УДК 517.547

А. М. КОТОЧИГОВ

ИНТЕРПОЛЯЦИЯ В ПРОСТРАНСТВАХ АНАЛИТИЧЕСКИХ ФУНКЦИЙ, ОПРЕДЕЛЯЕМЫХ МОДУЛЕМ НЕПРЕРЫВНОСТИ

1. Постановка задачи и основные результаты. Задачи интерполяции рассматриваются здесь в духе работы Карлесона [1], положившей начало большому циклу исследований, подробное обсуждение которых можно найти в обзоре [2, 3]. Общая постановка вопроса такова: заданы X пространство функций на множестве D; Y — пространство функций на множестве Λ, $\Lambda \subset D$, требуется описать те множества Λ, сужение на которые всех функций из пространства X порождает пространство Y. Множество Λ, удовлетворяющее этому условию, будем называть интерполяционным для пары пространств (X, Y).

Основная цель статьи — решить задачу интерполяции для классов $X = C_A^\omega$, состоящих из всех аналитических в единичном круге функций, для которых $|f(z) - f(w)| \leqslant c_f \omega(|z - w|)$, здесь z, w — любые точки круга, ω — фиксированный модуль непрерывности. Естественное пространство следов $Y = C^\omega(\Lambda)$, состоит из всех функций φ, заданных на множестве Λ, и таких, что $|\varphi(\lambda) - \varphi(\tau)| \leqslant c_\varphi \omega(|\lambda - \tau|)$, $\lambda, \tau \in \Lambda$. При этом заранее ограничиваемся рассмотрением множеств Λ, удовлетворяющих условию Штольца, т. е. дискретных множеств с одной точкой сгущения ξ, $|\xi| = 1$, таких, что $\sup\left\{\frac{|\xi - \lambda|}{1 - |\lambda|} : \lambda \in \Lambda\right\} < \infty$. Описание интерполяционных множеств удобно проводить в терминах гиперболической метрики $\rho(z, w)$ и кругов в этой метрике (см. определения § 2).

Основной результат работы составляет

Теорема 1. *Пусть ω — произвольный модуль непрерывности, Λ — подмножество круга $\boldsymbol{D}$, $\boldsymbol{D} = \{z : |z| < 1\}$, удовлетворяющее* условию Штольца. Тогда следующие утверждения равносильны: 1°. Λ — интерполяционное множество для пары пространств (C_A^ω, $C_{(\Lambda)}^\omega$). 2°. Существует число ε, $\varepsilon > 0$, такое что а) для любого λ, $\lambda \in \Lambda$, множество $K_\rho(\lambda, \varepsilon) \cap \Lambda$ содержит не более двух элементов; б) для любых λ, τ, $\lambda \neq \tau$, τ, $\lambda \in \Lambda$, выполнено неравенство $\frac{\rho(\lambda, \tau)}{\omega(|\lambda - \tau|)} \omega\left(\frac{|\lambda - \tau|}{\rho(\lambda, \tau)}\right) \geqslant \varepsilon$.

Структура интерполяционного множества оказывается зависящей от свойств модуля непрерывности. Например, если $\omega(x) = x^\alpha$, $0 < \alpha < 1$, то из условия 2° (б) следует, что Λ — редкое множество (см. определение в § 2 и лемму 2). Этот результат был получен в работе автора [4] и усилен Е. М. Дынькиным [5], давшим полное решение задачи без дополнительного условия Штольца. Если $\omega(x) = x$, то интерполяционными, как следует из теоремы 1, являются любые объединения двух редких множеств, удовлетворяющих условию Штольца. Возможны и промежуточные ситуации, для модуля непрерывности $\omega(x) = x \ln \frac{1}{x}$ интерполяционное множество не обязано быть редким, но на сближение пар точек интерполяционного множества имеются ограничения. Здесь будет доказано (теорема 22), что возможность появления у модуля непрерывности ω интерполяционного множества, не являющегося редким, эквивалентна условию $\overline{\lim}_{x \to 0} x\omega'(x)/\omega(x) = 1$. Оказывается, что модули непрерывности, удовлетворяющие этому условию, можно обнаружить «между» любыми двумя неэквивалентными модулями непрерывности (теорема 24).

2. Основные обозначения и определения. Некоторые вспомогательные утверждения.

Единичный круг комплексной плоскости $\{z : |z| < 1\}$ будем обозначать символом $\boldsymbol{D}$.

Гиперболическая метрика в круге $\boldsymbol{D} : \rho(a, b) = \inf_\gamma \int_\gamma \frac{|dz|}{1 - |z|^2}$,

где inf берется по всем путям, соединяющим точки a и b в круге. Круг радиуса ε в гиперболической метрике с центром в точке λ $K_\rho(\lambda, \varepsilon) = \{z : \rho(z, \lambda) < \varepsilon\}$.

Будем использовать ряд стандартных условий на множество Λ, $\Lambda \subset \boldsymbol{D}$. Λ — удовлетворяет условию Штольца (S), если существует комплексное число ξ, $|\xi| = 1$ такое, что

$$\sup\left\{\frac{|\lambda - \xi|}{1 - |\lambda|} : \lambda \in \Lambda\right\} < \infty \tag{S}$$

(для удобства изложения будем считать, что $\xi = 1$). Λ — удовлетворяет условию редкости (R), если $\inf\left\{\left|\frac{\lambda - \tau}{1 - \bar{\lambda}\tau}\right| : \lambda \neq \tau,\ \lambda,\ \tau \in \Lambda\right\} > 0$, (R); Λ — удовлетворяет условию Бляшке $\sum_{\lambda \in \Lambda} (1 - |\lambda|) < \infty$.

Как известно, для множества, удовлетворяющего условию Бляшке, сходятся произведения Бляшке $\prod\limits_{\lambda \in \Lambda} b_\lambda(z)$, где $b_\lambda(z) = \frac{|\lambda|}{\lambda} \frac{\lambda - z}{1 - \bar{\lambda} z}$ — фактор Бляшке.

Модулем непрерывности называем функцию ω, заданную на множестве $[0, \infty)$, такую, что ω непрерывна, не убывает, $\omega(0) = 0$, ω — полуаддитивна, т. е. $\omega(x + y) \leqslant \omega(x) + \omega(y)$.

Пространство C_A^ω состоит из всех аналитических в круге $\boldsymbol{D}$ функций f, непрерывных в его замыкании, для которых конечна норма

$$\|f\| = \sup\{|f(z)| : z \in \boldsymbol{D}\} + \sup\left\{\frac{|f(z) - f(w)|}{\omega(|z - w|)} : z \neq w,\ z,\ w \in \boldsymbol{D}\right\}.$$

Пространство $C^\omega(\Lambda)$ состоит из всех функций φ, заданных на множестве Λ, для которых конечна норма

$$\|\varphi\| = \sup\{\varphi(\lambda)| : \lambda \in \Lambda\} + \sup\left\{\frac{|\varphi(\lambda) - \varphi(\tau)|}{\omega(|\lambda - \tau|)} : \lambda \neq \tau,\ \lambda,\ \tau \in \Lambda\right\}.$$

Здесь Λ — дискретное множество с одной точкой сгущения $z = 1$, $1 \notin \Lambda$, при этом будем писать $\varphi(1)$, полагая $\varphi(1) = \lim_{\lambda \to 1} \varphi(\lambda)$.

Пространство $l^\infty(\Lambda)$ состоит из всех функций ψ, заданных на множестве Λ, для которых конечна норма $\|\psi\| = \sup\{|\psi(\lambda)| : \lambda \in \Lambda\}$.

Символом R_Λ будем обозначать оператор сужения, сопоставляющий функции ее сужение на множество Λ.

Множество Λ назовем интерполяционным для пары пространств $(C_A^\omega,\ C^\omega(\Lambda))$, если $R_\Lambda C_A^\omega = C^\omega(\Lambda)$.

Для обозначения нормы элемента g в пространстве x будем использовать символ $\|g|x\|$.

Если F_1, F_2 — вещественные функции на множестве X, то выражение $F_1(x) \asymp F_2(x)$, $x \in X$, означает, что существуют постоянные c_1 и c_2 такие, что $c_1 F_1(x) \leqslant F_2(x) \leqslant c_2 F_1(x)$ при $x \in X$.

Лемма 2. 1) $\rho(z, w)=\frac{1}{2}\ln\frac{|1-z\bar{w}|+|z-w|}{|1-z\bar{w}|-|z-w|}$, $z, w\in \boldsymbol{D}$; 2) *если* $\rho(z, w)\leqslant\frac{1}{2}$, *то* $\rho(z, w)\asymp\left|\frac{z-w}{1-z\bar{w}}\right|$.

Доказательство (1) см. в [6, с. 423], (2) непосредственно следует из (1).

Лемма 3. *Если множество* Λ *удовлетворяет условию* (*S*) *и* (*R*), *то* $\left|\prod_{\lambda\in\Lambda} b_\Lambda(z)\right|\asymp\inf\left\{\left|\frac{z-\lambda}{1-\bar{\lambda}z}\right|:\lambda\in\Lambda\right\}$, $z\in\boldsymbol{D}$.

Доказательство содержится в работе Васюнина [7, с. 19].

Лемма 4. *Пусть* $|\lambda|<1$, $|z|<2$, $0<\varepsilon<\frac{1}{15}$. *Тогда при* $|1/\lambda-z|\geqslant 8\varepsilon|1-\lambda|$, $|1-\lambda|+|1-z|\geqslant|1-\lambda z|\geqslant\varepsilon(|1-\lambda|+|1-z|)$.

Доказательство. Левое неравенство очевидно, так как при $|\lambda|<1$ $|1-\lambda z|=|1-\lambda+\lambda(1-z)|\leqslant|1-\lambda|+|1-z|$. Если $|\lambda|<1/3$, то с учетом ограничения $|z|\leqslant 2$ получим $|1-\lambda z|\geqslant 1/3\geqslant 1/15(|1-\lambda|+|1-z|)$.

Остается доказать правое неравенство при $1>|\lambda|\geqslant 1/3$. Положим $re^{i\theta}=z-1/\lambda$, где r — положительное число, тогда

$$\frac{|1-\lambda z|}{|1-\lambda|+|1-z|}=\frac{|\lambda|r}{|1-\lambda|+|1/\lambda-1+re^{i\theta}|}\geqslant\frac{|\lambda|r}{2|1-\lambda|+r}.$$

Достаточно показать, что $\varepsilon\leqslant\frac{|\lambda|r}{2|1-\lambda|+r}$, это неравенство эквивалентно неравенству $\frac{2\varepsilon|1-\lambda|}{|\lambda|-\varepsilon}\leqslant r$. А так как $|\lambda|\geqslant 1/3$ и $\varepsilon<1/15$, то последнее неравенство будет выполнено, если $r\geqslant\frac{15}{2}\varepsilon\cdot|1-\lambda|$. Следовательно, требуемое неравенство доказано.

Лемма 5. *Пусть* $T=\{t\}$ — *множество положительных чисел таких, что* $T\subset[0, 2]$ *и число всех точек множества* $T\cap[2^{-k}, 2^{-k+1}]$ *равномерно ограничено при всех* k, $k\geqslant 1$. *Тогда для любых положительных чисел* α *и* β

$$\sup_{0\leqslant a\leqslant 2}\sum_{t\in T}\frac{t^\alpha\cdot a^\beta}{(t+a)^{\alpha+\beta}}<\infty.$$

Доказательство можно провести так же, как в [2, лемма 11.3, с. 37].

Лемма 6. 1) *Пусть* ω — *произвольный модуль непрерывности, тогда существует выпуклый модуль непрерывности* ω^* *такой, что* $\omega(x)\leqslant\omega^*(x)\leqslant 2\omega(x)$.

2) *Если* ω — *выпуклый модуль непрерывности, то* $\alpha\omega(x)\leqslant\omega(\alpha x)\leqslant\omega(x)$, $0\leqslant\alpha\leqslant 1$, $x\geqslant 0$.

Доказательство. (1) см. в монографии [12, с. 154], (2) следует из выпуклости ω и условия $\omega(0)=0$.

В дальнейшем будем рассматривать только выпуклые модули непрерывности, из леммы 6 следует, что это не умаляет общности.

3. План доказательства теоремы 1. Геометрия интерполяционного множества. Конструкция аналитического модуля непрерывности. Доказательству теоремы 1 предпошлем лемму 7, которая содержит необходимые в дальнейшем сведения о структуре множества Λ, удовлетворяющего условию 2° (а) теоремы 1. Затем будет построена функция Ω — аналитический аналог модуля непрерывности ω, ее основное свойство $|\Omega(z)| \asymp \omega(|1-z|)$. Эта функция позволяет при помощи стандартного рассуждения доказать, что в теореме 1 верна импликация $1° \Rightarrow 2°$ (лемма 11). Доказательству обратной импликации посвящен § 4, где строится оператор продолжения, сопоставляющий функции φ, $\varphi \in c^{\omega}(\Lambda)$, функцию f, $f \in C_A^{\omega}$ так, что $f(\lambda) = \varphi(\lambda)$, $\lambda \in \Lambda$, и доказывается, что этот оператор непрерывен, если множество Λ удовлетворяет условию 2° теоремы 1.

Лемма 7. *Пусть Λ — подмножество круга* $\boldsymbol{D}$, *удовлетворяющее условию* (S). *Тогда следующие утверждения равносильны:* 1) *существует число* ε, $\varepsilon > 0$, *такое, что для любого* λ, $\lambda \in \Lambda$, *множество* $K_\rho(\lambda, \varepsilon) \cap \Lambda$ *содержит не более двух элементов;* 2) $\Lambda = \Lambda_1 \cup \Lambda_2$, *где* Λ_1 *и* Λ_2 — *дизъюнктные редкие множества;* 3) *существует число* δ, $\delta > 0$, *такое, что для любого* λ, $\lambda \in \Lambda$, *существует* λ^*, $\lambda^* \in \Lambda$ *такой, что* $\prod\limits_{\tau \in \Lambda \setminus \{\lambda^*, \lambda\}} |b_\tau(\lambda)| > \delta$.

Доказательство. По лемме 2 условие редкости равносильно возможности покрыть множество системой дизъюнктных гиперболических кругов постоянного радиуса. Следовательно, $(2) \Rightarrow (1)$.

С другой стороны, в лемме 3.1 [8, с. 11] доказано, что в условии (1) можно уменьшить ε так, что любые три круга из совокупности $K_\rho(\lambda, \varepsilon)$, $\lambda \in \Lambda$, не будут иметь общих точек. Таким образом, $(1) \Rightarrow (2)$.

По лемме 2 из условия $\tau \notin K_\rho(\lambda, \varepsilon)$ следует $|b_\tau(\lambda)| \geqslant \delta$, $\delta = \delta(\varepsilon)$. Если выполнено условие (1), то для любого λ, $\lambda \in \Lambda$, $K_\rho(\lambda, \varepsilon) \cap \Lambda \subset \{\lambda^*, \lambda\}$. Применяя лемму 3, получим $\left|\prod\limits_{\tau \in \Lambda \setminus \{\lambda^*, \lambda\}} b_\lambda(\tau)\right| \geqslant \delta_1 \cdot \inf\limits_{\tau \neq \lambda^*, \lambda} |b_\lambda(\tau)| \geqslant \delta_1 \delta$. Следовательно, $(1) \Rightarrow (3)$.

Если выполнено условие (3), то эквивалентность леммы 2, $|b_\tau(\lambda)| \asymp \rho(\lambda, \tau)$ при $\rho(\lambda, \tau) \leqslant 1/2$ гарантирует, что при достаточно малом ε, $K_\rho(\lambda, \varepsilon) \cap \Lambda \subset \{\lambda^*, \lambda\}$. Т. е. $(3) \Rightarrow (1)$.

В дальнейшем нам потребуется следующее стандартное разбиение, фактически построенное в лемме. Если множество Λ удовлетворяет условиям (S) и 2° (а) теоремы 1, то существует число ε, $\varepsilon > 0$, и множества Λ_1 и Λ_2, дизъюнктные и редкие такие, что 1) $\Lambda = \Lambda_1 \cup \Lambda_2$; 2) круги $K_\rho(\lambda, \varepsilon)$, $\lambda \in \Lambda_1$, дизъюнктны; 3) для любого λ, $\lambda \in \Lambda_1$, множество $K_\rho(\lambda, \varepsilon) \cap \Lambda_2$ содержит не более одной точки; 4) $\Lambda_2 \subset \bigcup_{\lambda \in \Lambda_1} K_\rho(\lambda, \varepsilon)$ **(1)**.

Аналитический эквивалент модуля непрерывности удобно ввести в полуплоскости и затем конформно пересадить в область, содержащую круг. Возникающий при этом запас аналитичности позволяет легко получить оценку для производной рассматриваемой функции.

Определение 8. *Пусть* ω — модуль непрерывности.

$$\Omega_1(\zeta) = \exp\left\{\frac{1}{\pi i} \int\limits_{-\infty}^{\infty} \left(\frac{1}{t-\zeta} - \frac{t}{1+t^2}\right) \ln \omega(t^2)\, dt\right\},$$

$$\Omega(z) = \Omega_1(\zeta), \quad \zeta = i\sqrt{1-z}.$$

Здесь рассматривается ветвь корня, определенная в плоскости с разрезом по отрицательной части вещественной оси, и такая, что $\sqrt{1} = 1$.

Лемма 9. *Пусть ω — выпуклый модуль непрерывности. Тогда существует число A такое, что* $1/A\, \omega(|1-z|) \leqslant |\Omega(z)| \leqslant A\omega(|1-z|)$, $|\arg(z-1)| > \frac{\pi}{4}$.

Доказательство. Из определения функции Ω_1 следует, что

$$\ln|\Omega_1(\zeta)| = \frac{\operatorname{Im}\zeta}{\pi} \int\limits_{-\infty}^{\infty} \ln\omega(t^2) \frac{dt}{|\zeta - t|^2}.$$

А так как $\frac{\pi}{\operatorname{Im}\zeta} \int\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{dt}{|\zeta - t|^2}$, то при $\operatorname{Im}\zeta > 0$. $\ln|\Omega_1(\zeta)/\omega(|\zeta|^2)| =$

$= \frac{\operatorname{Im}\zeta}{\pi} \int\limits_{-\infty}^{\infty} \ln(\omega(t^2)/\omega(|\zeta|^2)) \frac{dt}{|\zeta \leqslant t|^2}$, $\ln|\Omega_1(\zeta)/\omega(|\zeta|^2)| \leqslant \frac{\operatorname{Im}\zeta}{\pi} \times$

$\times \int\limits_{-\infty}^{\infty} |\ln(\omega(t^2)/\omega(|\zeta|^2))| \frac{dt}{|\zeta - t|^2}$.

Воспользуемся неравенством $\frac{\omega(a)}{a} \leqslant \frac{\omega(b)}{b}$ при $a \geqslant b > 0$ (лемма 6), из которого следует, что при $t^2 \geqslant |\zeta|^2$ выполнено неравенство $0 \leqslant \ln(\omega(t^2)/\omega(|\zeta|^2)) \leqslant 2\ln(|t|/|\zeta|)$; и при $t^2 \leqslant |\zeta|^2$, $0 \geqslant \geqslant \ln(\omega(t^2)/\omega(|\zeta|^2)) \geqslant 2\ln(|t|/|\zeta|)$.

Поэтому $|\ln(\Omega_1(\zeta)/\omega(|\zeta|^2))| \leqslant \frac{\operatorname{Im}\zeta}{\pi} \int\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{2|\ln|t/\zeta||}{|t-\zeta|^2} dt$.

Положим $t = v|\zeta|$, $\varphi = \arg\zeta$, тогда $|\ln(\Omega_1(\zeta)/\omega(|\zeta|^2))| \leqslant$

$\leqslant \frac{2}{\pi} \sin\varphi \int\limits_{-\infty}^{\infty} |\ln|v|| \frac{dv}{|v - e^{i\varphi}|^2} \leqslant \frac{8}{\pi} \int\limits_{1}^{\infty} \ln v \frac{dv}{1+v^2} = B.$

Следовательно, $e^{-B}\omega(|\zeta|^2) \leqslant |\Omega_1(\zeta)| \leqslant e^B\omega(|\zeta|^2)$, $\operatorname{Im}\zeta > 0$. Переходя к функции $\Omega(z) = \Omega_1(\zeta)$, $\zeta = i\sqrt{1-z}$, $|\arg(z-1)| > \frac{\pi}{4}$, будем иметь $1/A\,\omega(|1-z|) \leqslant |\Omega(z)| \leqslant A\omega(|1-z|)$, где $A = e^B$.

Следствие 10. $|\Omega'(z)| \leqslant A_1 \frac{\omega(|1-z|)}{|1-z|}$, $|\arg(z-1)| > \frac{\pi}{3}$.

Доказательство. Фиксируем точку z, $|\arg(z-1)| > \frac{\pi}{3}$ и рассмотрим окружность $\Gamma = \left\{w : |w-z| = \frac{1}{4}|1-z|\right\}$. Очевидно, что $\Gamma \subset \left\{w : |\arg(w-1)| > \frac{\pi}{4}\right\}$ и $|1-w| \leqslant 2|1-z|$ при $w \in \Gamma$, тогда на основании лемм 9, 6 получим $|\Omega(w)| \leqslant A\omega(|1-w|) \leqslant$ $\leqslant 2A\omega(|1-z|)$, $w \in \Gamma$. Следовательно,

$$|\Omega'(z)| = \frac{1}{2\pi}\left|\int_\Gamma \Omega(w)\frac{dw}{(w-z)^2}\right| \leqslant \frac{A}{\pi}\omega(|1-z|)\int_\Gamma \frac{16\,|dw|}{|1-z|^2} = 32A \times$$

$$\times \frac{\omega(|1-z|)}{|1-z|}.$$

В следующей лемме будет установлено необходимое условие интерполяции для пары пространств $(C_A^\omega, C^\omega(\Lambda))$, т. е. доказано, что $1° \to 2°$.

Лемма 11. *Пусть Λ — дискретное подмножество круга D. Если оператор сужения R_Λ отображает пространство C_A^ω на пространство $C^\omega(\Lambda)$, то множество Λ удовлетворяет условию 2° теоремы 1.*

Доказательство. Из условия леммы и теоремы об открытом отображении [9, с. 60] следует существование постоянной c и семейства функций $\{f_\lambda\}_{\lambda \in \Lambda}$ таких, что $\|f_\lambda | C_A^\omega\| \leqslant c\|R_\lambda f_\lambda | C^\omega(\Lambda)\|$; $f_\lambda(\tau) = 0$; $\tau \in \Lambda \setminus \{\lambda\}$; $f_\lambda(\lambda) = 1$; $\lambda \in \Lambda$.

Фиксируем точку λ; $\lambda \in \Lambda$ и возьмем точку λ^*, $\lambda^* \in \Lambda \setminus \{\lambda\}$ такую, что $|\lambda - \lambda^*| < 2\inf\{|\lambda - \tau| : \tau \in \Lambda \setminus \{\lambda\}\}$. Заметим, что $\|R_\Lambda f_\lambda | C^\omega(\Lambda)\| \leqslant \frac{2}{\omega(|\lambda-\lambda^*|)}$. Следовательно, $|f_\lambda(z)| \leqslant \|f_\lambda | C_A^\omega\| \times$ $\times\,\omega(|z-\lambda^*|) \leqslant \frac{2c\omega(|z-\lambda^*|)}{\omega(|\lambda-\lambda^*|)}$, $z \in D$.

Функция f_λ допускает факторизацию $f_\lambda = g_\lambda B_\lambda$, где $B_\lambda =$ $= \prod_{\tau \in \Lambda \setminus \{\lambda\}} b_\tau$, $b_\tau(z) = \frac{|\tau|}{\tau}\frac{\tau - z}{1 - \bar{\tau}z}$. Так как $|B_\lambda(z)| = 1$ и $|z - \lambda^*| =$ $= |1 - \bar{\lambda}^* z|$ при $|z| = 1$, то $|g_\lambda(z)| = f_\lambda(z)| \leqslant 2c\frac{\omega(|1-\lambda^* z|)}{\omega(|\lambda-\lambda^*|)}$ при $|z| = 1$. Используя оценку леммы 9 $\omega(|1-\bar{\lambda}^* z|) \leqslant c_1|\Omega(z\bar{\lambda}^*)|$, получим

$$|g_\lambda(z)/\Omega(z\bar{\lambda}^*)| \leqslant \frac{2cc_1}{\omega(|\lambda-\lambda^*|)} \text{ при } |z| = 1. \tag{2}$$

Очевидно, что функция f_λ, а вместе с ней и функция g_λ входят в класс H^∞. Из определения функции Ω и леммы 9 легко получить, что функция $1/\Omega$ входят в класс $H^{1/2}$. Следовательно, по теореме Смирнова [10, с. 393] неравенство (2) означает, что функция $g_{\lambda/}{}^{\Omega}$ входит в класс H^∞ и к ней применим принцип максимума. В частности, неравенство (2) справедливо при $z=\lambda$:

$$|g_\lambda(\lambda)/\Omega(\lambda\bar{\lambda}^*)| \leqslant \frac{2cc_1}{\omega(|\lambda-\lambda^*|)}. \tag{3}$$

Заметим, что $g_\lambda(\lambda) = f_\lambda(\lambda)/B_\lambda(\lambda) = 1/B_\lambda(\lambda)$ и по лемме 9 $|\Omega(\lambda\bar{\lambda}^*)| \leqslant c_1\omega(|1-\lambda\bar{\lambda}^*|)$. Таким образом, неравенство (3) можно переписать в виде

$$\Bigg(\prod_{\tau\in\Lambda\diagdown\{\lambda^*,\lambda\}} |b_\tau(\lambda)|\Bigg)\left(\frac{|\lambda-\lambda^*|}{|1-\bar{\lambda}^*\lambda|}\frac{\omega(|1-\bar{\lambda}^*\lambda|)}{\omega(|\lambda-\lambda^*|)}\right) \geqslant \frac{1}{2cc_1^2}.$$

Так как модуль произведения Бляшке не превосходит единицы, а из неравенства $|\lambda-\lambda^*| \leqslant |1-\bar{\lambda}^*\lambda|$ и леммы 6 следует, что второй сомножитель в неравенстве тоже меньше единицы, то выполнены неравенства

$$\prod_{\tau\in\Lambda\diagdown\{\lambda^*,\lambda\}} |b_\tau(\lambda)| \geqslant 1/2cc_1^2; \quad \frac{|\lambda-\lambda^*|}{|1-\bar{\lambda}^*\lambda|}\frac{\omega(|1-\bar{\lambda}^*\lambda|)}{\omega(|\lambda-\lambda^*|)} \geqslant 1/2cc_1^2.$$ Первое из этих неравенств совпадает с неравенством 2° (а) теоремы 1, а второе эквивалентно неравенству 2° (б) для точек λ и λ^*, так как по лемме 2 $\rho(\lambda,\ \lambda^*) \asymp \frac{|\lambda-\lambda^*|}{|1-\bar{\lambda}^*\lambda|}$ и далее по лемме 6 $\omega(|1-$ $-\bar{\lambda}^*\lambda|) \asymp \omega\left(\frac{|\lambda-\lambda^*|}{|1-\lambda,^*\lambda|}\right)$. Остается заметить, что условие 2° (а) и лемма 2 гарантируют $\rho(\lambda,\tau) > c_3$, $\tau\in\Lambda\diagdown\{\lambda^*,\ \lambda\}$ и тогда условие 2° (б) для пары точек λ, τ, $\tau\in\Lambda\diagdown\{\lambda^*,\ \lambda\}$, вытекает из леммы 6. Очевидно, все проведенные здесь оценки не зависят от выбора точки λ. Таким образом, условие 2° теоремы 1 выполняется.

4. Конструкция оператора продолжения. Оператор продолжения вначале будет построен для редкого множества Λ. Более того, предварительно с помощью функции Ω «переведем» задачу в пространство H^∞ (оператор U — определение 12). После этого докажем (лемма 14), что функция Ω является мультипликатором из некоторого подпространства H^∞ в пространство C_A^ω, причем все функции Ux, $x\in l^\infty(\Lambda)$, входят в это подпространство. Это позволяет ввести оператор V (определение 15), решающий задачу интерполяции на редком множестве. Завершается конструкция построением оператора T (определение 19), который исправляет действие оператора V, построенного по множеству Λ_1, на множестве Λ_2 (здесь $\Lambda=\Lambda_1\cup\Lambda_2$ — разложение множества Λ, обладающее свойствами (1), которое существует по лемме 6).

Определение 12. *Пусть Λ — подмножество круга $\boldsymbol{D}$, удовлетворяющее условию Бляшке. Зададим оператор U равенством*

$$Ux(z) = \sum_{\lambda \in \Lambda} x(\lambda) \left(\frac{(1-\lambda^2)(1-z^2)}{(1-\lambda z)^2} \right)^2 \frac{B_\lambda(z)}{B_\lambda(\lambda)}, \quad z \in \boldsymbol{D}, \; x \in l^\infty(\Lambda).$$

Лемма 13. *Пусть Λ, $\Lambda \subset \boldsymbol{D}$ — множество, удовлетворяющее условиям (R) и (S). Тогда оператор U непрерывно отображает пространство $l^\infty(\Lambda)$ в пространство H^∞. При этом для любого x, $x \in l^\infty(\Lambda)$, $Ux(\lambda) = x(\lambda)$, $\lambda \in \Lambda$, и существует число γ, $\gamma > 0$ такое, что $|(Ux)'(z)| \leqslant c_{\|x|l^\infty(\Lambda)\|}/|1-z|$, $|z| < 3/2$, $|\arg(z-1)| > \frac{\pi}{2}(1-\gamma)$.*

Доказательство. Из условий, наложенных на множество Λ, вытекает (лемма 3), что $\inf\{|B_\lambda(\lambda)| : \lambda \in \Lambda\} > 0$. Следовательно, для доказательства непрерывности оператора U достаточно установить оценку

$$\sum_{\lambda \in \Lambda} \frac{|1-\lambda|^2 |1-z|^2}{|1-\lambda z|^4} \leqslant c \tag{4}$$

Так как множество Λ удовлетворяет условию (S), то существуют числа γ_1 и ε, γ_1, $\varepsilon > 0$ такие, что круги $\{z : |z - 1/\lambda| \leqslant 8\varepsilon|1-\lambda|\}$ находятся внутри угла $|\arg(z-1)| \leqslant \frac{\pi}{2}(1-\gamma_1)$. Следовательно, по лемме 4 при z, $|\arg(z-1)| > \frac{\pi}{2}(1-\gamma_1)$ оценка (4) эквивалентна следующему неравенству

$$\sum_{\lambda \in \Lambda} \frac{|1-\lambda|^2 |1-z|^2}{(|1-\lambda| + |1-z|)^4} \leqslant c/\varepsilon^4 = c_1.$$

Эта оценка справедлива по лемме 5, если положить в последней $\alpha = \beta = 2$; $T = \{t = |1-\lambda| : \lambda \in \Lambda\}$; $a = |1-z|$. Условия (S) и (R) для множества Λ гарантируют, что множество T удовлетворяет условиям леммы 5. Таким образом, доказано, что U — ограниченный оператор и Ux — аналитическая функция, ограниченная в области $\left\{z : |z| < 2,\; |\arg(z-1)| \geqslant \frac{\pi}{2}(1-\gamma_1)\right\}$.

Представляя производную $(Ux)'$ по формуле Коши с интегралом по границе подходящего круга, легко получить, что для $|z| < 3/2$, $|\arg(z-1)| \geqslant \frac{\pi}{2}(1-\gamma_1/2)$ справедливо неравенство $|(Ux)'(z)| \leqslant \dfrac{c_2 \|x|l^\infty(\Lambda)\|}{|1-z|}$.

Следующая лемма позволяет показать, что функция ΩUx входит в класс C_A^ω при любом x, $x \in l^\infty(\Lambda)$.

Лемма 14. *Пусть f и g — функции аналитические в круге D и выполнены неравенства* $|f(z)|\leqslant c$; $|f'(z)|\leqslant \frac{c_2}{|1-z|}$; $z\in D$; $|g(z)|\leqslant c_3\omega(|1-z|)$; $|g'(z)|\leqslant c_4\frac{\omega(|1-z|)}{|1-z|}$; $z\in D$, здесь ω — выпуклый модуль непрерывности. Тогда справедлива оценка $\|fg|c_A^\omega\|\leqslant c_2c_3+c_1c_4+4c_1c_3$.

Доказательство. Обозначим $h=fg$. Нам надо показать, что для любых точек из круга $(z,\ w\in D):|h(z)-h(w)|\leqslant \leqslant c\omega(|z-w|)$.

Рассмотрим отдельно случаи «далекого» и «близкого» расположения точек z и w.

1. Предположим, что $|z-w|\geqslant\frac{1}{2}\max\{|1-z|,\ |1-w|\}$, тогда $|h(z)-h(w)|\leqslant|h(z)|+|h(w)|\leqslant c_1c_3(\omega(|1-z|)+\omega(|1-w|))\leqslant 4c_1c_3\omega(|z-w|)$. Последнее неравенство вытекает из леммы 6 и сделанного предположения о точках z и w.

2. Остается рассмотреть случай, когда $|z-w|\leqslant\frac{1}{2}\max\{|1-z|,\ |1-w|\}$, для определенности будем считать, что $|1-z|\geqslant \geqslant|1-w|$. $|h(z)-h(w)|=\left|\int\limits_w^z h'(u)\,du\right|\leqslant\int\limits_0^1|h'(w+t(z-w))|\times \times|z-w|\,dt\leqslant|h'(u_0)||z-w|$ (5), здесь $|h'(u_0)|=\max\{|h'(w+t(z-w))|:0\leqslant t\leqslant 1\}$; $u_0=w+t_0(z-w)$. Так как $h'(u_0)=f'(u_0)g(u_0)+f(u_0)g'(u_0)$, то из условий леммы следует оценка $|h'(u_0)|\leqslant(c_2c_3+c_1c_3\omega(|1-u_0|)\omega|(|1-u_0|)/|1-u_0|$ (6). Ограничения, наложенные на z и w, позволяют получить неравенство $|1-u_0|\geqslant \geqslant|z-w|$. Тогда по лемме 6 $\omega(|1-u_0|)/|1-u_0|\leqslant\omega(|z-w|)/|z-w|$. Объединяя неравенства (5) и (6), получим требуемое: $|h(z)-h(w)|\leqslant(c_2c_3+c_1c_4)\omega(|z-w|)$. Введем оператор, решающий задачу интерполяции на редком множестве.

Определение 15. *Пусть Λ — подмножество круга D с единственной точкой сгущения $z=1$, удовлетворяющее условию Бляшке, ω — выпуклый модуль непрерывности, Ω — функция, построенная по функции ω в соответствии с определением 8. Обозначим через V оператор, заданный соотношением* $V\varphi=\Omega U\times \times\left(\frac{\varphi-\varphi(1)}{\Omega}\right)+\varphi(1),\quad \varphi\in c^\omega(\Lambda)$.

Лемма 16. *Если Λ, $\Lambda\subset D$, удовлетворяет соотношениям (S) и (R), то оператор V непрерывно отображает пространство $C^\omega(\Lambda)$ в пространство C_A^ω. При этом $V\varphi(\lambda)=\varphi(\lambda)$, $\lambda\in\Lambda$.*

Доказательство. Обозначим $\psi(\lambda)=(\varphi(\lambda)-\varphi(1))/\Omega(\lambda)$, $\lambda\in\Lambda$. Из леммы 9 следует, что $\|\psi|l^\infty(\Lambda)\|\leqslant c\|\varphi|C^\omega(\Lambda)\|$. Следовательно, по лемме 13 функция $f=U\psi$ такова, что $f(\lambda)=\psi(\lambda)$ и $\|f|H^\infty\|\leqslant c_1\|\varphi\|$, $|f'(z)|\leqslant\frac{c_1\cdot\|\varphi\|}{|1-z|}$, $z\in D$. В лемме 9 доказано, что $|\Omega(z)|\leqslant c_2\omega(|1-z|)$ при $|\arg(z-1)|>\pi/4$, рассуждая, как и в доказательстве леммы 13, получим оценку $|\Omega'(z)| \leqslant c_2\omega(|1-z|)/|1-z|$, $z \in \boldsymbol{D}$. Применяя к функциям f и Ω лемму 14, получим $\|\Omega U\psi | C_A^\omega\| \leqslant 6c_1c_2\|\varphi | c^\omega(\Lambda)\|$. Следовательно, оператор V непрерывен. Равенство $V\varphi(\lambda) = \varphi(\lambda)$, $\lambda \in \Lambda$, очевидно.

Определение 17. *Пусть* Λ — *подмножество круга* $\boldsymbol{D}$ *с единственной точкой сгущения* $z = 1$; $\Lambda = \Lambda_1 \cup \Lambda_2$, *где* Λ_1 *и* Λ_2 — *дизъюнктные множества;* Λ *удовлетворяет условию Бляшке. Пусть* V — *оператор из определения 15, порожденный множеством* Λ_1. *Введем оператор* S, *заданный на пространстве* $C^\omega(\Lambda)$:

$$(S\varphi)(\lambda) = \frac{\varphi(\lambda) - V(R_{\Lambda_1}\varphi)(\lambda)}{\widetilde{B}(\lambda)\cdot\Omega(\lambda)}, \quad \lambda \in \Lambda_2$$

здесь $\widetilde{B}$ — произведение Бляшке с множеством нулей Λ_1, $\dot{\Omega}$ — функция, построенная в определении 8 по модулю непрерывности ω.

Лемма 18. *Пусть* Λ — *подмножество круга* $\boldsymbol{D}$, *удовлетворяющее условию* 2° *теоремы* 1, $\Lambda = \Lambda_1 \cup \Lambda_2$ — *разбиение, удовлетворяющее условиям* (1), *которое существует по лемме* 7. *Тогда оператор* S *непрерывно отображает пространство* $C^\omega(\Lambda)$ *в пространство* $l^\infty(\Lambda_2)$.

Доказательство. Фиксируем функцию φ, $\varphi \in C^\omega(\Lambda)$, и точку λ, $\lambda \in \Lambda_2$. Из условий (1) вытекает существование единственной точки λ^*, $\lambda^* \in \Lambda_1$, $\lambda \in K_\rho(\lambda^*, \varepsilon)$, где ε — достаточно малое положительное число. Положим $\varphi_1 = R_{\Lambda_1}\varphi$. Заметим, что по лемме 16 $V\varphi_1(\tau) = \varphi_1(\tau)$, $\tau \in \Lambda_1$, $\|V\varphi_1 | C_A^\omega\| \leqslant c\|\varphi | C^\omega(\Lambda)\|$ и так как $\lambda \notin K_\rho(\tau, \varepsilon)$, $\tau \in \Lambda_1 \setminus \{\lambda^*\}$, то по лемме 3 $|\widetilde{B}_{\lambda^*}(\lambda)| > \delta$, $\lambda \in \Lambda_2$. Следовательно, $|S\varphi(\lambda)| = \Big|(\varphi(\lambda) - \varphi(\lambda^*) + V\varphi_1(\lambda^*) - V\varphi_1(\lambda)) \times \times \frac{1}{\widetilde{B}_{\lambda^*}(\lambda)}\frac{1}{b_{\lambda^*}(\lambda)}\frac{1}{\Omega(\lambda)}\Big| \leqslant (c+1)\|\varphi | C^\omega(\Lambda)\|\omega(|\lambda-\lambda^*|)\frac{1}{\delta}\frac{|1-\bar{\lambda}^*\lambda|}{|\lambda-\lambda^*|} \times \times \frac{1}{|\Omega(\lambda)|}$. Так как $|\Omega(\lambda)| \geqslant c_1\omega(|1-\lambda|)$ (лемма 9) и $|1-\lambda| \geqslant \geqslant |1-\bar{\lambda}^*\lambda|$, то, используя монотонность функции ω, получим

$$|S\varphi(\lambda)| \leqslant \frac{c+1}{c_1\delta}\frac{\omega(|\lambda^*-\lambda|)}{|\lambda^*-\lambda|}\frac{|1-\bar{\lambda}^*\lambda|}{\omega(|1-\bar{\lambda}^*\lambda|)}\|\varphi | c^\omega(\Lambda)\|.$$

Таким образом, условие 2° (б) теоремы 1 гарантирует $|S\varphi(\lambda)| \leqslant \leqslant c_2\|\varphi | C^\omega(\Lambda)\|$. Очевидно, оценка не зависит от выбора точки λ, $\lambda \in \Lambda_2$.

Определение 19. *Пусть* Λ, $\Lambda \subset \boldsymbol{D}$ — *множество, удовлетворяющее условию Бляшке и имеющее одну точку сгущения* $z = 1$; $\Lambda = \Lambda_1 \cup \Lambda_2$, $\Lambda_1 \cap \Lambda_2 = \varnothing$. *Зададим оператор* T *формулой* $T\varphi = V(R_{\Lambda_1}\varphi) + \widetilde{B}\Omega(U \circ S\varphi)$, $\varphi \in C^\omega(\Lambda)$, здесь V — оператор из определения 15, построенный по множеству Λ_1, U — оператор из определения 12, построенный по множеству Λ_2, символы S, $\widetilde{B}$, Ω имеют тот же смысл, что и в определении 17.

Доказательство теоремы 1. Импликация $1^\circ \Rightarrow 2^\circ$ составляет содержание леммы 11.

$2^\circ \Rightarrow 1^\circ$. Вложение $R_\Lambda C_A^\omega \subset C^\omega(\Lambda)$ очевидно. Для завершения доказательства достаточно показать, что T является непрерывным оператором продолжения, т. е. $T\varphi(\lambda) = \varphi(\lambda)$, $\lambda \in \Lambda$. Последнее равенство непосредственно вытекает из определения оператора T.

Таким образом, остается проверить непрерывность оператора T. Из лемм 18 и 13 следует, что

$$\| U \circ S\varphi \mid H^\infty \| \leqslant c \| \varphi \mid C^\omega(\Lambda) \|; \quad |(U \circ S\varphi)'(z)| \leqslant \frac{c \| \varphi \mid C^\omega(\Lambda) \|}{|1-z|}. \quad (7)$$

Из условия 2° на множество Λ легко получить, на основании леммы 5, что $|\widetilde{B}'(z)| \leqslant \frac{c_1}{|1-z|}$, $z \in \boldsymbol{D}$. Следовательно, для функции $f = \widetilde{B}(U \circ S\varphi)$ выполнены неравенства типа (7) с постоянной cc_1. Применяя к функциям f и Ω лемму 14, получим, как и в доказательстве леммы 13, что

$$\| \Omega f \mid C_A^\omega \| \leqslant c_2 \| \varphi \mid C^\omega(\Lambda) \|, \quad \varphi \in C^\omega(\Lambda).$$

Аналогичная оценка для функции $V(R_{\Lambda_1}(\varphi)$ следует из леммы 16. Таким образом, оператор T непрерывно отображает пространство $C^\omega(\Lambda)$ в пространство C_A^ω.

5. Влияние модуля непрерывности на структуру интерполяционного множества. Здесь будет рассмотрен вопрос о том, для каких модулей непрерывности существует интерполяционное множество, не являющееся редким. Нам будет удобно следующее

Определение 20. *Дискретное множество* Λ, $\Lambda \subset \boldsymbol{D}$, *назовем слипающимся, если оно не является редким, т. е.* $\inf\{\rho(\lambda, \tau) : \lambda \neq \tau,\ \lambda, \tau \in \Lambda\} = 0$. Будем говорить, что модуль непрерывности ω допускает слипание, если существует слипающееся множество Λ, интерполяционное для пары пространств $(C_A^\omega, C^\omega(\Lambda))$.

Покажем, что модуль непрерывности ω допускает слипание в том и только том случае, когда

$$\tau(\omega) = \overline{\lim_{x \to 0}} \frac{x\omega'(x)}{\omega(x)} = 1 \quad (8)$$

(ниже будет показано, как надо понимать символ ω'). Кроме того, будет показано, что модули непрерывности, допускающие слипание, встречаются часто, точнее, между любыми двумя неэквивалентными модулями непрерывности найдется модуль непрерывности, допускающий слипание.

В следующей лемме установим критерий слипания в более слабой форме, а затем докажем его эквивалентность условию (8).

Лемма 21. *Выпуклый модуль непрерывности допускает слипание тогда и только тогда, когда* $\lim\limits_{t,\, x \to 0} \dfrac{t\omega(x)}{\omega(tx)} > 0$.

Доказательство. 1) Предположим, что модуль непрерывности ω допускает слипание. Тогда найдется интерполяционное множество, содержащее последовательности точек $(\lambda_n)_{n\geq 1}$, $(\tau_n)_{n\geq 1}$ таких, что $\rho(\lambda_n, \tau_n)\to 0$, $n\to\infty$. Положим $t_n=\rho(\lambda_n, \tau_n)$; $x_n = |1-\lambda_n\bar{\tau}_n|$, $n\geqslant 1$, тогда из условий 2° (б) вытекает, что $\overline{\lim\limits_{n\to\infty}} \times \frac{t_n\omega(x_n)}{\omega(t_nx_n)}>0$. 2) Предположим теперь, что $\overline{\lim\limits_{t,\, x\to 0}}\frac{t\omega(x)}{\omega(tx)}>0$, тогда существуют числа t_n, x_n, $n\geqslant 1$, t_n, $x_n\to 0$, такие, что $\lim\limits_{n} \times \frac{t_n\omega(x_n)}{\omega(t_nx_n)}>0$. Положим $\lambda_n=1-x_n$, $\tau_n=1-(1+t_n)x_n$, $n\geqslant 1$. Легко проверить, что множество $\Lambda=\{\lambda_n\}_{n\geqslant 1}\cup\{\tau_n\}_{n\geqslant 1}$ удовлетворяет условиям 2° теоремы 1, т. е. является интерполяционным, в то же время оно оказывается слипающимся ($\rho(\lambda_n, \tau_n)\to 0$, $n\to\infty$).

Чтобы доказать критерий слипаемости в форме (8), заметим, что модуль непрерывности ω (считаем его выпуклым) имеет производную всюду, за исключением счетного числа точек, в этих точках определим ω' как производную справа, которая всегда существует [10, с. 114].

Теорема 22. *Модуль непрерывности ω допускает слипание тогда и только тогда, когда $\tau(\omega)=1$.*

Доказательство. На основании предыдущей леммы достаточно установить эквивалентность условий

$$\overline{\lim_{x,\, t\to 0}}\frac{t\omega(x)}{\omega(tx)}>0 \text{ и } \tau(\omega)=\overline{\lim_{x\to 0}}\frac{x\omega'(x)}{\omega(x)}=1.$$

1) Предположим, что $\tau(\omega)=1$, тогда существуют числа x_n, $n\geqslant 1$, $x_n\to 0$ такие, что

$$\frac{x_n\omega'(x_n)}{\omega(x_n)}>1-1/n, \quad n\geqslant 1. \tag{9}$$

Так как $\omega(x_n)-\omega(y)=\int\limits_y^{x_n}\omega'(t)\,dt$ и функция ω' убывает (ω — выпукла вверх), то $\omega(y)\leqslant\omega(x_n)-(x_n-y)\,\omega'(x_n)$, $0\leqslant y\leqslant x_n$ **(10)**. Умножая обе части неравенства на число $x_n/y\omega(x_n)$, получим

$$\frac{x_n\omega(y)}{y\omega(x_n)}\leqslant\frac{x_n}{y}-\frac{x_n\omega'(x_n)}{\omega(x_n)}\left(\frac{x_n}{y}-1\right).$$

Используя неравенство (9), можно написать $\frac{x_n\omega(y)}{y\omega(x_n)}\leqslant\frac{x_n}{y}-\left(1-\frac{1}{n}\right)\left(\frac{x_n}{y}-1\right)=1+\frac{1}{n}\frac{x_n}{y}-\frac{1}{n}$. Полагая $y=x_n/n$, $n\geqslant 1$, получим $n\frac{\omega(x_n/n)}{\omega(x_n)}\leqslant 2-\frac{1}{n}$. Следовательно, $\overline{\lim\limits_{x\, t\to 0}}\frac{t\omega(x)}{\omega(tx)}>0$.

2) Покажем, что из неравенства $\overline{\lim\limits_{x,\, t\to 0}} \frac{t\omega(x)}{\omega(tx)} > 0$ следует равенство $\tau(\omega) = 1$. Так как неравенство (10) справедливо для любых чисел x, y, $0 \leqslant y \leqslant x$, то, полагая $y = 0$, получим $x\omega'(x) \leqslant \omega(x)$. Таким образом, всегда $\tau(\omega) \leqslant 1$. Следовательно, требуемое утверждение будет доказано, если покажем, что условие $\tau(\omega) < 1$ влечет за собой равенство $\overline{\lim\limits_{x,\, t\to 0}} \frac{t\omega(x)}{\omega(tx)} = 0$. Предположим, что $\tau(\omega) < 1$. Возьмем число a, $a > 0$ такое, что $\frac{y\omega'(y)}{\omega(y)} \leqslant \frac{\tau(\omega)+1}{2}$, $0 < y < a$. Так как $\frac{t\omega(x)}{\omega(tx)} = t \exp\left\{\int\limits_{tx}^{x} \frac{\omega'(y)}{\omega(y)}\, dy\right\}$ то справедлива оценка

$$\frac{t\omega(x)}{\omega(tx)} \leqslant t \exp\left\{\frac{\tau(\omega)+1}{2} \ln \frac{1}{t}\right\} = t^{1/2(1-\tau(\omega))}, \quad 0 < x < a, \quad t < 1.$$

Следовательно, $0 \leqslant \overline{\lim\limits_{x,\, t\to 0}} \frac{t\omega(x)}{\omega(tx)} \leqslant \lim\limits_{t\to 0} t^{1/2(1-\tau(\omega))} = 0$.

Можно выделить класс модулей непрерывности, на котором критерий слипания особенно прост. Если ω — выпуклый модуль непрерывности и функция $t \to \ln \omega(e^{-t})$ выпукла (вверх или вниз), то, как нетрудно проверить, существуют и равны пределы

$$\lim_{x\to 0} \frac{\log \omega(x)}{\log x} = \lim_{x\to 0} \frac{x\omega'(x)}{\omega(x)}.$$

Однако в целом ситуация совсем иная. Оказывается, что «между» любыми двумя модулями непрерывности, неэквивалентными между собой, существует модуль непрерывности, допускающий слипание. Рассмотрим предварительно геометрическую характеристику эквивалентных модулей.

Лемма 23. *Пусть ω_1 и ω_2 — выпуклые модули непрерывности, $\omega_1(x) \geqslant \omega_2(x)$, и существует число N такое, что для любого числа a, $a > 0$, и числа b такого, что $\omega_1(a) = N\omega_1(b)$ хорда графика ω_1 с началом в точке $(a, \omega_1(a))$ и концом в точке $(b, \omega_1(b))$ пересекает график функции ω_2. Тогда $\omega_2(x) \leqslant \omega_1(x) \leqslant N^2\omega_2(x)$, $x \geqslant 0$.*

Доказательство. Обозначим через c точку, $b \leqslant c \leqslant a$ такую, что $\omega_2(c) = \omega_1(b)$, тогда при $c \leqslant x \leqslant a$, $\omega_2(x) \leqslant \omega_1(x) \leqslant \omega_1(a) = N\omega_1(b) = N\omega_2(c) \leqslant N\omega_2(x)$ (**11**). Чтобы установить аналогичное неравенство для $b \leqslant x \leqslant c$, возьмем точку d, $0 < d \leqslant b$ так, что $\omega_1(b) = N\omega_1(d)$. Ввиду условия, наложенного на хорды, $\omega_2(b) \geqslant \omega_1(d)$. Неравенства, аналогичные (11), дают $\omega_2(x) \leqslant \omega_1(x) \leqslant N^2\omega_2(x)$, $b \leqslant x \leqslant a$. Очевидно, эта оценка справедлива для всех x, $x \geqslant 0$ при подходящем выборе числа a.

Теорема 24. *Если ω_1 и ω_2 — выпуклые модули непрерывности, неэквивалентные между собой, $\omega_1(x) \geqslant \omega_2(x)$, то существует* *модуль непрерывности* ω, *допускающий слипание, и такой, что* $\omega_2(x) \leqslant \omega(x) \leqslant \omega_1(x)$, $x \geqslant 0$.

Доказательство. Условие теоремы и предшествующая лемма гарантируют существование чисел a_n, $0 < a_{n+1} < a_n < 1$ и чисел b_n, $b_n \geqslant a_{n+1}$, $\omega_1(b_n) = 1/n \cdot \omega_1(a_n)$, $n \geqslant 1$ таких, что хорды графика функции ω_1 над отрезками $[b_n, a_n]$ и график функции ω_2 не имеют общих точек. Определим непрерывную функцию ω так, что $\omega(x) = \omega_1(x)$ при $x \notin \bigcup\limits_{n=1}^{\infty} [b_n, a_n]$, и ω — линейная функция на каждом из отрезков $[b_n, a_n]$. Тогда для x, $b_n < x < a_n$, $\omega'(x) = \frac{\omega(a_n)}{a_n} \frac{1 - 1/n}{1 - b_n/a_n}$; $\omega(x) = \frac{1}{n}\omega(a_n) + \omega'(x)(x - b_n)$. Полагая $x_n = a_n(1 - 1/n + b_n/na_n)$, получим

$$\frac{x_n\omega'(x_n)}{\omega(x_n)} = \frac{(1 - 1/n + b_n/na_n)(1 - 1/n)}{(1/n + (1 - 1/n)(1 - b_n/a_n))(1 - b_n/a_n)}.$$

По лемме 6 $0 \leqslant b_n/a_n \leqslant \omega(b_n)/\omega(a_n) = 1/n$, следовательно, $\frac{x_n\omega'(x_n)}{\omega(x_n)} \geqslant \left(1 + \frac{n}{(n - 1^2)}\right)^{-1}$. Таким образом, $\tau(\omega) = 1$ и модуль ω допускает слипание.

Список литературы: 1. *Carleson*. Interpolations by bounded analytic functions and the Corona problem.— Ann. Math., 1962, **76**, № 3, p. 547—559. 2. *Виноградов С. А., Хавин В. П.* Свободная интерполяция в H^∞ и некоторых других классах функций. 1.— Зап. науч. семинаров ЛОМИ, 1974, **47**, с. 15—54. 3. *Виноградов С. А., Хавин В. П.* Свободная интерполяция в H^∞ и некоторых других классах функций. 2.— Зап. науч. семинаров ЛОМИ, 1974, **56**, с. 12—58. 4. *Коточигов А. М.* Интерполяция аналитическими функциями, гладкими вплоть до границы.— Зап. науч. семинаров ЛОМИ, 1972, **30**, с. 167—169. 5. *Дынькин Е. М.* Множества свободной интерполяции для классов Гельдера.— Мат. сб., 1979, **109**, № 1, с. 107—128. 6. *Гурвиц А., Курант Р.* Теория функций.— М.: Наука, 1968. —648 с. 7. *Васюнин В. И.* Безусловно сходящиеся спектральные разложения и задачи интерполяции. — Тр. МИАН, 1978, **130**, с. 5—49. 8. *Hruščev S. V., Vinogradov S. A.* Inner functions and multipliers of Cauchy type integkals. — LOMI, preprint, E—1—80, 1980, p. 1—18. 9. *Рудин У.* Функцион. анализ.— М.: Мир, 1975, с. 1—443. 10. *Харди Г. Г., Литтльвуд Д. Е., Полиа Г,* Неравенства. — М.: ГИИЛ, 1948. — 455 с. 11. *Голузин Г. М.* Геометрическая теория функций комплексного переменного. — М.: Наука, 1966. — 628 с. 12. *Дзядык В. К.* Введение в теорию равномерного приближения функций многочленами. — М.: Наука, 1977.— 510 с.

Поступила в редколлегию 26.02.82.