УДК 517.5

С. А. ОРЛОВ

ПАРАМЕТРИЗАЦИЯ ПРЕДЕЛЬНЫХ МАТРИЧНЫХ КРУГОВ, АНАЛИТИЧЕСКИ ЗАВИСЯЩИХ ОТ ПАРАМЕТРА

Введение. При решении многих задач анализа, как, например, матричная проблема Неванлинна — Пика, проблема моментов, отыскания функций Грина краевых задач, порождаемых системой дифференциальных уравнений [1—9], возникают аналогичные ситуации, которые укладываются в следующую схему.

По данным усеченной задачи (фиксированном n для дискретных задач либо фиксированном b — конце интервала), определяется аналитическая матрица-функция $W(b, \lambda)$, $(0 < b < \infty)$, обладающая свойствами $\Gamma(b, \lambda) \stackrel{\text{def}}{=} J - W(b, \lambda) JW^*(b, \lambda) > 0$; $(J = J^*,\ J^2 = I)$ **(0.1)**; $\Gamma(b_1\lambda) \leqslant \Gamma(b_2\lambda)$ при $b_1 < b_2$ (монотонность) **(0.2)**.

Условие монотонности означает, что семейство $W(b, \lambda)$ $(0 < b < \infty)$ мультипликативно, т. е. $W(b_2, \lambda) = W(b_1, \lambda) W_3(\lambda)$, где $J - W_3JW_3^* \geqslant 0$. Общее решение усеченной задачи описывается дробно-линейным преобразованием, порождаемым матрицей $W(b\lambda)$, и отображает класс функций в себя (сжатия в сжатия, или неванлинновские функции в себя). При фиксированном λ значения множества всех решений заполняют матричный круг. С возрастанием b (или n) множества решений убывают. Пересечение этих множеств дает решение задачи в целом, т. е. при $n = 1, 2, 3, \ldots$ или в промежутке $[0, \infty)$. Пересечение матричных кругов есть предельный круг. Основополагающим при решении задач данного типа является теорема об инвариантности рангов радиусов предельного матричного круга относительно λ ([4], основная теорема).

Дефекты радиусов предельного матричного круга относят данную задачу к определенному классу по своей структуре (в частности, единственность решения). В статье установлена параметризация решений задачи в елом при произвольной расходимости семейства $W(b, \lambda)$. Расходимость семейства $W(b, \lambda)$ [3], в силу теоремы об инвариантности рангов радиусов предельного матричного круга, характеризуется числами

$$\begin{cases} d = \operatorname{def} R^2(\lambda), \\ R^2(\lambda) = \lim\limits_{b\to\infty} (J - W(b, \lambda) JW^*(b, \lambda))^{-1}, \\ d_1 = \operatorname{def} R_1^2(\lambda), \\ R_1^2(\lambda) = \lim\limits_{b\to\infty} (W_1^*(b, \lambda) JW_1(b, \lambda) - J)^{-1}, \ W_1 = JW^{-1}J. \end{cases} \tag{0.3}$$

1. Параметризация класса $N_W(\infty)$ 1°. Всюду в дальнейшем будем считать, что при фиксированном $b\,(0<b<\infty)$ $W(b, \lambda)$ — мероморфная матрица-функция в области $G=\{\lambda : \operatorname{Im}\lambda>0\}$, удовлетворяющая условиям (0.1) и (0.2). Множество E есть множество полюсов $W(b, \lambda)$ при всех значениях $b\ (0<b<\infty)$, а E_1 такое же множество для $W_1(b, \lambda)=JW^{-1}(b, \lambda)J$. В силу теоремы об инвариантности рангов радиусов предельных матричных кругов (основная теорема в [7]) $\operatorname{def} R^2(\lambda)=d$ для $\lambda\in G\setminus E$; $\operatorname{def} R_1^2\times\times(\lambda)=d_1$ для $\lambda\in G\setminus E_1$. Обозначим через $N_W(b)$ множество всех функций, допускающих представление $\Omega(b, \lambda; A, B)=-i(A(\lambda)+B(\lambda)W_1(b, \lambda))^{-1}\times(A(\lambda)-B(\lambda)W_1(b, \lambda)J=iJ(A_1(\lambda)-W(b, \lambda)B_1(\lambda))\times(A(\lambda)+W(b, \lambda)B_1(\lambda))^{-1}$ **(1.1).** Здесь $(A(\lambda), B(\lambda))$ — неособенная J-нерастягивающая пара $(AJA^*-BJB^*\leqslant 0)$, а $(A_1^*(\lambda), B_1^*(\lambda))$ — неособенная пара, J — ортогональная паре $(A(\lambda), B(\lambda))$, т. е. $AJA_1^*-BJB_1^*=0$. В [4] (теорема 3.1) установлена внутренняя характеристика принадлежности N-функции $\Omega(\lambda)$ классу $N_W(b)$. С ростом b множества $N_W(b)$ убывают. Пусть $N_W(\infty)=\bigcap\limits_{0<b<\infty}N_W(b)$ **(1.2).** Параметризация множества $N_W(\infty)$ дает решение в целом всех перечисленных задач.

2°. Н рмировка семейства $W(b, \lambda)$. Пусть $\lambda_0\overline{\in}E\cup E_1$. Непосредственной проверкой легко убедиться в том, что матрица $W_0(b)=(R^2(b, \lambda_0)+R_1(b, \lambda_0)R(b, \lambda_0))^{-1}(R_1^2(b, \lambda_0)+R_1(b, \lambda_0)\times\times R(b, \lambda_0))$ **(1.3),** где $R(b, \lambda_0)=\Gamma^{-1/2}(b, \lambda_0)$, $R_1(b, \lambda_0)=\Gamma_1^{-1/2}\times\times(b, \lambda_0)$, удовлетворяет условию $J-W_0JW_0^*=J-W(b, \lambda_0)\times\times JW^*(b, \lambda_0)$. Отсюда следует, что матрица $W^{-1}(b, \lambda_0)W_0(b)=\widehat{A}(b)$ — J-унитарна, т. е. $W_0(b)=W(b, \lambda_0)\widehat{A}(b)$. Положим $\widetilde{W}\times\times(b, \lambda)=W(b, \lambda)\hat{A}(b)$, тогда $\widetilde{W}(b, \lambda_0)=W_0(b)$. Без ограничения общности будем считать, что семейство $W(b, \lambda)$ уже так пронормировано. Очевидно, что множество $N_W(b)$ не зависит от нормировки семейства $W(b, \lambda)$. Найдем образ пары $(I, -I)$ в преобразовании (1.1): $\Omega(b, \lambda)=-i(I-W_1(b, \lambda))^{-1}\times(I+W_1(b, \lambda))J=iJ(I+W(b, \lambda)\cdot(I-W(b, \lambda))^{-1}$;

$$Z(b, \lambda)=\frac{iJ+\Omega(b, \lambda)}{2}=iJ(I-W(b, \lambda))^{-1};$$

$$Z_1(b, \lambda)=\frac{-iJ+\Omega(b, \lambda)}{2}=iJ(I-W(b, \lambda))^{-1}W(b, \lambda). \qquad (1.4)$$

Из соотношения $R^2(b, \lambda)-R_1^2(b, \lambda)=J$ следует, что $\Omega(b, \lambda_0)=i[R^2(b, \lambda_0)+R_1^2(b, \lambda_0)+2R_1(b, \lambda_0)R(b, \lambda_0)]$. Следовательно, $\lim\limits_{b\to\infty}\Omega(b, \lambda_0)=i[R^2(\lambda_0)+R_1(\lambda_0)R(\lambda_0)]=\Omega(\lambda_0)$. Это позволяет выделить последовательность $b_1<b_2<b_3<\cdots$ такую, что $\lim\limits_{b_n\to\infty}\Omega(b_n, \lambda)=\Omega(\lambda)$. Так как $\operatorname{Im}\Omega(\lambda_0)=(R_1(\lambda_0)+R(\lambda_0))^2>0$, то при всех λ будет $\operatorname{Im}\Omega(\lambda) > 0$. К такому же результату можно прийти, если пронормировать семейство $W(b, \lambda)$ в точке λ_0 к J-модулю. Так как $\Omega(\lambda)$ есть предел канонических функций $\Omega(b_n, \lambda)$ (т. е. образ J-унитарной пары $(I, -I)$), т в силу теоремы 3.5 из [4] $\Omega(\lambda)$ в каждой точке λ допускает представление $\Omega(\lambda) = i[R^2(\lambda) + R_1^2(\lambda) + 2R_1(\lambda) v_\lambda R(\lambda)]$, $v_\lambda v_\lambda^* = I$ **(1.5)**, следовательно, $Z(\lambda) = i[R^2(\lambda) + R_1(\lambda) v_\lambda R(\lambda)]$; $Z_1(\lambda) = i[R_1^2(\lambda) + R_1(\lambda) v_\lambda \times R(\lambda)]$. И так как $\operatorname{Im}\Omega(\lambda) = [R(\lambda) + R_1(\lambda) v_\lambda] \times [R(\lambda) + R_1 \times (\lambda) v_\lambda^*] = [R_1(\lambda) + v_\lambda R(\lambda)]^* \times [R_1(\lambda) + v_\lambda R(\lambda)]$, то

$$\begin{aligned} &\operatorname{def} Z(\lambda) = \operatorname{def} R^2(\lambda) = d \text{ для } \lambda \in G \setminus E; \\ &\operatorname{def} Z_1(\lambda) = \operatorname{def} R_1^2(\lambda) = d_1 \text{ для } \lambda \in G \setminus E_1. \end{aligned} \tag{1.6}$$

Заметим, что числа d и d_1 удовлетворяют неравенствам $0 \leqslant d \leqslant p$, $0 \leqslant d_1 \leqslant q$, где p и q — число положительных и отрицательных квадратов, определяемых метрикой J.

3°. Установим, что при любой неособенной J-нерастягивающей паре (A, B) матрица $\Omega(b_n, \lambda; A, B)$, определяемая формулой (1.1), имеет предел при $b_n \to \infty$. Из формул (1.4) следует, что

$$\begin{aligned} &W(b_n, \lambda) = Z^{-1}(b_n, \lambda) Z_1(b_n, \lambda) = J Z_1(b_n, \lambda) Z^{-1}(b_n, \lambda) J. \\ &W_1(b_n, \lambda) = J W^{-1}(b_n, \lambda) J = Z(b_n, \lambda) Z_1^{-1}(b_n, \lambda). \end{aligned} \tag{1.7}$$

Полученные выражения для $W(b_n, \lambda)$ и $W_1(b_n, \lambda)$ подставим в формулы (1.1). Тогда получим $Z(b_n, \lambda; A_1, B_1) = \frac{iJ + \Omega(b_n, \lambda; A_1, B_1)}{2} = iJA_1(A_1 + W(b_n, \lambda) B_1)^{-1} = iJA_1 \cdot (A_1 + Z^{-1}(b_n, \lambda) Z_1(b_n, \lambda))^{-1} = iJA_1(Z(b_n, \lambda) A_1 + Z_1(b_n, \lambda) B_1)^{-1} \cdot Z(b_n, \lambda)$. Аналогично получим $Z_1(b_n, \lambda; A. B) = \frac{-iJ + \Omega(b_n \lambda; A, B)}{2} = -iZ_1(b_n, \lambda) \cdot (A \cdot Z_1 \times (b_n, \lambda) + BZ(b_n, \lambda) AJ$. Итак,

$$\begin{aligned} &Z(b_n, \lambda; A, B) = iJA_1(Z(b_n, \lambda) A_1 + Z_1(b_n, \lambda) B_1)^{-1} Z(b_n, \lambda); \\ &Z_1(b_n, \lambda; A, B) = -Z_1(b_n, \lambda) \cdot (AZ_1(b_n, \lambda) + BZ(b_n, \lambda)^{-1}) \cdot AJ. \end{aligned} \tag{1.8}$$

Для того чтобы найти предел (1.8) при $b_n \to \infty$, докажем лемму.

Лемма. *Если $\Omega(\lambda)$ регулярна в G и $\operatorname{Im}\Omega(\lambda) > 0$, а $2Z(\lambda) = iJ + \Omega(\lambda)$; $2Z_1(\lambda) - iJ = -iJ + \Omega(\lambda)$, то при любой регулярной в G, неособенной в каждой точке G J-нерастягивающей паре (A, B) и J-ортогональной к ней регулярной неособенной паре (A_1, B_1) матрицы $[A(\lambda) Z_1(\lambda) + B(\lambda) Z(\lambda)]$ и $[Z(\lambda) A_1(\lambda) + Z_1 \times (\lambda) B_1(\lambda)]$ обратим в каждой точке G.*

Доказательство. Пусть существует вектор f такой, что $0 = f[A_1^* Z^* + B_1^* Z_1^*]$. Докажем, что $f = 0$. Положим $fA_1^* = g$, $fB_1^* = h$. Так как $A_1 J A_1^* - B_1 J B_1^* \geqslant 0$, то $gJg^* - hJh^* \geqslant 0$, и из неособенности пары следует, что $gg^* + hh^* > 0$. Итак, $0 = 2f \times [A_1^* Z^* + B_1^* Z_1^*] = g \cdot 2Z^* + h \cdot 2 \cdot Z_1^* = g \cdot 2 \cdot Z^* + h \cdot 2 \cdot Z^* +$

$+2ihJ=(g+h)\cdot 2Z^*+i\cdot 2hJ$. Из этого соотношения следует, что если $g+h=0$, то $h=0$ и, следовательно, $g=0$; но тогда и $f=0$ в силу неособенности пары $(A_1^*,\ B_1^*)$. Докажем, что $g+h=0$. Умножим равенство $0=(g+h)2Z^*+i2hJ$ справа на $(g+h)^*$. Тогда получим $0=(g+h)2Z^*(g+h)^*+i2hJ(g+h)^*=(g+h)\operatorname{Re}\Omega(\lambda)(g+h)^*-i[(g+h)\operatorname{Im}\Omega(\lambda)(g+h)^*+(g+h)\times J(g+h)^*-2hJ(g+h)^*]=(g+h)\operatorname{Re}\Omega(\lambda)(g+h)^*-i(hJg^*-gJh^*)-i[(g+h)\operatorname{Im}\Omega(\lambda)(g+h)^*+(gJg^*-hJh^*)]$. Так как $\operatorname{Im}\Omega(\lambda)>0$ и $gJg^*-hJh^*\geqslant 0$, то квадратная скобка может равняться нулю лишь при $g+h=0$. Итак, $g+h=0$; $h=0$; $g=0$ и $f=0$, т. е. матрица $[ZA_1+Z_1B_1]$ — обратима. Аналогично доказывается, что матрица $[AZ_1(\lambda)+BZ(\lambda)]$ обратима в каждой точке области G.

Заметим, что любая неособенная мероморфная J-нерастягивающая пара $(A(\lambda),\ B(\lambda))$ эквивалентна регулярной, неособенной паре $(\tilde{A}(\lambda),\ \tilde{B}(\lambda))$ в каждой точке области G, т. е. $A(\lambda)=Q(\lambda)\times\tilde{A}(\lambda)$; $B(\lambda)=Q(\lambda)\tilde{B}(\lambda))$ (см. теорему 1.1 в [4]). Найдем теперь пределы (1.8). Так как $\lim\limits_{b_n\to\infty}Z(b_n,\ \lambda)=Z(\lambda)=\frac{iJ+\Omega(\lambda)}{2}$; $\lim\limits_{b_n\to\infty}Z_1\times(b_n,\ \lambda)=Z_1(\lambda)=-\frac{iJ+\Omega(\lambda)}{2}$, то в силу леммы в (1.8) можно совершить предельный переход при $b_n\to\infty$. Переходя к пределу, получим $Z(\lambda;\ A_1,\ B_1)=\frac{-iJ+\Omega(\lambda;\ A_1,\ B_1)}{2}=iJA_1(Z(\lambda)A_1+Z_1\times(\lambda)B_1)^{-1}Z(\lambda)$ **(1.9)**; $Z_1(\lambda,\ A,\ B)=\frac{-iJ+\Omega(\lambda;\ A,\ B)}{2}=-iZ_1(\lambda)\times(AZ_1(\lambda)+BZ(\lambda))^{-1}AJ$ **(1.10)**. Заметим, что $\lim\limits_{b_n\to\infty}\Omega(b_n,\lambda;\ A,\ B)=\Omega(\lambda;\ A,\ B)\in N_W(\infty)$.

Доказали, что каждой J-нерастягивающей неособенной паре $(A,\ B)$ и ей J-ортогональной паре $(A_1^*,\ B_1^*)$ отвечает по формулам (1.9) (1.10) функция класса $N_W(\infty)$. Докажем, что этими функциями исчерпывается множество $N_W(\infty)$, т. е. если $\Omega(\lambda)\in N_W(\infty)$, то существует пара $(A,\ B)$ такая, что образ этой пары в преобразовании (1.10) есть $\Omega(\lambda)$. Действительно, если $\Omega(\lambda)\in N_W(\infty)$, то $\Omega(\lambda)\in N_W(b_n)$ при любом b_n $(n=1,\ 2,\ 3,\ \ldots)$, следовательно, $\Omega(\lambda)$ есть образ пары $(A_n,\ B_n)$ в преобразовании (1.1), т. е. $\Omega(\lambda)$ удовлетворяет тождеству (1.8) с парой $(A_n,\ B_n)$. Но пары $(A_n,\ B_n)$ можно заменить компактным множеством пар $(\tilde{A}_n,\ \tilde{B}_n)$ (параметризуя их с помощью аналитических сжатий). Выделим последовательность $(A_{n_k},\ B_{n_k})$, сходящуюся к паре $(\tilde{A}(\lambda),\ \tilde{B}(\lambda)$. Очевидно, что $\lim\limits_{b_{n_k}\to\infty}Z(b_{n_k},\ \lambda)=Z(\lambda)$; $\lim\limits_{b_{n_k}\to\infty}Z_1(b_{n_k},\ \lambda)=Z_1(\lambda)$.

Переходя к пределу в тождестве (1.8) при $b_{n_k}\to\infty$, получим, что $\Omega(\lambda)$ определяется формулами (1.9), (1.10) с парой $(\tilde{A}(\lambda),\ \tilde{B}(\lambda))$. Итак, доказана следующая

Теорема 1.1. *Пусть монотонное семейство* $W(b, \lambda)$, $(0 < b < \infty)$ *нормировано в точке* $\lambda_0 \overline{\in} E \cup E_1$ *к матрице* (1.3) *либо к* J*-модулю. Если из компактного множества канонических функций* $\Omega(b, \lambda) = iJ(I - W(b, \lambda))^{-1} \cdot (I + W(b, \lambda))$ *выделить сходящуюся последовательность* $\Omega(b_n, \lambda)$, $(b_n < b_{n+1})$ *и* $\lim\limits_{b_n \to \infty} \Omega(b_n, \lambda) = \Omega(\lambda)$, *то матрицы* $\Omega(\lambda)$, $Z(\lambda) = \frac{iJ + \Omega(\lambda)}{2}$, $Z_1(\lambda) = \frac{-iJ + \Omega(\lambda)}{2}$ *обладают свойствами* $\operatorname{Im} \Omega(\lambda) > 0$; $\operatorname{def} Z(\lambda) = \operatorname{def} R^2(\lambda) = d$ *для* $\lambda \in G \setminus E$; $\operatorname{def} Z_1(\lambda) = \operatorname{def} R_1^2(\lambda) = d_1$ для $\lambda \in G \setminus E_1$.

2. *Образ любой* J*-нерастягивающей неособенной пары* (A, B) *и ее* J*-ортогональной неособенной пары* $(A_1^*, B_1^*)\, \Omega(b_n, \lambda, A, B)$ *в преобразовании (2.1) имеет при* $b_n \to \infty$ *предел, который определяется формулами (1.9), (1.10).*

3. *Матрицами (1.9), (1.10) исчерпывается множество функций класса* $N_{W^*}(\infty)$

Следствие. *На аналитическом подпространстве векторов размерности* d_1, *удовлетворяющих условию* $f(\lambda) Z_1(\lambda) = 0$, *все функции класса* $N_W(\infty)$ *совпадают. На аналитическом подпространстве векторов размерности* d, *удовлетворяющих условию* $Z(\lambda) \tilde{g}(\lambda) = 0$ ($\tilde{g}$ *— вектор-столбец). все функции класса* $N_W(\infty)$ *совпадают.*

Следствие вытекает из формул (1.9), (1.10) и пункта 1 теоремы 1.

Итак, формулы (1.9), (1.10) устанавливают параметризацию класса $N_W(\infty)$.

2. Параметризация класса $K_W(\infty)$. 1°. Пусть матрицам J_2, $W(b, \lambda)$, $W_1(b, \lambda)$ соответствуют блок-матрицы

$$J_2 = \begin{bmatrix} 0 & iI_n \\ -iI_n & 0 \end{bmatrix}; \quad W = \begin{bmatrix} w_{11} & w_{12} \\ w_{21} & w_{22} \end{bmatrix}; \quad W_1 = \begin{bmatrix} \tilde{w}_{11} & \tilde{w}_{12} \\ \tilde{w}_{21} & \tilde{w}_{22} \end{bmatrix}.$$

Рассмотрим пары

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & I_n \end{bmatrix}; \quad B = \begin{bmatrix} b_1(\lambda) & b_2(\lambda) \\ 0 & 0 \end{bmatrix}; \quad A_1 = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & I_n \end{bmatrix};$$
$$B_1 = \begin{bmatrix} c_1(\lambda) & 0 \\ c_2(\lambda) & 0 \end{bmatrix}. \tag{2.1}$$

Здесь условия J_2 — нерастягивания, неособенности пар и J-ортогональность соответственно имеют вид 1) $\frac{b_2 b_1^* - b_1 b_2^*}{i} \geqslant 0$; 2) $b_1 \times b_1^* + b_2 b_2^* > 0$; 3) $b_1 c_2 - b_2 c_1 = 0$; 4) $\frac{c_1^* c_2 - c_2^* c_1}{i} \geqslant 0$ (4) следует из 1) — 3)). Достаточно, чтобы все эти соотношения выполнялись хотя бы в одной точке.

Аналогично тому, как это было установлено в [4], § 6, легко показать, что образ пар (2.1) в преобразовании (1.1) имеет следующий вид:

$$\Omega(b_n, \lambda; A, B) = \begin{pmatrix} 2\omega(b_n, \lambda; b_1, b_2) & -I_n \\ -I_n & 0 \end{pmatrix}, \tag{2.2}$$

где $\omega(b_n, \lambda; b_1, b_2) = (b_1\tilde{w}_{11} + b_2\tilde{w}_{21})^{-1} \times (b_1\tilde{w}_{12} + b_2\tilde{w}_{22}) = (w_{21} \times \times c_1 + w_{22}c_2) \times (w_{12}c_1 + w_{11}c_2)^{-1} = \omega(b_n, \lambda; c_1, c_2)$ **(2.3).** Преобразование (2.3) отображает верхнюю замкнутую матричную полуплоскость в матричный круг, принадлежащий этой полуплоскости.

Справедливо обратное предложение. Если $\Omega(\lambda) \in \boldsymbol{N}_W(b_n)$ и имеет вид (2.2), то $\Omega(\lambda)$ есть образ пары (A, B), эквивалентной паре (2.1) в преобразовании (1.1), т. е. имеет место (2.3).

Обозначим через $\boldsymbol{K}_W(b_n)$ множество всех функций, имеющих вид (2.3). Множество $\boldsymbol{K}_W(b_n)$, как показал В. П. Потапов [8], есть множество решений усеченной проблемы Неванлинна—Пика, если $W(n, \lambda)$ — групповой множитель, т. е. частичное произведение элементарных множителей полного ранга. Пусть $\boldsymbol{K}_W(\infty) = \bigcap_{n=1}^{\infty} \boldsymbol{K}_W(b_n)$. Множество $\boldsymbol{K}_W(\infty)$ есть, в частности, решение выше перечисленных задач в целом $(n = 1, 2, 3, \ldots)$. Из теоремы 1 следует, что при фиксированных (b_1, b_2) существует $\lim_{b_n \to \infty} \omega(b_n, \lambda; b_1, b_2) = \omega(\lambda; b_1, b_2)$. Для параметризации класса $\boldsymbol{K}_W(\infty)$ достаточно в формулы (1.9), (1.10) подставить пары (2.1). Пусть $\Omega(\lambda)$, $Y(\lambda)$, $Z_1(\lambda)$ отвечает блок матрицы $\Omega(\lambda) = \begin{bmatrix} \Omega_{11} & \Omega_{12} \\ \Omega_{21} & \Omega_{22} \end{bmatrix}$, тогда

$$Z(\lambda) = \frac{1}{2}\begin{bmatrix} \Omega_{11} & \Omega_{12} - I_n \\ \Omega_{11} + I_n & \Omega_{12} \end{bmatrix}, \quad Z_1(\lambda) = \begin{bmatrix} \Omega_{11} & \Omega_{12} + I_n \\ \Omega_{21} - I_n & \Omega_{22} \end{bmatrix}. \tag{2.4}$$

Так как $\operatorname{Im}\Omega(\lambda) > 0$, то $\operatorname{Im}\Omega_{11}(\lambda) > 0$, $\operatorname{Im}\Omega_{22} > 0$ и, следовательно, Ω_{11} и Ω_{22} обратимы, поэтому $d = \operatorname{def} R^2(\lambda) = \operatorname{def} Z(\lambda) = \operatorname{def}[\Omega_{11}(\lambda) - (\Omega_{12}(\lambda) - I)\Omega_{22}(\lambda)^{-1}(\Omega_{21}(\lambda) + I)]$; $d_1 = \operatorname{def} R_1^2(\lambda) = \operatorname{def} Z_1(\lambda) = \operatorname{def}[\Omega_{11}(\lambda) - (\Omega_{12}(\lambda) + I)\Omega_{22}(\lambda)^{-1}(\Omega_{21}(\lambda) - I)]$. Положим $r(\lambda) = \Omega_{11}(\lambda) - (\Omega_{12}(\lambda) - I)\Omega_{22}(\lambda)^{-1}(\Omega_{21}(\lambda) + I)$; $r_1(\lambda) = \Omega_{11}(\lambda) - (\Omega_{12}(\lambda) + I)\Omega_{22}(\lambda)^{-1}(\Omega_{21}(\lambda) - I)$ **(2.5).** Тогда

$$\begin{aligned} \operatorname{def} r(\lambda) &= d \quad \text{для} \quad \lambda \in G \setminus E, \\ \operatorname{def} r_1(\lambda) &= d_1 \quad \text{для} \quad \lambda \in G \setminus E_1. \end{aligned} \tag{2.6}$$

Здесь $0 \leqslant d \leqslant n$, $0 \leqslant d_1 \leqslant n$.

В дальнейшем используем тождество

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} \end{pmatrix},$$

где $\alpha_{11} = (a_{11} - a_{12}a_{22}^{-1}a_{21})^{-1}$; $\alpha_{12} = -\alpha_{11}a_{12}a_{22}^{-1}$, $\alpha_{21} = -a_{22}^{-1}a_{21}\alpha_{11}$; $\alpha_{22} = a_{22}^{-1}a_{21}\alpha_{11}a_{12}a_{22}^{-1} + a_{22}^{-1}$ **(2.7).** Найдем образ пары (A, B) (2.1) в преобразовании (1.10): $Z_1(\lambda;\ A,\ B) = iZ_1(\lambda)[AZ_1(\lambda) + BZ \times \times (\lambda)]^{-1}AJ_2$. Учитывая блочную структуру всех матриц, получим

$$[A2Z_1 + B2Z]^{-1} = \left\{\begin{bmatrix}0 & 0\\ 0 & 1\end{bmatrix}\begin{pmatrix}\Omega_{11} & \Omega_{12} + I\\ \Omega_{21} - I & \Omega_{22}\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}b_1 & b_2\\ 0 & 0\end{pmatrix} \times \right.$$
$$\left. \times \begin{pmatrix}\Omega_{11} & \Omega_{12} - I\\ \Omega_{21} + I & \Omega_{21}\end{pmatrix}\right\}^{-1} =$$
$$= \begin{pmatrix}b_1\Omega_{11} + b_2(\Omega_{12} - I) & b_1(\Omega_{12} - I) + b_2\Omega_{22}\\ \Omega_{21} - 1 & \Omega_{22}\end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix}\alpha_{11} & \alpha_{12}\\ \alpha_{21} & \alpha_{22}\end{pmatrix}.$$

Из (2.7) следует, что $\alpha_{11}^{-1} = [b_1\Omega_{11} + b_2(\Omega_{21} + I)] - [b_1(\Omega_{12} - I) + b_2\Omega_{22}]\,\Omega_{22}^{-1}(\Omega_{21} - I) = b_1[\Omega_{11} - (\Omega_{12} - I)\,\Omega_{22}^{-1}(\Omega_{21} - I)] + 2b_2 = b_1[\Omega_{11} - (\Omega_{12} - I)\,\Omega_{22}^{-1}(\Omega_{21} + I) + 2(\Omega_{21} - I)\,\Omega_{22}^{-1}] + 2b_2 = b_1[r \times (\lambda) + 2(\Omega_{21} - I)\,\Omega_{22}^{-1}] + 2b_2$. Итак, $\alpha_{11} = \{b_1[r(\lambda) + 2(\Omega_{21} - I) \times \Omega_{22}^{-1}] + 2b_2\}^{-1}$; $\alpha_{12} = -\alpha_{11}[b_1(\Omega_{12} - I)\,\Omega_{22}^{-1}] + b_2]$; $\alpha_{22} = \Omega_{22}^{-1}(\Omega_{21} - I)\,\alpha_{11}[b_1(\Omega_{12} - I)\,\Omega_{22}^{-1} + b_2] + \Omega_{22}^{-1}$. Далее $[A2Z_1 + B2Z]^{-1}A \times (-iJ_2) = \begin{pmatrix}\alpha_{11} & \alpha_{12}\\ \alpha_{21} & \alpha_{22}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0 & 0\\ 0 & I\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0 & I\\ -I & 0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}-\alpha_{12} & 0\\ -\alpha_{22} & 0\end{pmatrix}$, поэтому в силу (2.2) (1.10) примет вид

$$\begin{pmatrix}\omega(\lambda;\ b_1,\ b_2) & 0\\ -I & 0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}\Omega_{11} & \Omega_{12} + I\\ \Omega_{21} - I & \Omega_{22}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}-\alpha_{12} & 0\\ -\alpha_{22} & 0\end{pmatrix}.$$

Из этого соотношения получим выражение для $\omega(\lambda;\ b_1,\ b_2)$: $\omega(\lambda;\ b_1,\ b_2) = \Omega_{11}\alpha_{11}[b_1(\Omega_{12} - I)\,\Omega_{22}^{-1} + b_2] - (\Omega_{12} + I)\,\alpha_{22} = \Omega_{11}\alpha_{11}[b_1 \times (\Omega_{12} - I)\,\Omega_{22}^{-1} + b_2] - (\Omega_{12} + I)\,\Omega_{22}^{-1}(\Omega_{21} - I)\,\alpha_{11}[b_1(\Omega_{12} - I)\,\Omega_{22}^{-1} + b_2] - (\Omega_{12} + I)\,\Omega_{22}^{-1} = r_1(\lambda)\,\alpha_{11}[b_1(\Omega_{12} - I)\,\Omega_{22}^{-1} + b_2] - (\Omega_{12} + I) \times \Omega_{22}^{-1} = r_1(\lambda)\{b_1[r(\lambda) + 2(\Omega_{12} - I)]\,\Omega_{22}^{-1} + 2b_2\}^{-1}[b_1(\Omega_{12} - I)\,\Omega_{22}^{-1} + b_2] - (\Omega_{12} + I)\,\Omega_{22}^{-1} = \frac{1}{2}r_1(\lambda) - (\Omega_{12} + I)\,\Omega_{22}^{-1} - \frac{1}{2}r_1(\lambda)\{b_1[r(\lambda) + 2(\Omega_{12} - I)]\,\Omega_{22}^{-1} + 2b_2\}^{-1}b_1r(\lambda)$. Рассмотрим пару $b_1 = 0$, $b_2 = I_n$, тогда $\omega(\lambda;\ 0,\ I) = \frac{1}{2}r_1(\lambda) - (\Omega_{12} - I)^{-1}\Omega_{22} = \frac{1}{2}[\Omega_{11} - (\Omega_{12} + I)\,\Omega_{22}^{-1}(\Omega_{21} - I)] - (\Omega_{12} + I)\,\Omega_{22}^{-1} = \frac{1}{2}[\Omega_{11} - (\Omega_{12} + I)\,\Omega_{22}^{-1}(\Omega_{12} + I)]$. Итак, $\omega(\lambda;\ 0,\ I) = \frac{1}{2}[\Omega_{11}(\lambda) - (\Omega_{12}(\lambda) + I)\,\Omega_{22}(\lambda)^{-1} \cdot (\Omega_{21} \times (\lambda) + I)]$ **(2.8).** Следовательно, $\omega(\lambda;\ b_1,\ b_2) = \omega(\lambda;\ 0,\ I) - \frac{1}{2} \times r_1(\lambda)\{b_1[r_1(\lambda) + 2(\Omega_{12} - I)\,\Omega_{22}^{-1}] + 2b_2\}^{-1}b_1r(\lambda)$ **(2.9).** Аналогично, подставляя пары $(A_1^*,\ B_1^*)$ в формулу (1.9), получим $\omega(\lambda;\ c_1,\ c_2) = \omega(\lambda;\ 0,\ I) - \frac{1}{2}r_1(\lambda)\,c_1\{[r_1(\lambda) + 2\Omega_{22}^{-1}(\Omega_{21} - I)]\,c_1 + 2c_2\}^{-1}r \times (\lambda)$ **(2.10).**

Теорема 2.1. *Пусть монотонное семейство* $W(b, \lambda)$, $(0<b<<\infty)$ *нормировано в точке* $\lambda_0 \overline{\in} E \cup E_1$ *к матрице (1.3) либо к модулю. Если из компактного семейства функций* $\Omega(\lambda) = iJ \times \times [I - W(b, \lambda)]^{-1} \times [I + W(b, \lambda)]$ *выделить сходящуюся последовательность* $\Omega(b_n, \lambda)$ *и* $\lim\limits_{b_n \to \infty} \Omega(b_n, \lambda) = \Omega(\lambda) = \| \Omega_{jk}(\lambda) \|_{j, k=1}^{2}$, *то матрицы* $r(\lambda) = \Omega_{11}(\lambda) - (\Omega_{12}(\lambda) - I)\Omega_{22}(\lambda)^{-1}(\Omega_{12}(\lambda) + I)$; $r_1(\lambda) = = \Omega_{11}(\lambda) - (\Omega_{12}(\lambda) + I) \cdot \Omega_{22}(\lambda)^{-1} \cdot (\Omega_{21}(\lambda) - I)$ *обладают свойствами* $\operatorname{def} r(\lambda) = \operatorname{def} R^2 \lambda) = d$ *для* $\lambda \in G \setminus E$, $(0 \leqslant d \leqslant n)$; $\operatorname{def} r_1 \times \times (\lambda = \operatorname{def} R_1^2(\lambda) = d_1$ *для* $\lambda \in G \setminus E_1$, $(0 \leqslant d_1 \leqslant n)$.

2. *При любых фиксированных парах* (b_1, b_2) *и* (c_1^*, c_2^*) *матрица (2.3) имеет при* $b_n \to \infty$ *предел, определяемый формулами (2.8), (2.9), (2.10).*

3. *Матрицами (2.9) и (2.10) исчерпывается класс* $\boldsymbol{K}_W(\infty)$.

Следствие. *На аналитическом подпространстве постоянной размерности* d_1 *векторов, удовлетворяющих условию* $f(\lambda) \times \times r_1(\lambda) = 0$, *все функции класса* $\boldsymbol{K}_W(\infty)$ *совпадают с функцией* $\omega(\lambda; 0, I)$. *На аналитическом подпространстве размерности* d *векторов, удовлетворяющих условию* $r(\lambda)\hat{g} = 0$, *все функции множества* $\boldsymbol{K}_W(\infty)$ *совпадают с функцией* $\omega(\lambda; 0, I)$. *В частности, если* $d = n$ *либо* $d_1 = n$, *имеет место единственность.*

2°. Аналогичная ситуация имеет место при $J = J_1 = \begin{pmatrix} 0 & I_n \\ I_n & 0 \end{pmatrix}$. Здесь целесообразно в формуле (1.1) убрать i, т. е. вместо функций $\operatorname{Im}\Omega(\lambda) \geqslant 0$ рассматривать позитивные функции $\operatorname{Re}\Omega = \frac{1}{2} \times \times (\Omega + \Omega^*) \geqslant 0$. В этом случае J_1-нерастягивание, неособенность пар (A, B), (2.1) и J_1-ортогональность соответственно имеют вид 1) $b_1 b_1^* + b_2 b_1^* \geqslant 0$; 2) $b_1 b_1^* + b_2 b_2^* > 0$; 3) $b_1 c_2 + b_2 c_1 = 0$; 4) $c_1^* c_2 + c_2^* c_1 \geqslant 0$; 5 $c_1^* c_1 + c_2^* c_2 > 0$. В этом случае образ пары (2.1) в преобразовании (1.1) (без i) имеет вид

$$\Omega(b_n; A, B) = \begin{pmatrix} 2\omega(b_n, \lambda; b_1, b_2) & I_n \\ I_n & 0 \end{pmatrix}, \tag{2.11}$$

где $\omega(b_n, \lambda; b_1, b_2) = (b_1 \tilde{w}_{11} + b_2 \tilde{w}_{21})^{-1} \times (b_1 \tilde{w}_{12} + b_2 \tilde{w}_{22}) = -(w_{21} \times \times c_1 + w_{22} c_2) \times (w_{11} c_1 + w_{12} c_2)^{-1} = \omega(b_n, \lambda; c_1, c_2$ **(2.12).** При отсутствии i в преобразовании (1.1) матрицы Z и Z_1 выражаются через $\Omega(\lambda)$ так: $Z(\lambda) = \frac{J + \Omega(\lambda)}{2}$; $Z_1(\lambda) = \frac{-J + \Omega(\lambda)}{2}$. Обозначим через $\boldsymbol{P}_W(b_n)$ множество всех функций вида (2.12) и положим $\boldsymbol{P}_W(\infty) = \bigcap\limits_{n=1}^{\infty} \boldsymbol{P}_W(b_n)$. Для параметризации класса $\boldsymbol{P}_W(\infty)$ достаточно подставить в формулы (1.9), (1.10) (без i) пары (2.1) и проделать вычисления, аналогичные тем, что были проделаны в предыдущем пункте. Здесь остается в силе теорема 2 и ее следствие.

3. Параметризация класса $S_W(\infty)$. Пусть матрицам $J = J_{p,q}$; $W(b, \lambda)$, $W_1(b, \lambda)$ отвечают блок-матрицы

$$J_{p,q} = \begin{pmatrix} -I_p & 0 \\ 0 & I_q \end{pmatrix}; \quad W(b, \lambda) = \begin{pmatrix} w_{11} & w_{12} \\ w_{21} & w_{22} \end{pmatrix};$$

$$W_1(b, \lambda) = \begin{pmatrix} \tilde{w}_{11} & \tilde{w}_{12} \\ \tilde{w}_{21} & \tilde{w}_{22} \end{pmatrix}.$$

Параметризуем пары с помощью аналитических сжатий:

$$A = \begin{pmatrix} I_p & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}; \; B = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ v_{qp} & I_q \end{pmatrix}; \; A_1 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & I_q \end{pmatrix}; \; B_1 = \begin{pmatrix} I_p & 0 \\ v_{qp} & 0 \end{pmatrix}. \tag{3.1}$$

Пары (A, B), (A_1^*, B_1^*) неособенные и J-ортогональные. Условие J-нерастягивания пары (A, B) равносильно условию $v_{qp}v_{qp}^* - I_q \leqslant 0$. Найдем образ этих пар в преобразовании (1.1):

$$A + BW_1 = \begin{pmatrix} I_p & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ v_{qp} & I_q \end{pmatrix} \begin{pmatrix} w_{11} & w_{12} \\ w_{21} & w_{22} \end{pmatrix} =$$

$$= \left(\frac{I_p}{v_{qp}\tilde{w}_{11} + \tilde{w}_{21}} \middle| \frac{0}{v_{qp}\tilde{w}_{12} + \tilde{w}_{22}} \right); \; (A + BW_1)^{-1} =$$

$$= \left(\frac{I_p}{-(v_{qp}\tilde{w}_{12} + \tilde{w}_{22})^{-1} \cdot (v_{qp}\tilde{w}_{11} + \tilde{w}_{21})} \middle| \frac{0}{v_{qp}\tilde{w}_{12} + \tilde{w}_{22}} \right); \; (A + BW_1)\cdot(-J) =$$

$$= \begin{pmatrix} I_p & 0 \\ -(v_{qp}\tilde{w}_{11} + \tilde{w}_{21}) & (v_{qp}\tilde{w}_{12} + \tilde{w}_{22}) \end{pmatrix}$$

Следовательно,

$$\Omega(b, \lambda; v_{qp}) = -i(A + BW_1)^{-1} \times (A - BW_1) J =$$

$$= \left(\frac{iI_p}{-2i(v_{qp}\tilde{w}_{12} + \tilde{w}_{22})^{-1} \times (v_{qp}\tilde{w}_{11} + \tilde{w}_{12}} \middle| \frac{0}{iI_q} \right).$$

Аналогично находим

$$\Omega(b, \lambda; v_{qp}) = iJ(A_1 - WB_1) \times (A_1 + WB_1)^{-1} =$$

$$= \left(\frac{iI_p}{-2i(w_{21} + w_{22}v_{qp}) \times (w_{11} + w_{12}v_{qp})^{-1}} \middle| \frac{0}{iI_q} \right).$$

Итак, образ пар (3.1) в преобразовании (1.1) имеет вид

$$\Omega(b, \lambda; v_{pq}) = \begin{pmatrix} iI_p & 0 \\ -2iV_{qp}(b, \lambda; v_{qp}) & iI_q \end{pmatrix}; \tag{3.2}$$

$$V_{qp}^{-}(b_n, \lambda, b_{qp}) = (v_{qp}\tilde{w}_{12} + \tilde{w}_{22})^{-1} \times (v_{qp}\tilde{w}_{11} + \tilde{w}_{21}) = (w_{21} + w_{22}v_{qp}) \times (w_{11} + w_{12}v_{qp})^{-1}. \tag{3.3}$$

Преобразование (3.3) отображает единичный матричный круг в себя. Обозначим через $S_W(b)$ множество всех функций вида (3.3). С ростом b множества убывают, и пусть $S_W(\infty) = \bigcap\limits_{0<b<\infty} S_W(b)$.

В силу теоремы 1 для параметризации $S_W(\infty)$ достаточно подставить в формулы (1.9), (1.10) пары (3.1). При $J=J_{pq}$ целесообразно предельную матрицу $\Omega(\lambda)$ отобразить в сжатие. Пусть

$$S(\lambda)=(I-i\Omega(\lambda))^{-1}(I+i\Omega(\lambda))=\begin{pmatrix}s_{11}(\lambda) & s_{12}(\lambda)\\ s_{21}(\lambda) & s_{22}(\lambda)\end{pmatrix}. \qquad (3.4)$$

Выясним структуру матрицы $S(\lambda)$. Так как $\operatorname{Im}\Omega(\lambda)>0$, то $I-S(\lambda)S^*(\lambda)=(I-i\Omega(\lambda))^{-1}4\operatorname{Im}\Omega(\lambda)(I-i\Omega(\lambda)^{-1*}>0$. Получим $I+S(\lambda)=2[I-i\Omega(\lambda)]^{-1}=\left[\frac{1}{2}(I-J)-iZ(\lambda)\right]^{-1}=\left[\frac{1}{2}(I+J)-iZ_1(\lambda)\right]^{-1}$. Откуда следует, что $Z(\lambda)=i\left[(I+S)^{-1}-\frac{1}{2}(I-J)\right]=i(I+S)^{-1}\times\left[I-(I+S)\frac{1}{2}(I-J)\right]=i(I+S)^{-1}\times\left[\frac{1}{2}\times(I+J)-S\frac{1}{2}(I-J)\right]=i(I+S)^{-1}\begin{pmatrix}-s_{11} & 0\\ -s_{21} & I_q\end{pmatrix}$.

$$\text{Итак, } Z(\lambda)=i(I+S)^{-1}\times\begin{pmatrix}-s_{11} & 0\\ -s_{12} & I_q\end{pmatrix}. \qquad (3.5)$$

Аналогично находим, что $Z_1(\lambda)=i(I+S)^{-1}\begin{pmatrix}I_p & -s_{12}\\ 0 & -s_{22}\end{pmatrix}$. (3.6)

Из (3.5), (3.6) и теоремы 1 следует, что $\operatorname{def}s_{11}(\lambda)=\operatorname{def}Z(\lambda)=\operatorname{def}R^2(\lambda)=d$ для $\lambda\in G\setminus E$; $0\leqslant d\leqslant p$; $\operatorname{def}S_{22}(\lambda)=\operatorname{def}Z_1(\lambda)=\operatorname{def}R_1^2(\lambda)=d_1$ для $\lambda\in G\setminus E_1$; $0\leqslant d_1\leqslant q$ **(3.7)**. Теперь подставим в формулу (1.9) вместо $Z(\lambda)$ и $Z_1(\lambda)$ их значения (3.5), (3.6). Левая часть (1.9) в силу (3.2) и теоремы 1 примет вид

$$\frac{iJ+\Omega(\lambda;\ v_{qp}(\lambda))}{2}=\begin{pmatrix}0 & 0\\ -iV_{qp}(\lambda,v_{qp}) & iI_q\end{pmatrix}. \qquad (3.8)$$

Учитывая однородность правой части (1.9) относительно $Z(\lambda)$ и $Z_1(\lambda)$, правая часть (1.9) примет следующий вид:

$$iJA_1[Z(\lambda)A_1+Z_1(\lambda)B_1]^{-1}Z(\lambda)=$$
$$=i\begin{pmatrix}0&0\\0&I_q\end{pmatrix}\left[\begin{pmatrix}-s_{11}&0\\-s_{12}&I_q\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0&0\\0&I_q\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}I_p&-s_{12}\\0&-s_{22}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}I_p&0\\v_{qp}&0\end{pmatrix}\right]^{-1}\times\begin{pmatrix}-s_{11}&0\\-s_{21}&I_q\end{pmatrix}=$$
$$=i\begin{pmatrix}0&0\\0&I_q\end{pmatrix}\begin{pmatrix}I_p-s_{12}v_{qp}&0\\-s_{22}v_{qp}&I_q\end{pmatrix}^{-1}\times\begin{pmatrix}-s_{11}&0\\-s_{21}&I_q\end{pmatrix}=$$
$$=i\begin{pmatrix}0&0\\0&I_q\end{pmatrix}\left(\begin{array}{c|c}\dfrac{(I_p-s_{12}v_{qp})^{-1}}{s_{22}v_{qp}(I_p-s_{12}v_{qp})^{-1}} & \dfrac{0}{I_q}\end{array}\right)\times\begin{pmatrix}-s_{11}&0\\-s_{21}&I_q\end{pmatrix}=$$
$$=\left(\begin{array}{c|c}\dfrac{0}{-i[s_{21}+s_{22}v_{qp}(i_p-s_{12}v_{qp})^{-1}s_{11}} & \dfrac{0}{iI_q}\end{array}\right)=\begin{pmatrix}0&0\\-iV_{qp}&iI_q\end{pmatrix}.$$

Итак, $V_{qp}(\lambda,v_{qp})=s_{21}(\lambda)+s_{22}(\lambda)v_{qp}(\lambda)[I-s_{12}(\lambda)v_{qp}(\lambda)]^{-1}s_{11}(\lambda)$. Положим $v_{qp}(\lambda)\equiv0$, тогда $V_{qp}(\lambda,0)=s_{21}(\lambda)$; $V_{qp}(\lambda),v_{qp})=V_{qp}(\lambda,$

0) $+ s_{22}(\lambda) v_{qp}(\lambda)(I_p - S_{12}(\lambda) v_{qp}(\lambda))^{-1} s_{11}(\lambda)$ **(3.9)**. Формулы (3.9) устанавливают параметризацию класса $\boldsymbol{S}_W(\infty)$. Итак, доказана теорема 3.

Теорема 3. *Пусть монотонное семейство $W(b, \lambda)$ нормировано в точке $\lambda_0 \overline{\in} E \cup E_1$ к матрице (1.3) либо к J-модулю, Если из компактного множества функций $\Omega(b, \lambda) = iJ(I - W(b, \lambda))^{-1} \times (I + W(b, \lambda))$ выделить сходящуюся последовательность $\Omega(b_n, \lambda)$ и $\lim\limits_{b_n \to \infty} \Omega(b_n, \lambda) = \Omega(\lambda)$, то матрица-функция*

$$S(\lambda) = (I - i\Omega(\lambda))^{-1}(I + i\Omega(\lambda)) = \begin{pmatrix} s_{11}(\lambda) & s_{12}(\lambda) \\ s_{21}(\lambda) & s_{22}(\lambda) \end{pmatrix}$$

обладает свойствами $\operatorname{def} s_{11}(\lambda) = \operatorname{def} R^2(\lambda) = d$ для $\lambda \in G \setminus E$, $0 \leqslant d \leqslant p$; $\operatorname{def} s_{22}(\lambda) = \operatorname{def} R_1^2(\lambda) d_1$ *для* $\lambda \in G \setminus E_1$, $0 \leqslant d_1 \leqslant q$ **(3.10)**. *При фиксированном сжатии $v_{qp}(\lambda)$ матрица $V_{qp}(b_n, \lambda, v_{qp})$, определяемая формулой (3.3) при $b_n \to \infty$, имеет предел (3.9). Матрицами (3-9) исчерпывается класс $\boldsymbol{S}_W(\infty)$.*

Следствие. *На аналитическом q-мерном подпространстве векторов размерности d_1, удовлетворяющих условию $f(\lambda) s_{22}(\lambda) = 0$, все функции класса $S_W(\infty)$ совпадают с $s_{21}(\lambda)$. На аналитическом p-мерном подпространстве (столбцовых векторов) размерности d, удовлетворяющих условию $s_{11}(\lambda) \hat{g}(\lambda) = 0$, все функции класса $\boldsymbol{S}_W(\infty)$ совпадают с $s_{21}(\lambda)$. Если $d_1 = q$, либо $d = p$, имеет место единственность.*

В. П. Потапов в 1971 году показал, что частичное произведение элементарных множителей Бляшке—Потапова с проектором полного ранга адекватно матричной проблеме Неванлинна—Пика, и дал конструкцию построения этой проблемы с наперед заданными дефектами радиусов предельного матричного круга d и d_1. Однако описание решений этой задачи им дано не было. Позже эта работа была опубликована в [8]. В данной статье теорема 2 дает описание решений этой задачи.

И. П. Федчина показала, что частичное произведение элементарных множителей Бляшке—Потапова с проекторами любого ранга адекватно касательной проблеме Неванлинна—Пика. Однако описание решений в целом при произвольной расходимости произведения Бляшке—Потапова ею не получено [9].

Теорема 3 дает описание решений этой задачи при произвольных дефектах радиусов предельного матричного круга.

Заметим, что теоремы 1—3 установлены для произвольного монотонного семейства.

Список литературы: 1. *Аткинсон Ф. В.* Дискретные и непрерывные граничные задачи.— М.: Мир, 1968. 2. *Ахиезер Н. И.* Классическая проблема моментов. — М.: Физматгиз, 1961.— 310 с. 3. *Орлов С. А.* О сходимости и характере расходимости монотонных семейств j-сжимающих матриц-функций.— Докл. АН Арм ССР, 1974, 59, № 4, с. 193—198. 4. *Орлов С. А.* Гнездящиеся матричные круги, аналитически зависящие от параметра, и теоремы об инвариантности рангов радиусов предельных матричных кругов.— Изв. АН СССР. Сер. математики, 1976, **40**, № 3, п. 593—694. 5. *Орлов С. А.* Об индексе дефекта линейных дифференциальных операторов.— Докл. АН СССР, 1953, **92**, № 3, с. 483—486. 6. *Орлов С. А.* К теории резольвенты одномерной регулярной краевой задачи.— Докл. АН СССР, 1956, **3**, № 3, с. 532—541. 7. *Орлов С. А.* Конструкция резольвент и спектральных функций одномерных линейных самосопряженных сингулярных дифференциальных операторов n-го порядка.— Докл. АН СССР, 1956, **3**, № 6, с. 1175—1177. 8. *Потапов В. П., Ковалишина И. В.* Радиусы круга Вейля в матричной проблеме Неванлинна—Пика.— Теория операторов в функцион. пространствах и ее прил., 1981, с. 25—49. 9. *Федчина И. П.* Описание решений касательной проблемы Неванлинна—Пика.— Докл. АН АрмССР, 1975, **60**, № I, с. 37—42.

Поступила в редколлегию 12. 06. 82.