УДК 513.77

В. Ц. ЛЕВЕНТАЛЬ

ВЗАИМНОЕ РАСПОЛОЖЕНИЕ МНОГОГРАННЫХ КОНУСОВ И СВЯЗАННЫЕ С НИМ СВОЙСТВА СИММЕТРИЧЕСКИХ МАТРИЦ

Пусть $X = \{x_1, \ldots, x_n\}$ — линейно независимая система векторов в E_n (в дальнейшем называемая просто системой). Будем говорить, что X остроугольна, если $(x_i, x_j) \geqslant 0$, $i \neq j$, $i, j =$

$=\overline{1,\ n}$; тупоугольна, если для любых различных i, j выполнено противоположное неравенство; прямоугольна, если x_i ортогональны друг другу. Конус $C(x)$, порожденный системой X, будем также называть остро-, тупо- и прямоугольным. Назовем систему $Y=\{y_1,\ \ldots,\ y_n\}$ сопряженной с X, если $C(Y)$ совпадает с сопряженным конусом $C^*(X)$.

Одним из результатов работы [1] будет

Лемма 1. *Любой тупоугольный конус содержит некоторый прямоугольный конус.*

Эта лемма делала правдоподобными следующие гипотезы:

Гипотеза 1. *Обозначим через $x\hat{}y$ угол между парой векторов в E_n, понимаемый в обычном евклидовом смысле. Пусть $X=\{x_1,\ \ldots,\ x_n\}$ и $Y=\{y_1,\ \ldots,\ y_n\}$ — две системы в E_n, причем $\min\limits_{i,\ j} x_i\hat{}x_j \geqslant \max\limits_{i,\ j} y_i\hat{}y_j$.*

Тогда существует такой ортогональный оператор U, что $UY\subset C(X)$.

Гипотеза 2. *Любой остроугольный конус в E_n содержится в некотором прямоугольном конусе.*

Однако эти гипотезы оказываются неверными. В статье будут построены примеры, опровергающие их, и попутно получены некоторые результаты, касающиеся знакоопределенности элементов симметрических положительно определенных вещественных матриц.

Пример, опровергающий гипотезу 1. Он строится уже при $n=3$. Пусть x_1, x_2, x_3 — такие нормированные вектора в E_3, что точки 0, x_1, x_2, x_3 соответствуют вершинам правильного тетраэдра, т. е. $\|x_i-x_j\|=1$, $i\neq j$, i, $j=\overline{1,\ 3}$. При этом $x_i\hat{}x_j=\frac{\pi}{3}$, $i\neq j$, i, $j=\overline{1,\ 3}$.

Пусть x_0 — проекция x_1 на подпространство, порожденное векторами x_2 и x_3. Тогда $x_0\hat{}x_1=\arccos\frac{1}{\sqrt{3}}<\frac{\pi}{3}$; $x_0\hat{}x_2=\frac{\pi}{6}$.

Положим теперь $X=\{x_1,\ x_2,\ x_3\}$; $Y=\{y_1,\ y_2,\ y_3\}$, где $y_1=x_1$; $y_2=x_2$; $y_3=x_0+\alpha x_0-x_1$, где $\alpha>0$ выбрано столь малым, чтобы выполнялись неравенства $x_0\hat{}x_1<y_1\hat{}y_3<\frac{\pi}{3}$; $y_2\hat{}y_3<\frac{\pi}{3}$.

Покажем, что для любого ортогонального оператора U $UY\subset C(X)$ **(1)**.

Действительно, так как для любых z, $z'\in C(X)$, не совпадающих с крайними направлениями $C(X)$, выполнено $z\hat{}z'<\frac{\pi}{3}$, то невыполнение (1) означает, что Uy_1 и Uy_2 совпадают с какой-то парой векторов из X, откуда в силу симметрии следует, что $Uy_3\overline{\in}C(X)$.

Пример, опровергающий гипотезу 2. Его построить сложнее, так как при $n=3$ гипотеза, как не трудно убедиться, выполнена: пусть система $X=\{x_1, x_2, x_3\}$ остроугольна и пусть x_3' — проекция вектора x_3 на подпространство, порожденное x_1 и x_2. Так как все углы $x_1\hat{}x_2$, $x_1\hat{}x_3'$, $x_2\hat{}x_3'$ не тупые, то, вложив максимальный из этих углов в прямой угол между некоторыми векторами y_1 и y_2 и выбрав в качестве y_3 вектор, ортогональный y_1 и y_2, и такой, что $(x_3, y_3)\geqslant 0$, получим, что $X\subset C(Y)$, где система Y прямоугольна.

Для построения контрпримера при $n=5$ нам понадобятся два вспомогательных утверждения:

Лемма 2. *Пусть Y — прямоугольная система, $x, x'\in C(Y)$. Тогда $(x, x')\geqslant 0$.*

Доказательство очевидно.

Лемма 3. *Пусть Y — прямоугольная система в E_n, $x_1, \overline{\ldots,}$ $x_r\in C(Y)$, причем $x_i\neq 0$, $i=\overline{1, 2}\,(x_i, x_j)=0$ $i\neq j$, $i, j=\overline{1, r}$* **(2).** *Тогда не менее $2r-n$ векторов x_i совпадают с крайними направлениями $C(Y)$.*

Доказательство. Так как $x_i\in C(Y)$, то

$$x_i=\sum_{k=1}^{n}\alpha_{ik}y_k;\quad \alpha_{ik}\geqslant 0;\ i=\overline{1, r} \tag{3}$$

откуда, учитывая (2) и попарную ортогональность y_k, имеем $0=$ $=(\sum_{k=1}^{n}\alpha_{ik}y_k, \sum_{k=1}^{n}\alpha_{jk}y_k)=\sum_{k=1}^{n}\alpha_{ik}\alpha_{jk}(y_k, y_k)$, откуда, в силу неотрицательности α_{ik}, следует, что множества $R_i=\{k\in\{1, \ldots, n\}\times$ $\times\,|\,\alpha_{ik}>0\}$ $i=\overline{1, r}$ попарно не пересекаются. А так как $\bigcup_{i=1}^{r}R_i\subset\{1, \ldots, n\}$, то, обозначая через L количество одноэлементных множеств R_i, т. е. число x_i, совпадающих с крайними направлениями $C(Y)$, получаем $L+2(r-L)\leqslant n$ или $L\geqslant 2r-n$.

Рассмотрим теперь систему $X=\{x_1, x_2, x_3, x_4, x_5\}\subset F_5$, где $x_1=(1, 0, 0, 0, 0)$; $x_2=(0, 2, 1, 0, 0)$; $x_3=(0, 0, 0, 2, 1)$; $x_4=(1, 1, -1, 1, -1)$; $x_5=\left(1, 0, \frac{1}{2}, 0, \frac{1}{2}\right)$.

Пусть $X\subset C(Y)$ для некоторой прямоугольной системы Y. Тогда в силу попарной ортогональности векторов x_1, x_2, x_3 хотя бы один из них совпадает с крайним направлением $C(Y)$. Для этого вектора x_i по лемме 2 должно выполняться $(P_ix_4, P_ix_5)\geqslant$ $\geqslant 0$ **(4)**, где P_i — оператор ортогонального проектирования на подпространство, ортогональное x_i. Однако несложные подсчеты показывают, что $(P_1x_4, P_1x_5)=-1$; $(P_2x_4, P_2x_5)=(P_3x_4, P_3x_5)=$ $=-\frac{1}{10}$ и, таким образом, гипотеза 2 в E_5, а следовательно, как нетрудно показать, и в E_n при $n>5$, не выполняется.

Докажем теперь одно следствие леммы 1:

Теорема 1. *Пусть* $A=(a_{ij})_{i,\,j=1}^{n}$ — *симметрическая положительно определенная вещественная матрица, все внедиагональные элементы которой неположительны. Тогда все элементы матрицы* $B=A^{-1}=(b_{ij})_{i,\,j=1}^{n}$ *неотрицательны.*

Доказательство. Заметим, что матрицу A можно представить в виде матрицы Грамма, например, системы столбцов X матрицы $\sqrt{A}$, причем система X тупоугольна. Покажем, что $B=A^{-1}$ — матрица Грамма системы $Y=\{y_1, \ldots, y_n\}$, сопряженной с X. Нормируя y_i подходящим образом, можно добиться, чтобы они были решениями систем уравнений (с учетом симметричности матрицы $\sqrt{A}$): $\sqrt{A}y_i=e_i$ $i=\overline{1,\,n}$, где e_i — орты стандартного базиса, откуда $(y_i,\,y_j)=(A^{-1/2}e_i;\ A^{-1/2}e_j)=(e_i,\,A^{-1}e_j)=$ $=b_{ij}$ $i,\,j=\overline{1,\,n}$.

Пусть теперь X_0 — прямоугольная система, такая что $X_0 \subset$ $\subset C(X)$.

Тогда $C(X_0)\subset C(X)$, и, следовательно, $C(Y)=C^*(X)\subset$ $\subset C^*(X_0)=C(X_0)$, откуда в силу леммы 2 $b_{ij}=(y_i,\,y_j)\geqslant 0$ $i,$ $j=\overline{1,\,n}$.

Докажем еще одно утверждение относительно знаков элементов функций от симметрических положительно определенных матриц.

Теорема 2. *Пусть все элементы симметрической положительно определенной матрицы A неотрицательны, а функции* $\varphi_k(\cdot)$ $(k=1,\,2,\,\ldots)$, *определенные на спектре матрицы A, удовлетворяют условиям: а)* $\varphi_k(\cdot)$ *вогнуты; в)* $\lim\limits_{k\to\infty}\dfrac{\varphi_k(t)}{\varphi_k(t')}=0$ *при* $t'>t$, *с) элементы матриц* $\varphi_k(A)$ $(k=1,\,2,\,\ldots)$ *неотрицательны. Тогда* 1) *для любой неотрицательной, монотонно возрастающей и выпуклой функции* $\varphi(\cdot)$ *все элементы* $\varphi(A)$ *неотрицательны;* 2) *для любой неотрицательной, монотонно убывающей и вогнутой функции* $\varphi(\cdot)$ *внедиагональные элементы* $\varphi(A)$ *неположительны, а диагональные — неотрицательны.*

Доказательство теоремы опирается на следующий факт:

Лемма 4. *Пусть числа* α_i, λ_i $(i=\overline{1,\,n})$ *удовлетворяют условиям* $\sum\limits_{i=1}^{n}\alpha_i=0$ **(5)**; $\lambda_i>0$ **(6)**; $\sum\limits_{i=1}^{n}\alpha_i\lambda_i>0$ **(7)**.

Пусть далее функции $\varphi_k(t)$, *определенные на интервале* $\min\limits_i\lambda_i\leqslant t\leqslant\max\limits_i\lambda_i$ **(8)**, *удовлетворяют условиям а) и в) теоремы и, кроме того,* $\sum\limits_{i+1}^{n}\alpha_i\varphi_k(\lambda_i)\geqslant 0,$ $k=1,\,2,\,\ldots$ **(9)**. *Тогда 1) для любой неотрицательной монотонно возрастающей выпуклой функции* $\varphi(t)$, *определенной на интервале (8):* $\sum\limits_{i=1}^{n}\alpha_i\times$

$\times \varphi(\lambda_i) \geqslant 0$; *2) для любой неотрицательной монотонно убывающей вогнутой функции* $\varphi(t)$, *определенной на интервале (8)*: $\sum_{i=1}^{n} \alpha_i \varphi(\lambda_i) \leqslant 0$.

Доказательство леммы. Докажем утверждение (1). Если все $\alpha_i = 0$, то утверждение тривиально, поэтому можно считать, что для всех i $\alpha_i \neq 0$ $(n \geqslant 2)$ и вести доказательство индукцией по n.

Случай $n = 2$. Пусть $\alpha_1 = -\alpha_2 > 0$. Тогда в силу (7) $\lambda_1 \geqslant \lambda_2$, откуда в силу монотонности $\varphi(\cdot)$ следует нужное неравенство.

Случай произвольного n. Предположим сначала, что среди α_i есть хотя бы два положительных, например, $\alpha_n > 0$, $\alpha_{n-1} > 0$.

Положим $\alpha_i' = \begin{cases} \alpha_i, \ i = \overline{1, \ n-2}; \\ \alpha_{n-1} + \alpha_n, \ i = n-1; \end{cases}$

$$\lambda_i' = \begin{cases} \lambda_i, \ i = \overline{1, \ n-2}; \\ \dfrac{\alpha_{n-1}\lambda_{n-1} + \alpha_n \lambda_n}{\alpha_{n-1} + \alpha_n}, \ n-1. \end{cases} \tag{10}$$

В силу выпуклости $\varphi(\cdot)$ из предположения индукции следует $0 \leqslant \sum_{i=1}^{n-1} \alpha_i' \varphi(\lambda_i') \leqslant \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \varphi(\lambda_i)$ (при этом в силу вогнутости $\varphi_k(\cdot)$ $0 \leqslant \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \varphi_k(\lambda_k) \leqslant \sum_{i=1}^{n-1} \alpha_i' \varphi_k(\lambda_i')$).

Пусть теперь $\alpha_n > 0$, $\alpha_i < 0$ $(i = \overline{1, \ n-1})$. При этом в силу свойства в) последовательности $\{\varphi_k(\cdot)\}$ выполнено $\lambda_n = \max\limits_{1<i<n} \lambda_i$, откуда, учитывая равенство $\alpha_n = -\sum_{i=1}^{n-1} \alpha_i$, имеем $\sum_{i=1}^{n} \alpha_i \varphi(\lambda_i) = \sum_{i=1}^{n-1} \alpha_i (\varphi(\lambda_i) - \varphi(\lambda_n)) \geqslant 0$, что завершает доказательство утверждения 1). Утверждение 2) доказывается аналогично.

Возвращаясь к доказательству утверждения 1) теоремы заметим, что если $U = (U_{ij})_{i, \ j=1}^{n}$ — ортогональная матрица такая, что $A = U'\Lambda U$, где матрица $\Lambda = \mathrm{diag}(\lambda_1, \ \ldots, \ \lambda_n)$, то при $i \neq j$ числа λ_p и $\alpha_p = U_{ip} U_{jp}$ $(p = \overline{1, \ n})$ удовлетворяют условиям леммы 4 и в силу леммы элементы матрицы $\varphi(A)$ $a_{ij}^{(\varphi)} = \sum_{p=1}^{n} \varphi(\lambda_p) u_{ip} u_{jp} \geqslant 0$, $i \neq j$, а неравенство $a_{ij}^{(\varphi)} = \sum_{p=1}^{n} \varphi(\lambda_p) u_{ip}^2 \geqslant 0$ следует из неотрицательности $\varphi(\cdot)$.

Список литературы: 1. *Гурарий В. И., Левенталь В. Ц.* Конечные представительные множества в эвклидовом пространстве. — Сиб. мат. журн., 1983,

24, № 6, с. 112—115. 2. *Гантмахер Ф. Р.* Теория матриц. — М.: Наука, 1967. — 575 с.

Поступила в редколлегию 14.06.82.