.

Для доказательства теоремы используем построение Питерсена [4] и [6]. Пусть $\{u_j\}$ — произвольная ограниченная последовательность, не стремящаяся к 0, для которой $u_{j+1}-u_j\to 0\ (j\to\infty)$. Образуем последовательность

$$s'_{mn}=\begin{cases} s_{mn} & \text{для } \boldsymbol{p}<\nu(\boldsymbol{q}_1);\\ u_j s_{mn} & \text{для } \nu(\boldsymbol{q}_j)\leqslant \boldsymbol{p}<\nu(\boldsymbol{q}_{j+1}),\ j=1,2,\ldots,\end{cases}$$

и обозначим через $\tau_{ik}$ и $\tau'_{ik}$ преобразования последовательностей $s_{mn}$ и $s'_{mn}$ при помощи матрицы $A$, т. е. $\tau_{ik}=\sum\limits_{m,n=1}^{\infty} a_{ikmn}s_{mn}$; $\tau'_{ik}=\sum\limits_{m,n=1}^{\infty} a_{ikmn}s'_{mn}$. Аналогично $\sigma_{ik}$ и $\sigma'_{ik}$ — преобразования последовательностей $s_{mn}$ и $s_{mn}$ при помощи матрицы $B=(b_{ikmn})$.

Пусть $i, k$ — произвольные натуральные числа, принадлежащие $G_\lambda$ при некотором $\lambda$, $\boldsymbol{q}_j\leqslant \boldsymbol{q}<\boldsymbol{q}_{j+1}$. Тогда имеем $\tau'_{ik}=\sum\limits_{m,n=\nu(q)}^{\rho(q)} a_{ikmn}s'_{mn}=\sum\limits_{m,n\leqslant\rho(q);}\ \sum\limits_{p=\nu(q)}^{\nu(qj+1)-1} a_{ikmn}s'_{mn}+\sum\limits_{m,n=\nu(qj+1)}^{\rho(q)} a_{ikmn}s'_{mn}=u_j\sum\limits_{m,n\leqslant\rho(q);}\ \sum\limits_{p=\nu(q)}^{\nu(qj+1)-r} a_{ikmn}s_{mn}+u_{j+1}\sum\limits_{m,n=\nu(qj+1)}^{\rho(q)} a_{ikmn}s_{mn}=u_j\tau_{ik}+(u_{j+1}-u_j)\sum\limits_{m,n=\nu(qj+1)}^{\rho(q)} a_{ikmn}s_{mn}$. В силу ограниченности последовательности $\{s_{mn}\}$ и регулярности матрицы $A=(a_{ikmn})$ второе слагаемое по модулю не превышает величины $|u_{j+1}-u_j|MH$, где $\sum\limits_{m,n}|a_{ikmn}|\leqslant M$, $|s_{mn}|\leqslant H$ и стремится к 0 при $i, k\to\infty$. Окончательно запишем, что $\tau'_{ik} = u_j \tau_{ik} + o(1)$ при $\boldsymbol{q}_j \leqslant \boldsymbol{q} < \boldsymbol{q}_{j+1}$ $(i, k \underset{(d)}{\to} \infty)$ **(2)**. Аналогично $\sigma'_{ik} = u_j \sigma_{ik} + o(1)$ при $\boldsymbol{q}_j \leqslant \boldsymbol{q} < \boldsymbol{q}_{j+1}$ $(i, k \underset{(d)}{\to} \infty)$ **(3)**.

Если задана произвольная последовательность $\{v_j\}$, не стремящаяся к 0, то между каждыми двумя ее членами $v_j$ и $v_{j+1}$ вставим $j-1$ новых членов $v_j - \frac{v_j}{j} + \frac{v_{j+1}}{j}$; $v_j - \frac{2v_j}{j} + \frac{2v_{j+1}}{j}, \ldots$; $v_j - \frac{(j-1)\,v_j}{j} + \frac{(j-1)\,v_{j+1}}{j}$ и эту новую последовательность обозначим через $u_j$. Тогда, очевидно, $u_{j+1} - u_j = \frac{v_{j+1} - v_j}{j} \to 0 \times (j \to \infty)$. Последовательность $\{s'_{mn}\}$, определенную таким выбором $\{u_j\}$, будем обозначать $s_{mn}(v_j)$. Как установили, для последовательности $s_{mn}(v_j)$ справедливы формулы (2), (3).

Перейдем теперь непосредственно к доказательству теоремы.

Рассмотрим последовательность $\{s_{mn}\}$, $(d)$-суммируемую к 0 матрицей $B$ и не являющуюся $(d)$-суммируемой матрицей $A$. Не усложняя построения последовательностей $\{\boldsymbol{q}_j\}$ и $\{\nu(\boldsymbol{q}_j)\}$, можем считать что в каждой зоне $G^j_\lambda$ $(j = 1, 2, \ldots)$, определенной неравенством $\boldsymbol{q}_j \leqslant \boldsymbol{q} < \boldsymbol{q}_{j+1}$, существуют элементы $\tau_{i'k'}$ и $\tau_{i'+v, k'+w}$ такие, что $|\tau_{i'+v,k'+w} - \tau_{i'k'}| \geqslant \alpha > 0$.

Для каждого числа $\beta$, $0 < \beta < 1$, рассмотрим последовательность $v_j(\beta)$: $\beta^1, \beta^1, \beta^2, \beta^1, \beta^2, \beta^3, \ldots$ и соответствующую последовательность $s_{mn}(v_j)$ обозначим через $s^{(\beta)}_{mn}$. Последовательности $s^{(\beta)}_{mn}$, $0 < \beta < 1$, образуют искомое континуальное множество. Действительно, из формулы (3) следует, что последовательности $s^{(\beta)}_{mn}$ суммируются матрицей $B$ к 0. Докажем теперь линейную независимость множества последовательностей $s^{(\beta)}_{mn}$ над матрицей $A$. Заметим, что последовательность $\gamma_1 s^{(\beta_1)}_{mn} + \gamma_2 s^{(\beta_2)}_{mn} + \cdots + \gamma_r s^{(\beta r)}_{mn}$ может рассматриваться как $s_{mn}(\tilde{v}_j)$, где за последовательность $\tilde{v}_j$ взята соответствующая линейная комбинация последовательностей $v_j(\beta)_p$: $\gamma_1\beta_1 + \gamma_2\beta_2 + \cdots + \gamma_r\beta_r$; $\gamma_1\beta_1 + \gamma_2\beta_2 + \cdots + \gamma_r\beta_r$; $\gamma_1\beta_1^2 + \gamma_2\beta_2^2 + \cdots + \gamma_r\beta_r^2$; ... Покажем, что $\{\tilde{v}_j\}$ не стремится к 0. Действительно, при любом фиксированном $p$ в последовательности имеется бесконечное количество членов, равных $\gamma_1\beta_1^p + \cdots + \gamma_r\beta_r^p$, и, если $\tilde{v}_j \to 0$, то $\gamma_1\beta_1^p + \cdots + \gamma_r\beta_r^p = 0$ $(p = 1, 2, \ldots)$. Но тогда $\gamma_1 = \gamma_2 = \cdots = \gamma_r = 0$, а по условию не все $\gamma_r$ равны 0. Итак, последовательность $\{\tilde{v}_j\}$ не стремится к 0.

На основании формулы (2) и условия $|\tau_{i'+v,k'+w} - \tau_{i'k'}| \geqslant \alpha > 0$ для $\tau_{i'k'} \in G^j_\lambda$ последовательность $\gamma_1 s^{(\beta_1)}_{mn} + \cdots + \gamma_r s^{(\beta r)}_{mn}$ не суммируется матрицей $A$, т. е. указанное множество последовательностей действительно линейно независимо относительно матрицы $A$.

Как следствие из этой теоремы может быть получена

**Теорема 5.** *Каждая $R_a^d$-регулярная матрица $A = (a_{ikmn})$, $(d)$-суммирующая одну ограниченную расходящуюся последовательность, $(d)$-суммирует континуальное множество ограниченных последовательностей, расходящихся одновременно с любой их линейной комбинацией.*

**Теорема 6.** *Если $R_a^d$-матрица $(d)$-суммирует какую-либо ограниченную расходящуюся последовательность, то она суммирует хотя бы одну последовательность, удовлетворяющую условию* $\overline{\lim\limits_{m,n}}|s_{mn}| = \infty$.

Пусть матрица $A$ $(d)$-суммирует ограниченную расходящуюся последовательность $\{u_{mn}\}$ к значению $u$. Положим $\{s_{mn}\} = \{u_{mn} - u\}$. Построим индуктивно последовательность $\{\rho(r)\}$ следующим образом:

$$\sum_{m,n:\,\bar{p}\geqslant\rho(j)} (j+1)\,|a_{ikmn}| < \frac{1}{2^{j-1}} \text{ для } \bar{q} \leqslant j;\ \rho(j) > \rho(j-1).$$

Как уже отмечалось, для последовательности

$$\mu_{mn} = \begin{cases} 1, & \boldsymbol{p} < \rho(1); \\ j+1, & \rho(j) \leqslant \boldsymbol{p} < \rho(j+1),\ (j = 1, 2, \ldots) \end{cases}$$

ряд $\sum\limits_{m,n} \mu_{mn}|a_{ikmn}|$ сходится для всех $i$ и $k$. Для $R_a^d$-матриц $\lim\limits_{(d)} \sum\limits_{m} |a_{ikmn}| = 0$ при любом фиксированном $n$ и $\lim\limits_{(d)} \sum\limits_{n} |a_{ikmn}| = 0$ при любом фиксированном $m$. Кроме того, по условию $\lim\limits_{(d)} t_{ik} = 0$, где $t_{ik} = \sum\limits_{m,n} a_{ikmn}s_{mn}$. Следовательно, существует последовательность $\{q_r\}$ такая, что

$$\sum_{m=1}^{r}\sum_{n=1}^{\infty} \mu_{mn}|a_{ikmn}| \leqslant \frac{1}{r};\ \sum_{n=1}^{r}\sum_{m=1}^{\infty} \mu_{mn}|a_{ikmn}| \leqslant \frac{1}{r} \text{ и } |t_{ik}| < \frac{1}{r}$$

для $\boldsymbol{q} \geqslant q_r$; $(i, k) \in G_\lambda$. В дальнейшем можем считать $q_r > q_{r-1}$. Последовательность $\{\nu(\boldsymbol{q})\}$ выберем так, чтобы $\nu(\boldsymbol{q}) = 1$ $(\boldsymbol{q} < q_1)$; $\nu(\boldsymbol{q}) = r$ $(q_r \leqslant \boldsymbol{q} < q_{r+1})$. В силу леммы 1 матрица

$$A^* = (a^*_{ikmn}) = \begin{cases} a_{ikmn}, & \boldsymbol{p} \geqslant \nu(\boldsymbol{q}) \wedge \bar{p} \leqslant \rho(\bar{q}),\ (i, k) \in G_\lambda; \\ 0 & \text{в остальных случаях} \end{cases}$$

равносильна матрице $A$ для всех последовательностей $\{s_{mn}\}$, рост которых ограничен некоторой возрастающей последовательностью $\{\mu_{mn}\}$, т. е. $|s_{mn}| < H\mu_{mn}$, $\mu_{mn} \uparrow \infty$. Следовательно, в дальнейшем, рассматривая лишь последовательности из этого класса, заданную матрицу $A$, можем считать усеченной, положив $a_{ikmn} = 0$ при

$p < \nu(q) \vee \overline{p} > \rho(\overline{q})$. Как уже отмечалось, для $(d)$-усеченных $R_a^d$-матриц грани усечения $\rho(i, k) = \rho(\overline{q})$ и $\nu(i, k) = \nu(q)$ можно считать функциями одной и той же переменной, например, $q$. Из построения $\nu(q)$ и $\rho(q)$ следует, что $\nu(q+1) - \nu(q) \leqslant 1$. Значит, существует возрастающая последовательность $\{q_j\}$ такая, что $\nu(q_j) = \rho(q_{j-1})$.

Разобьем последовательность $\{s_{mn}\}$ на зоны, назвав $j$-й зоной множество $\{s_{mn},\ \nu(q_j) \leqslant p < \nu(q_{j+1})\}$.

Так как последовательность $\{s_{mn}\}$ расходящаяся, то из нее можно выделить подпоследовательность $\{s'_{mn}\}$ такую, что $|s'_{mn}| > c > 0$, $m, n = 1, 2, \ldots$, причем элементы $\{s'_{mn}\}$ расположены в некоторых сколь угодно дальних зонах. Умножая элементы $j$-й зоны на $\sqrt{j}$ $(j = 1, 2, \ldots)$, получим неограниченную последовательность $\{\xi_{mn}\}$. Заметим, что построенная последовательность $\{\xi_{mn}\}$ не выходит за пределы рассматриваемого класса, поскольку, очевидно, $|\xi_{mn}| \leqslant H\mu_{mn}$, где $\{\mu_{mn}\}$ взята из доказательства леммы 1. Покажем, что $\{\xi_{mn}\}$ $(d)$-суммируется матрицей $A$ к 0.

Пусть $i, k$ — произвольные натуральные числа, принадлежащие

$$G_\lambda,\ q_j \leqslant q < q_{j+1}. \text{ Тогда } \eta_{ik} = \sum_{m,n=\nu(q)}^{\rho(q)} a_{ikmn}\xi_{mn} = \sum_{m,n<\rho(q);\ p<\nu(q)}^{\nu(q_{j+1})-1} a_{ikmn}\xi_{mn} + \sum_{m,n=\nu_{q_{j+1}}}^{\rho(q)} a_{ikmn}\xi'_{mn} = \sqrt{j} \sum_{m,n<\rho(q);} \sum_{p=\nu(q)}^{\nu(q_{j+1})-1} a_{ikmn}s_{mn} +$$

$$+ \sqrt{j+1} \sum_{m,n=\nu(q_{j+1})}^{\rho(q)} a_{ikmn}s_{mn} = \sqrt{j}\, t'_{ik} + (\sqrt{j+1} - \sqrt{j}) \sum_{m,n=\nu(q_{j+1})}^{\rho(q)} a_{ikmn}s_{mn}.$$

В силу ограниченности последовательности $\{s_{mn}\}$ и $R_a^d$-регулярности матрицы $A = (a_{ikmn})$ второе слагаемое не превосходит по модулю величины $(\sqrt{j+1} - \sqrt{j})MH$, где $\sum\limits_{m,n} |a_{ikmn}| \leqslant M$; $|s_{mn}| \leqslant H$ и стремится к 0 при $i, k \to \infty$. Как уже отмечалось, для рассматриваемых значений $i$ и $k$ $|t_{ik}| < \frac{1}{j}$. Таким образом получаем, что $|\eta_{ik}| < \frac{1}{\sqrt{j}} + (\sqrt{j+1} - \sqrt{j})MH$, и так как $j \to \infty$, при $i, k \underset{(\alpha)}{\to} \infty$, то $\lim\limits_{(d)} \eta_{ik} = 0\ (i, k \to \infty)$. Теорема доказана.

Из теорем 5 и 6 получаем, что в поле сходимости нетривиального $R_a^d$-регулярного матричного метода $A$ имеется хотя бы одна неограниченная последовательность, удовлетворяющая условию $\overline{\lim\limits_{(d)}} |s_{mn}| = \infty$, и континуальное множество ограниченных расходящихся последовательностей.

В заключение покажем, что имеет место

**Теорема 7.** *Пусть $A = (a_{ikmn})$ и $B = (b_{ikmn})$ $R_a^d$-матрицы, причем $A_0 \subset B_0$. Тогда существует континуальное множество матриц $C_\alpha$, несравнимых между собой и таких, что $A_0 \subset C_{\alpha 0} \subset B_0$.*

Доказательство ее проведем по схеме, предложенной Мельником В. И. [4], используя построение Питерсена (т. 4). Пусть $\{s_{mn}\}$ — последовательность, $(d)$ — суммируемая к 0 матрицей $A$. Не усложняя обозначений, можем считать, что в каждой зоне $G_\lambda^j$ содержится элемент $\tau_{(ik)_j} = \tau_{i_j k_j}: |\tau_{i_j k_j}| \geqslant \alpha > 0$.

Рассмотрим последовательность $\{v_j\} = \{\beta_1, \beta_2, \ldots\}$, где числа $\beta_j$ определим позднее. Построенная по этим числам последовательность $\{u_j\} = \{\beta_1, \beta_2, \beta_2/2 + \beta_3/3, \beta_3, \ldots\}$ содержит $\{v_j\}$ как подпоследовательность. Номер числа $\beta_r$ в $\{u_j\}$ обозначим через $j_r$. Положим теперь $\beta_r = (\tau_{(ik)_{j_r}})^{-1}$. Ясно, что $|\beta_r| \leqslant \alpha^{-1}$.

Рассмотрим последовательности $v_j(\beta)$, $0 < \beta < 1$, равные $\beta\beta_1$; $(\beta - 1)\beta_2$; $-\beta\beta_3$; $-(\beta - 1)\beta_4$; ...; $(-1)^{l-1}\beta\beta_{2l-1}$; $(-1)^{l-1}(\beta - 1) \times \beta_{2l}$, ..., и построенные по этим $v_j(\beta)$ последовательности $s_{mn}(v_j(\beta))$ обозначим через $s_{mn}^{(\beta)}$.

Пусть матрица $\tilde{A}_\alpha$ $(0 < \alpha < 1)$ такая, что элементарные матрицы $a_{ikmn}^{(\alpha)}$ с $q = l$ равны сумме матрицы $a_{(ik)_{j_{2l}} mn}$, умноженной на $\alpha$, и матрицы $a_{(ik)_{j_{2l-1}} mn}$, умноженной на $(1-\alpha)$. Матрицы $\tilde{A}_\alpha$ — $R_a^d$-регулярны вследствие $R_a^d$ — регулярности матрицы $A$.

Обозначив через $\tau_{ik}(A, s_{mn})$ — $(i, k)$-й член преобразования последовательности $s_{mn}$ при помощи матрицы $A$ (аналогично для других последовательностей и матриц), получим

$$\begin{aligned}\tau_{ik}(\tilde{A}_\alpha, s_{mn}^{(\beta)}) &= \alpha\tau_{(ik)_{j_{2l}}}(A, s_{mn}^{(\beta)}) + (1-\alpha)\tau_{(ik)_{j_{2l-1}}}(A, s_{mn}^{(\beta)}) = \\ &= \alpha u_{j_{2l}}(\beta)\tau_{(ik)_{j_{2l}}}(A, s_{mn}) + o(1) + (1-\alpha)u_{j_{2l-1}}(\beta)\tau_{(ik)_{j_{2l-1}}}(A, s_{mn}) + \\ &+ o(1) = \alpha(-1)^{l-1}(\beta - 1)\beta_{2l}\tau_{(ik)_{j_{2l}}}(A, s_{mn}) + \\ &+ (1-\alpha)(-1)^{l-1}\beta\beta_{2l-1}\tau_{(ik)_{j_{2l-1}}}(A, s_{mn}) + \\ &+ o(1) = (-1)^{l-1}(-\alpha + \beta) + o(1).\end{aligned}$$

Отсюда ясно, что матрица $\tilde{A}_\alpha$ $(d)$-суммирует последовательность $\{s_{mn}^{(\beta)}\}$ при $\alpha = \beta$ и не суммирует ее в смысле $(d)$ при $\alpha \neq \beta$. Матрица $B$ $(d)$-суммирует все последовательности $\{s_{mn}^{(\beta)}\}$.

Образуем теперь матрицы $c_\alpha = \overset{\alpha}{c}_{ikmn}: \overset{\alpha}{c}_{ikmn} = \begin{cases} b_{ikmn}, & q = 2v - 1; \\ a_{ikmn}, & q = 2v. \end{cases}$

Из изложенного выше ясно, что матрицы $C_\alpha$ $(0 < \alpha \leqslant 1)$ составляют необходимое континуальное множество.

**Список литературы:** 1. *Кук Р.* Бесконечные матрицы и пространства последовательностей.—М.: Изд-во иностр. лит., 1960.—471 с. 2. *Брудно А. Л.* Суммирование ограниченных последовательностей матрицами.— Мат. сб., 1945, **16**, с. 191—247. 3. *Огиевецкий И. И.* К теории суммирования ограниченных последовательностей регулярными матрицами.— Усп. мат. наук, 1963, **18**, вып. 5 (113), с. 221—223. 4. *Мельник В. И.* Підсумовування обмежених послідовностей регулярними матрицями.— Друга наук. конф. молодих математиків України, 1966, с. 438—441. 5. *Рабец Е. В.* Об ограниченной регулярности и совместности методов узкого суммирования двойных последовательностей.— Прибл. методы мат. анализа, 1981, с. 106—115. 6. Petersen G. M. Regular Matrix Transformations. — Mc. Graw — Hill, 1966, ch. 4.

*Поступила в редколлегию 03.06.82.*