УДК 517.98

А. К. КИТОВЕР

СПЕКТРАЛЬНЫЕ СВОЙСТВА ЭНДОМОРФИЗМОВ С ВЕСОМ В КОММУТАТИВНЫХ БАНАХОВЫХ АЛГЕБРАХ

В статье рассматриваются операторы, действующие в коммутативных полупростых банаховых алгебрах с единицей вида $T = MQ$, где M — элемент алгебры, а Q — ее эндоморфизм. Такие операторы тесно связаны со структурой алгебры, в которой они действуют; а именно, по теореме Кахана — Глиссона — Желязко оператор T из этого класса характеризуется тем, что множество нулей функции $\widehat{Tf}$ (крышка обозначает преобразование Гельфанда) одинаково для всех обратимых элементов f алгебры A. Указанная связь служит одной из причин того, что эндоморфизмы с весом (в частности, их спектральные свойства) оказываются интересным объектом исследования. В настоящее время получены общие условия компактности таких операторов (см., напр., [1]). Что касается спектральных свойств некомпактных эндоморфизмов с весом, то имеющиеся результаты носят частный характер, а их доказательства существенно используют специфику рассматриваемой алгебры. Предлагается другой метод, который позволяет получать значительную информацию о спектре оператора MQ в довольно общей ситуации. Именно, наряду с оператором T, $T = MQ$ рассматривается оператор $\widehat{T}$ в равномерном замыкании $\widehat{A}$ образа алгебры A при гельфандовском отображении (оператор $\widehat{T}$ действует по формуле $\widehat{T}\widehat{f} = \widehat{Tf}$, $f \in A$ и продолжается на $\widehat{A}$ по непрерывности). Далее предполагается, что $Q1 = 1$. Тогда $\widehat{T}\widehat{f}(x) = \widehat{M}(x)\widehat{f}\varphi(x))$, где φ есть непрерывное отображение пространства $\mathfrak{M}_A$ максимальных идеалов алгебры A в себя. Предположим также, что $\varphi(\partial A) = \partial A$, где ∂A есть граница Шилова алгебры A. При этих предположениях спектр оператора $\widehat{T}$ можно полностью описать. Детали этого описания будут приведены в другом сообщении, здесь ограничимся лишь замечанием, что если алгебра A аналитична относительно ∂A (т. е. из обращения $\widehat{f}$ в нуль на открытом подмножестве ∂A следует, что $\widehat{f} \equiv 0$) и эндоморфизм Q не периодичен ($Q^n \neq I$, $n = 1, 2 \ldots$), то спектр $\sigma(\widehat{T})$ оператора $\widehat{T}$ есть круг или кольцо с центром в нуле.

Основной результат этой статьи (теор. 1) устанавливает условия, при которых имеет место включение $\sigma(\widehat{T}) \subset \sigma(T)$, что позволяет значительно усилить теорему Камовица — Шайнберга [2], согласно которой спектр непериодического автоморфизма коммутативной полупростой банаховой алгебры содержит единичную окружность. Теорема 1 показывает также, что если включение $\sigma(\widehat{T}) \subset \sigma(T)$ не выполнено, то отображение φ подчинено весьма жестким ограничениям, что позволяет в ряде случаев, используя специфику алгебры A, полностью описать спектр оператора T, $T = MQ$. Соответствующее описание приведено для алгебр гладких и гладких аналитических функций (теор. 2 и 2′).

1. Условия включения $\sigma(\widehat{T}) \subset \sigma(T)$. **Теорема 1.** *Пусть A — коммутативная полупростая банахова алгебра с единицей, Q — эндоморфизм A, $M \in A$ и $T = MQ$. Пусть $Q1 = 1$ и $\varphi(\partial A) = \partial A$, где отображение φ пространства $\mathfrak{M}_A$ на себя определяется из равенства $\widehat{Qf}(x) = \widehat{f}(\varphi(x))$. Пусть, наконец, $\lambda \in \sigma(\widehat{T}) \setminus \sigma(T)$. Тогда выполнена одна из альтернатив: 1) найдется φ-периодическая точка x в ∂A, такая, что* $|M_{p(x)}(x)| = |\lambda|^{p(x)}$, где $p(x)$ есть наименьший период точки x; 2) граница Шилова ∂A есть объединение непересекающихся множеств K_1, K_2 и O со свойствами: а) $\varphi(K_i) = K_i = \overline{K}_i$; б) сужение отображения φ на K_2 есть гомеоморфизм; в) для любого замкнутого подмножества W множества O и любых окрестностей V_1, V_2 в ∂A множеств K_1 и K_2 найдется натуральное n, такое, что $\varphi_n(W) \subset V_2$, $\varphi_{-n}(W) \subset V_1$; г) найдутся числа δ, $\delta > 0$, и натуральное m, такие, что $|\widehat{M}_m| > (|\lambda| + \delta)^m$ на K_2 и $|\widehat{M}_m| < (|\lambda| - \delta)^m$ на K_1.*

Нам понадобится следующая

Лемма 1**. *Пусть T — обратимый оператор в пространстве $\boldsymbol{C}(K)$ непрерывных комплекснозначных функций на компакте K вида $(Tf)(x) = M(x)f(\varphi(x))$. Пусть $\lambda \in \sigma(T)$ и оператор*

---

* Здесь и в дальнейшем через φ_n обозначается n-я итерация отображения φ, через M_n — функция $fQf, \ldots, Q^{n-1}f$.

** Ее доказательство приведено в работе Китовер А. К. Спектральные свойства эндоморфизмов с весом в алгебрах непрерывных функций и их приложения.— Зап. науч. семинаров ЛОМИ, 1983.— 20 с.

$T-\beta I$ обратим справа для любого β, $|\beta|=|\lambda|$. Тогда компакт K есть объединение множеств K_1, K_2 и O со свойствами а) — г) из формулировки теоремы 1.

Доказательство теоремы 1. Обозначим через $\sigma_r(T, X)$ остаточный спектр оператора T в пространстве X, а через $\sigma_{a.\,p.}(T, X)$ — множество $\sigma(T, X)\diagdown\sigma_r(T, X)$. Очевидно, $\sigma_r(\widehat{T}, \widehat{A})\subset\sigma(T, A)$ и $\sigma_{a.\,p}(\widehat{T}, \widehat{A})\subset\sigma_{a.\,p}(\widehat{T}, C(\partial A))$. Поэтому достаточно рассмотреть случай, когда $\lambda\in\sigma(\widehat{T}, C(\partial A))\diagdown\sigma(T, A)$.

Рассмотрим компакт $\mathcal{K}$, состоящий из двусторонних последовательностей вида $\{x_i : x_i\in\partial A,\ i\in Z\}$, таких, что $\varphi(x_i)=x_{i+1}$, с топологией покоординатной сходимости. Отображение $\Phi:(\Phi x)_i=(x)_{i+1}$, $x\in\mathcal{K}$, есть гомеоморфизм компакта $\mathcal{K}$ на себя. Определим $\mathcal{M}\in C(\mathcal{K})$ формулой $\mathcal{M}(x)=\widehat{M}(x_0)$ и рассмотрим оператор τ в $C(\mathcal{K})$, действующий по правилу $(\tau f)(x)=\mathcal{M}(x)f(\Phi(x))$. Если оператор $\tau-\beta I$ обратим справа при всех β, $|\beta|=|\lambda|$, то по лемме 1 компакт $\mathcal{K}$ разбивается на множества $\mathcal{K}_1$, $\mathcal{K}_2$, σ со свойствами а) — г). Спроектируем это разбиение на нулевую координату в $\mathcal{K}$, тогда получим разбиение $\partial A=K_1\cup K_2\cup O$ со свойствами а), в) и г). Таким образом, чтобы проверить выполнение первой из альтернатив в формулировке доказываемой теоремы, достаточно установить, что сужение φ на K_2 есть гомеоморфизм, но в противном случае $\lambda\in\sigma_r(\widehat{T}, \widehat{A}_2)\subset\sigma(T, A)$, где $\widehat{A}_2$ есть равномерное замыкание алгебры сужений функций из A на K_2, что противоречит предположению $\lambda\notin\sigma(T, A)$.

Предположим теперь, что оператор $\tau-\beta I$ необратим справа для некоторого β, $|\beta|=|\lambda|$, и покажем, что тогда выполнена вторая альтернатива. Нетрудно убедиться (см. [3, теор. 2 и доказательство леммы 2]), что найдется последовательность x_i, $i\in\mathbf{Z}$, точек из ∂A, такая, что $\varphi(x_i)=x_{i+1}$, $i\in\mathbf{Z}$, и $|\widehat{M}_n(x_0)|\leqslant|\lambda|^n$, $|\widehat{M}_n(x_{-n})|\geqslant|\lambda|^n$, $n\in\mathbf{N}$ **(1)**. Если точка x_0 периодична, то все доказано, поэтому предположим, что x_0 не является периодической. Предположим также сначала, что x_0 рекуррентна относительно φ, т. е. найдутся натуральные числа n_k, такие что $\varphi_{n_k}(x_0)\to x_0$. Положим для $f\in A$

$$G(z, f)=\begin{cases}\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\widehat{M}_n(x_0)\,\widehat{f}(x_n)}{z^{n+1}}, & |z|>|\lambda|,\\[2ex] \displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\widehat{f}(x_{-n})\,z^n}{\widehat{M}_n(x_{-n})}, & |z|<|\lambda|.\end{cases}\tag{2}$$

Так как $\lambda\notin\sigma(T, A)$, то функции $G(z, f)$ аналитичны в окрестности λ. Покажем, что найдется последовательность f_n, $f_n\in A$, такая, что $|\widehat{f}_n(x_i)|\leqslant 1$, $i\in \mathbf{Z}$, $|\widehat{f}_n(x_0)|\geqslant 1-1/n$, $|\widehat{f}_n(x_i)|\leqslant 1/n$, $1\leqslant |i|\leqslant n$. Пусть B есть равномерное замыкание алгебры сужений функций из A на множество $\overline{\{x_i : i\in \mathbf{Z}\}}$. Очевидно, $x_0\in \partial B$. Пусть y_n — точка пика алгебры B, настолько близкая к x_0, что для некоторой окрестности V точки y_n $\varphi_i(V)\cap\varphi_j(V)=\varnothing$, $i\neq j$, $0\leqslant |i|$, $|j|\leqslant n$. Найдется функция g из A со свойствами $\|g\|_B\leqslant 1$, $g(y_n)=1-1/2n$, $|g|<1/n$ на $\varphi_i(V)$, $1\leqslant |i|\leqslant n$. В силу рекуррентности x_0 для некоторого $p\in \mathbf{N}$ будет $|g(x_p)|>1-1/n$. Положим $f_n=Q^p g$, тогда f_n обладает требуемыми свойствами. Учитывая (1), можно применить к последовательности $G(z, f_n)$ теорему Левинсона — Съеберга о нормальности семейства [4]. Тогда получим, что 1 аналитически продолжается в 0 через λ, что абсурдно.

Итак, точка x_0 не рекуррентна и множество $F=\bigcap\limits_{k=1}^{\infty}\overline{\{x_i : i=k, k+1, \ldots\}}$ инвариантно относительно φ и не содержит x_0. Рассмотрим множество $\mathcal{K}_F=\{(x_i), x_i\in F, \ \varphi(x_i)=x_{i+1}, \ i\in \mathbf{Z}\}$ и определим оператор τ_F в $C(\mathcal{K}_F)$ подобно тому, как выше определялся оператор τ. Множество $|\sigma(\tau_F)|=\{|\gamma| : \gamma\in\tau_F\}$ связно ([3]), лемма 1), следовательно, $|\sigma(\tau_F)|=[a, b]$, $0\leqslant a\leqslant b<\infty$. Неравенство $|\lambda|<a$ противоречило бы (1), а из неравенства $|\lambda|>b$ следовало бы, что для любой f из A функция $G(z, f)$, определенная равенствами (2), аналитична в расширенной комплексной плоскости и, следовательно, $\widehat{f}(x_0)=0$, $f\in A$, что неверно. Таким образом, $|\lambda|\in|\sigma(\tau_F)|$. Оператор $\tau_F-\beta I$ не может быть обратим справа при всех β, $|\beta|=|\lambda|$, так как тогда F разбилось бы на подмножества со свойствами а) — г), но определение F и простые топологические соображения показывают, что это невозможно. Следовательно, найдется последовательность точек Y_i, $i\in \mathbf{Z}$, из F такая, что $\varphi(y_i)=y_{i+1}$, и выполнены неравенства (1). Если точка y_0 непериодична, повторим предыдущие рассуждения и, в конце концов, придем к существованию периодической точки с требуемыми свойствами. ●

Следствие 1. Пусть множество $\{|\widehat{M}_{p(x)}(x)|\, x\in\partial A$, x — φ-периодична$\}$ имеет первую категорию в $\mathbf{R}$. Пусть, кроме того, в ∂A нет «блуждающих» точек, т. е. таких точек y, что $\varphi_i(V)\cap\varphi_j(V)=\varnothing$, $i\neq j$, $i, j\in \mathbf{Z}$ для некоторой окрестности V точки y. Тогда $\sigma(\widehat{T}, \widehat{A})\subset\sigma(T, A)$.

Эскиз доказательства. Согласно теореме 1 достаточно установить, что если 1 есть изолированная точка в $|\sigma(T, A)|$ и в $|\sigma(\widehat{T}, \widehat{A})|$ и существует такая φ-периодическая точка x в ∂A, что $|\widehat{M}_{p(x)}(x)|=1$, и в любой окрестности x есть точки сколь угодно большого периода, то $\sigma(T, A)\supset\{z : |z|=1\}$. Доказательство этого утверждения является незначительной модификацией исходного доказательства теоремы Камовица — Шайнберга в [2].

Отметим частный случай.

Следствие 1′. *Пусть множество* φ*-периодических точек в* ∂A *не более чем счетно и каждая точка из* ∂A *рекуррентна относительно* φ. *Тогда* $\sigma(\widehat{T}, \widehat{A}) \subset \sigma(T, A)$.

Замечание. Для случая автоморфизм в с весом следствия 1 и 1′ анонсированы в [5].

Следствие 2. *Пусть множество* $\{\widehat{M} \circ \varphi_n : n \in \boldsymbol{N}\}$ *относительно слабо компактно в* $C(\partial A)$. *Тогда* $\sigma(\widehat{T}, \widehat{A}) \subset \sigma(T, A)$.

2. Спектр эндоморфизмов с весом в алгебрах гладких функций.

Теорема 2. *Пусть* G *— область в* $\boldsymbol{R}^n$, $C^{(1)}(G)$ *— алгебра функций, производные которых непрерывны в* G *и непрерывно продолжаются на* $\overline{G}$. *Пусть* φ *— отображение* $\overline{G}$ *в себя класса* $C^{(1)}$, $M \in C^{(1)}(G)$ *и* T *— оператор в* $C^{(1)}(G)$ *вида* $Tf = M(f_0\varphi)$, $f \in C^{(1)}(G)$.

Предположим, что область G и отображение φ удовлетворяют следующим условиям: а) $\rho_G(x, y) \leqslant \mathrm{const}\,|x - y|$, где $\rho_G(x, y)$ — расстояние между x и y по кратчайшему пути в G; б) множество φ-периодических точек имеет первую категорию в $\overline{G}$; в) множество нулей якобиана $\det D_\varphi$ нигде не плотно в $\overline{G}$.

Тогда 1. Фредгольмов спектр $\sigma_{\mathrm{ess}}(T, C^{(1)}(G))$ оператора T в $C^{(1)}(G)$ есть круг или кольцо с центром в нуле. 2. Если $\lambda \in \sigma(T, C^{(1)}(G)) \setminus \sigma_{\mathrm{ess}}(T, C^{(1)}(G))$, то найдется φ-периодическая точка x в $\overline{G}$, такая, что $M_{p(x)}(x) = \lambda^{p(x)}$. Кроме того, если λ лежит во внешней (внутренней) компоненте дополнения множества $\sigma_{\mathrm{ess}}(T, C^{(1)}(G))$, то точка x будет притягивающей (отталкивающей) для отображения $\varphi_{p(x)}$, т. е. все собственные числа матрицы Якоби $D_{\varphi_{p(x)}}(x)$ по модулю меньше (больше) единицы.

Справедлив «аналитический» вариант этой теоремы.

Теорема 2′. *Пусть* G *— область в* $\boldsymbol{C}^n$, $\rho_G(z_1, z_2) \leqslant \mathrm{const}\,|z_1 - z_2|$, $z_1, z_2 \in G$, $C_A^{(1)}(G)$ *— алгебра функций, аналитических в* G *и непрерывно дифференцируемых в* $\overline{G}$, φ *— отображение* $\overline{G}$ *на себя класса* $C_A^{(1)}$, $M \in C_A^{(1)}(G)$ *и* T *— оператор в* $C_A^{(1)}(G)$ *вида* $Tf = M(f_0\varphi)$. *Тогда справедливо заключение теоремы 2, причем точка* x, *существование которой утверждается в п. 2, принадлежит границе Шилова алгебры* $C_A^{(1)}(G)$.

Будем доказывать теорему 2 при $n = 2$ в предположении, что оператор T обратим (общий случай технически труднее, но идея доказательства та же). Введем предварительно некоторые обозначения. Пусть K — компакт, являющийся прямым произведением $\overline{G}$ и единичной окружности S, Φ — гомеоморфизм компакта K на себя вида $\Phi(x, l) = (\varphi(x),\ D'_\varphi(x)\, l / |D'_\varphi(x)\, l|)$, где $D'_\varphi(x)$ — транспонированная матрица Якоби отображения φ в точке x (отождествляем единичный вектор l с его концом на S). Положим $N(x, l) =$

$= M(x)\,|D'_\varphi(x)\, l\,|$ и определим оператор L в $C(K)$ формулой $Lg(x, l) = N(x,l)\, g(\Phi(x,l))$.

Лемма 2. $\sigma_{\text{a. p.}}(L, C(K)) \subset \sigma(T, C^{(1)}(G))$.

Доказательство. Пусть $\lambda \in \sigma_{\text{a. p.}}(L, C(K))$. Тогда (см. [3] доказательство леммы 2) для любого n найдется непериодическая точка (x_n, l_n) из K такая, что

$$\left.\begin{aligned} &|N_k(x_n, l_n)| \geqslant |\lambda|^k/2, \quad k = 0, 1 \ldots n+1, \\ &|N_k(\Phi_{-k}(x_n, l_n))| \leqslant 2|\lambda|^k, \ k = 1, 2 \ldots n+1 \end{aligned}\right\}. \tag{3}$$

В силу условия б) можно считать, что точки x_n непериодичны относительно φ. Выберем окрестность V_n точки x_n так, чтобы $\varphi_i(V_n) \cap \varphi_j(V_n) = \varnothing$, $i \neq j$, $0 \leqslant |i|, |j| \leqslant n$. В $C^{(1)}(G)$ найдется функция h_n со свойствами $\|h_n\| = 1$, $\|h_n\|_\infty \leqslant 1/n$, $\operatorname{supp} h_n \subset V_n$, $(\nabla h_n, l_n) \geqslant 1/2$, $|(\nabla h_n, q_n)| \leqslant 1/n$, где q_n — единичный вектор, ортогональный l_n. Положим $f_n = \sum\limits_{k=-n}^{n} (1 - 1/\sqrt{n})^{|k|} \lambda^{-k} T^k h_n$. Тогда $\|f_n\| \geqslant 1/2$. С помощью (3) нетрудно убедиться в том, что

$$\|Tf_n - \lambda f_n\| \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0. \quad \bullet$$

Лемма 3. $\sigma(L, C(K)) \subset \sigma(T, C^{(1)}(G))$.

Доказательство. В силу лемм 1 и 2 и теоремы 2 из [3] достаточно рассмотреть случай, когда $\lambda \in \sigma(L, C(K))$ и в K найдется непериодическая точка (x°, l°) со свойствами $|N_n(x^\circ, l^\circ)| \leqslant |\lambda|^n$, $|N_n(\Phi_{-n}(x^\circ, l^\circ))| \geqslant |\lambda|^n$, $n \in \mathbf{N}$. Пусть δ — единичная нагрузка в точке (x°, l°) и $\alpha \in S$, $\alpha \neq 1$. Положим $\mu_n = \sum\limits_{k=-n}^{n} (1 - 1/\sqrt{n})^{|k|} (|\lambda|\alpha)^{-k} L^{*k}\delta$, $\nu_n = \mu_n/\|\mu_n\|$. Тогда легко проверить, что $\|L^*\nu_n - \alpha|\lambda|\nu_n\| \to 0$ и что меры ν_n слабо сходятся к нулю. Для любой функции f из $C^{(1)}(G)$ определим функцию $\tilde{f}$ из $C(K)$ равенством $\tilde{f}(x, l) = (\nabla f(x), l)$. Функции $\tilde{f}$ образуют замкнутое подпространство H в $C(K)$. Очевидно, $\widetilde{Tf} = L\tilde{f} + R\tilde{f}$, где R — компактный оператор из H в $C(K)$ вида $(R\tilde{f})(x, l) = f(x)(\nabla M(x, l)$. Поэтому, если рассматривать ν_n как функционалы на $C^{(1)}(G)$ (полагая $(f, \nu_n) = \int \tilde{f} d\nu_n$), то $\|T^*\nu_n - \alpha|\lambda|\nu_n\| \to 0$. С другой стороны, ясно, что $\sup|(f, \mu_n)| = \|\mu_n\|$, где sup берется по единичному шару в $C^{(1)}(G)$, а справа стоит норма μ_n как меры на K и, следовательно, функционалы ν_n имеют единичную норму в $C^{(1)}(G)^*$. $\bullet$

Доказательство теоремы 2. Из леммы 3, теоремы об изменении спектра при компактных возмущениях (см. [6] с. 300) и результатов работы [3] следует, что $\sigma_{\text{ess}}(T, C^{(1)}(G)) = \sigma(L, C(K)) = \{z : \rho_1 \leqslant |z| \leqslant \rho_2\}$, $0 \leqslant \rho_1 \leqslant \rho_2 < \infty$. Пусть $\lambda \in \sigma(T) \setminus \sigma_{\text{ess}}(T)$ и пусть для определенности $|\lambda| > \rho_2$. Применим теорему 1 и получим, что $G = G_1 \cup G_2 \cup O$, где множества G_1, G_2, O обладают свойствами а)—г) из формулировки теоремы 1. Для некоторого достаточно большого n имеем $|M_n(x)| > |\lambda|^n$ на G_2, а с другой стороны, $|M_n(x)|\,|D'\varphi_n(x)\,l| < |\lambda|^n$ для всех (x, l) из K. Поэтому отображение φ_n является сжимающим на G_2 и G_2 состоит из конечного числа φ-периодических притягивающих точек. Не умаляя общности, можно считать, что G_2 состоит из неподвижных точек. Пусть $f \in C^{(1)}(G)$, $Tf = \lambda f$. Тогда найдется $x \in O$, $f(x) \neq 0$. Последовательность $\varphi_n(x)$ сходится к y, $y \in G_2$. Если $f(y) = 0$, то $|f(\varphi_n(x))| \leqslant \mathrm{const}\,|\varphi_n(x) - y|$, но, с другой стороны, $f(\varphi_n(x)) = \lambda^n / M_n(x)$ и, учитывая, что $|M(y)\beta| < |\lambda|$, $i = 1, 2$, где β_1, β_2 — собственные числа матрицы $D_\varphi(y)$, приходим к противоречию. Таким образом, $f(y) \neq 0$ и $\lambda = M(y)$ ●.

Замечания. 1. Теоремы 2 и 2′ справедливы и для алгебр $C^m(G)$, $m > 1$. При некоторых дополнительных предположениях можно сформулировать аналоги этих теорем для алгебр $\mathrm{Lip}_\alpha(K)$, $0 < \alpha \leqslant 1$, где K — метрический компакт, для пространств Соболева и т. д. 2. В условиях теоремы 2 фредгольмов спектральный радиус оператора T дается формулой $\rho_{\mathrm{ess}}(T) = \max \exp \int \ln |M(x) \times \times\, \| D'_\varphi(x)\, l \,| d\mu$, где max берется по множеству всех Φ-инвариантных вероятностных мер на K.

3. Примеры и вопросы.

Пример 1. Пусть A — алгебра функций, аналитических в единичном круге и непрерывно дифференцируемых вплоть до границы. Пусть $\varphi(z) = [(z - r)/(1 - rz)]^2$, где $0 < r < 1$. Легко видеть, что если $0 < r \leqslant 1/3$ и $|z| = 1$, то $|\varphi'(z)| \geqslant 1$. Поэтому по теореме 2″ при $0 < r \leqslant 1/3$ спектр оператора MT_φ в A есть круг, какова бы ни была функция M из A. Если же $r > 1/3$ и $|M(-1)|\,(1 - r)/(1 + r) > |M(1)|\,(1 + r)/(1 - r)$, то $\sigma(MT_\varphi) \neq \sigma_{\mathrm{ess}}(MT_\varphi)$.

Пример 2. Пусть A — алгебра функций, непрерывно дифференцируемых на единичном квадрате K. Пусть Φ — отображение K на себя вида $\Phi(x, y) = (\varphi(x), \psi(y))$, где $\psi(y) = (y + y^2)/2$, а φ — непрерывно дифференцируемое отображение отрезка $[0, 1]$ на себя, переводящее отрезок $[1/2, 1]$ в точку 1 и отрезок $[1/(n + 1), 1/n]$ — в $[1/n, 1/(n - 1)]$, $n = 2, 3 \ldots$. Пусть $M \in C^{(1)}(K)$, $M(1, y) \equiv 3$, $M(0, y) \equiv 1$. Тогда спектр оператора MT_φ в $C^{(1)}(K)$ есть объединение единичного круга и окружности радиуса 3. Этот пример показывает, что условие в) в формулировке теоремы 2 существенно.

Пример 3. Пусть θ_n, $n = 1, 2, \ldots$ — возрастающая последовательность положительных чисел такая, что $\lim \theta_n = \infty$, $\lim(\theta_{n+1} - \theta_n) = 0$ и θ_n не кратно 2π при всех n. Рассмотрим компакт K на плоскости, являющийся объединением единичной окружности S и двусторонней последовательности точек z_n, $z_0 = 2$, $z_n = (1 + 1/2^n)\exp(i\theta_n)$, $n = 1, 2 \ldots$ и $z_{-n} = 1 + 1/(n + 1)$, $n = 1, 2 \ldots$ Пусть A есть алгебра $\mathrm{Lip}_1(k)$; отображение φ определим по правилу $\varphi(z_n) = z_{n+1}$, $n \in Z$, и $\varphi(z) \equiv z$ при $z \in S$. Пусть M — функция из $\mathrm{Lip}_1(K)$ такая, что $M(1) = 1$, $1 \leqslant M(z) \leqslant 3$, $M(-1) = 3$. Тогда оператор T, $Tf = M(f_0\varphi)$ есть автоморфизм с весом алгебры A. Нетрудно показать, что $\sigma(T)$ есть объединение кольца $1/2 \leqslant |z| \leqslant 3/2$ и отрезка $[3/2, 3]$. Таким образом, включение $\sigma(\hat{T}, \hat{A}) \subset \sigma(T, A)$ не выполнено. Этот пример показывает, что условие счетности множества периодических точек в формулировке следствия 1″ существенно.

В заключение статьи — несколько вопросов.

1. Верно ли «прямое» обобщение теоремы Камовица — Шайнберга, т. е. верно ли, что спектр непериодического автоморфизма с весом в коммутативной полупростой банаховой алгебре содержит некоторую окружность с центром в нуле?

2. Пусть A — коммутативная полупростая банахова алгебра с единицей, B — замкнутая подалгебра A такая, что $\mathfrak{M}_B = \mathfrak{M}_A$, T — обратимый автоморфизм с весом алгебры A и $TB = B$. Верно ли, что $\sigma(T, B) = \sigma(T, A)$? Известно, что это так, если A и B — равномерные алгебры [3]. Из теорем 2 и 2′ нетрудно заметить также, что предположение верно, если $G \subset C^n$, $A = C^{(1)}(G)$, $B = C_A^{(1)}(G)$ и $\mathfrak{M}_B = \overline{G}$.

3. Пусть A — регулярная алгебра, Q — непериодический эндоморфизм алгебры A. Верно ли, что спектр Q в A инвариантен относительно вращений? Верно ли, что если множество периодических точек отображения φ, соответствующего Q, не более, чем счетно, то фредгольмов спектр оператора MQ, $M \in A$, инвариантен относительно вращений?

Список литературы: 1. *Kamowitz H.* Compact endomorphisms of Banach algebras.— Pacific J. Math., 1980, **89**, № 2, p. 313—325. 2. *Kamowitz H.*, *Scheinberg S.* The spectrum of automorphisms of Banach algebras.— J. Functional Analysis, 1969, **4**, № 2, p. 268—276. 3. *Китовер А. К.* Спектральные свойства автоморфизмов с весом в равномерных алгебрах. — Зап. науч. семинаров ЛОМИ, 1979, **92**, с. 288—293. 4. *Levinson N.* Gap and density theorems. — New-York, 1940.— 235 p. 5. *Китовер А. К.* О спектре автоморфизмов с весом и теореме Камовица — Шайнберга. — Функцион. анализ и его прил., 1979, **13**, вып. 1, с. 70—71. 6. *Като Т.* Теория возмущений линейных операторов.— М.: Мир, 1972. — 740 с.

Поступила в редколлегию 11.06.82.