УДК 513:88

В. А. ХАЦКЕВИЧ, Д. М. ШОЙХЕТ

О НЕПОДВИЖНЫХ ТОЧКАХ АНАЛИТИЧЕСКИХ ОПЕРАТОРОВ В БАНАХОВОМ ПРОСТРАНСТВЕ И НЕКОТОРЫХ ПРИЛОЖЕНИЯХ

В статье изучаются условия существования равномерно аппроксимируемой простыми итерациями неподвижной точки аналитического оператора в банаховом пространстве. Исследуется вопрос об однозначной аналитической разрешимости и равномерной аппроксимации решения уравнения с аналитическим оператором, аналитически зависящим от параметра. Получаемые при этом результаты прилагаются к одной задаче теории линейных операторов в пространстве с индефинитной метрикой.

Пусть X — банахово пространство над полем C комплексных чисел; D — ограниченная область в X; оператор Φ: $D \to D$ аналитичен в D, т. е. дифференцируем по Фреше в окрестности каждой точки из D. В этом случае будем писать $\Phi \in H(D)$. Кроме того, если оператор Φ непрерывен в замыкании $\bar{D}$ области D, то будем писать $\Phi \in H_c(D)$.

Точку $z \in D$ назовем s-неподвижной точкой оператора $\Phi \in (H(D))$, если последовательность итераций $\{\Phi^n x\}_1^\infty$ ($\Phi_1 = \Phi$, $\Phi^n = \Phi\Phi^{n-1}$) сходится к z равномерно в D.

Сформулируем следующий критерий s-неподвижной точки.

Лемма. *Пусть $z (\in D)$ является неподвижной точкой оператора $\Phi (\in H(D))$ и $A = \Phi'(z)$ — производная Фреше оператора Φ в точке z. Тогда следующие условия эквивалентны:* 1) $\Phi^n x \to z$, $n \to \infty$, *при любом $x \in D'$, где D' плотно в D, и выполнено условие: оператор $e^{i\theta} - A$ нормально разрешим для всех* $\theta \in [0, 2\pi]$ (*I — тождественный оператор* в X); 2) $r(A) < 1$, *где* $r(A) < 1$, *где $r(A)$ — спектральный радиус оператора A;* 3) *найдутся число $\delta > 0$ и норма $\|\cdot\|_*$, эквивалентная норме в X, такие, что в шаре $\bar{u}_\delta = \{x \in D : \|x - z\|_* \leqslant \delta\}$ оператор Φ является q-сжатием* [1] *при некотором $q: 0 < q < 1$;* 4) *точка z является s-неподвижной точкой оператора Φ.*

Если $\Phi \in H_c(D)$ и для любого $x \in \partial D$, где ∂D — граница области D, будет $\Phi^n x \to z$, $n \to \infty$, то условия 1)—4) *эквивалентны условию:* 5) *для любого q: $0 < q < 1$ на множестве $\bar{D}$ существует метрика, эквивалентная норме в X, в которой оператор Φ является q-сжатием в D.*

Импликация 1) $\Rightarrow$ 5) является глобальным обращением принципа Банаха в некоторой метрике, эквивалентной норме в X. Импликация 1) $\Rightarrow$ 3) является лишь локальным обращением этого принципа, но уже в норме, эквивалентной норме в X. В случае, если известно число $r(A)$, нахождение $\|\cdot\|_*$ и числа δ, фигурирующих в условии 3), является более простой задачей, чем отыскание упомянутой метрики, описание которой указано в [1].

Пусть Ω-область в C с жордановой границей $\Gamma = \partial\Omega$; $\Omega \ni 0$. Для $(\lambda, x) \in \Omega \times D$ рассмотрим отображение $F(\lambda, x)$ со значениями в D.

Решение уравнения $x(\lambda) = F(\lambda, x(\lambda))$ (1) назовем s-решением, если последовательность итераций $x_0(\lambda) = x_0$, $x_n(\lambda) = F(\lambda, x_{n-1}(\lambda))$, $n \geqslant 1$, при любом $x_0 \in D$ сходится к $x(\lambda)$ равномерно по λ на каждом компакте из Ω и при фиксированных $\lambda \in \Omega$ сходится равномерно относительно $x_0 \in D$.

Теорема 1. *Пусть на множестве $\bar{\Omega} \times D$ задано отображение $F(\lambda, x)$, при каждом фиксированном $x \in D$ аналитическое в Ω и непрерывное в $\bar{\Omega}$. Тогда, если $F(\lambda, x)$ аналитично в D при $\lambda \in \Gamma (= \partial\Omega)$, и при некотором $\lambda_0 \in \Omega$ оператор $\Phi x = F(\lambda_0, x)$*

имеет s-неподвижную точку $z \in D$, то уравнение (I) имеет s-решение $x(\lambda)$, аналитическое по λ в области Ω.

Доказательство теоремы 1 основано на следующих рассуждениях.

Из соотношения $F(\Omega \times D) \subseteq D$ следует, что итерации $x_n(\lambda)$ определены и аналитичны в области Ω. Из условий теоремы и леммы получаем, что отображение $F(\lambda, x)$ удовлетворяет условию $\| F(\lambda, x) - F(\lambda, y) \| \leqslant q \| x - y \|$ в некоторой окрестности точки $(\lambda_0, z) \in \Omega \times D$ $(0 \leqslant q < 1)$. Поэтому в упомянутой окрестности точки (λ_0, z) последовательность итераций $\{x_n(\lambda)\}_1^\infty$ сходится к некоторой вектор-функции $x(\lambda)$.

Использование аналитичности вектор-функции $x_n(\lambda)$ позволяет доказать фундаментальность последовательности $\{x_n(\lambda)\}_1^\infty$ при всех $\lambda \in \Omega$; предел этой последовательности является аналитическим продолжением $x(\lambda)$. Непосредственно устанавливается равномерная относительно начального приближения $x_0(\lambda) = x_0$ сходимость последовательности $\{x_n(\lambda)\}_1^\infty$.

Теорема 2. *Пусть $\Phi \in H(D)$. Для того чтобы существовала s-неподвижная точка $z \in D$ оператора Φ, необходимо и достаточно, чтобы нашлись $\Omega \in C$, $\Omega \ni 0$, $\Omega \ni 1$ с жордансвой границей и номер n, такие, что область D Ω — поглощает множество $D_n = \Phi^n(D)$, т. е. для любых $y \in D_n$ и $\lambda \in \Omega$ элемент $\lambda y \in D$.*

Для доказательства достаточности заметим, что отображение $F(\lambda, x) = \lambda \Phi^n x$ $(\lambda \in \Omega,\ x \in D)$ удовлетворяет всем условиям теоремы 1. Поэтому уравнение $x(\lambda) = \lambda \Phi^n x(\lambda)$ имеет s-решение в области Ω. Полагая $x^* = x(1)$, получим, что x^* является s-неподвижной точкой оператора Φ^n. Воспользовавшись леммой, легко показать, что x^* является также s-неподвижной точкой оператора Φ.

Необходимость. Условие s-неподвижности точки z обеспечивает существование номера n такого, что $D_n = \Phi^n(D)$ лежит в замкнутом шаре, содержащемся в D. В качестве Ω можно взять круг радиуса $r: 1 < r < 1 + \varepsilon$, где $\varepsilon\ (> 0)$ определяется выбором номера n.

Отсюда для C-звездной области следует

Теорема 3 (ср. [2]). *Пусть D — ограниченная звездная область в X. Оператор $\Phi\ (\in H(D))$ имеет s-неподвижную точку $z \in D$ тогда и только тогда, когда при некотором натуральном n выполняется условие*

$$\rho(\Phi^n(D), \partial D) = \inf_{\substack{y \in \Phi^n(D) \\ x \in \partial D}} \| y - x \| \geqslant \varepsilon > 0.$$

Теорема 3 позволяет, в свою очередь, с помощью предельных переходов указать некоторые условия существования неподвижной точки в D в случае, когда она, вообще говоря, не единственна.

Справедливо следующее утверждение:

Следствие. *Пусть D — C — звездная ограниченная область в X; оператор $\Phi \in H_C(D)$ и отображение $I - \Phi$ является собственным. Тогда в $\bar{D}$ существует, по крайней мере, одна неподвижная точка оператора Φ.*

Замечание 1. Отметим, что если оператор Φ вполне непрерывен, то отображение $I - \Phi$ является собственным.

Замечание 2. Если неподвижная точка z оператора Φ ($\in H_c(D)$) лежит в D, то справедливо неравенство $r(A) \leqslant 1$, где, как и выше, $A = \Phi'(z)$. В этой связи рассмотрим один крайний случай, когда $A = I$.

Теорема 4. *Пусть D — ограниченная область в X; оператор $\Phi \in H(D)$ и $\Phi z = z$, $z \in D$. Тогда, если $\Phi'(z) = I$, то Φ является сужением оператора I на область D.*

В заключение приведем некоторые приложения теорем 3, 4 к теории пространств с индефинитной метрикой.

Пусть B_1, B_2 — банаховы пространства $B = B_1 + B_2$. Рассмотрим линейный оператор A вида

$$A = \begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{pmatrix}, \qquad (2)$$

где $A_{ij} : B_i \to B_j$ — линейные непрерывные операторы; A_{11} — гомеоморфизм; $\| A_{11}A_{12} \| < 1$; $\| A_{11}x_1 + A_{12}x_2 \| \geqslant \| A_{21}x_1 + A_{22}x_2 \|$ при $\| x_1 \| \geqslant \| x_2 \|$, $x_i \in B_i$, $ij = 1,2$. Класс операторов вида (2) представляет собой один из важнейших объектов теории операторов в пространстве с индефинитной метрикой. Центральной проблемой этой теории является проблема существования у оператора указанного класса инвариантного подпространства $E = \{x_1 + x_2 : : x_1 \in B_1,\ x_2 \in B_2,\ \| x_2 \| \leqslant \| x_1 \|\}$ (3). Для случая гильбертовых пространств $B_i = H_i$ при дополнительном условии $(1 - \gamma) \| A_{11}x_1 + + A_{12}x_2 \| \geqslant \| A_{21}x_1 + A_{22}x_2, \|$ (4) $(\| x_1 \| \geqslant x_2 \|,\ 0 < \gamma \leqslant 1$ эта задача решалась в работах [3]—[5].

В общем случае банаховых пространств B_i указанная задача сводится к отысканию неподвижной точки дробно-линейного преобразования, порождаемого оператором A и являющегося аналитическим в единичном гипершаре. Поэтому из теоремы 3 следует.

Теорема 5. *Пусть A — оператор вида* (2), *удовлетворяющий условиям* (4). *Тогда A обладает инвариантным подпространством* вида (3).

Пусть $X = L(B_1, B_2)$ — пространство линейных непрерывных операторов, действующих из B_1 в B_2. Оператор $F : X \to X$ назовем l-аналитическим в нуле, если он допускает представление $F_a = = \sum\limits_{n=0}^{\infty} f(n)(a_n x b_n)^n$ в некоторой окрестности нуля, где $f_n \in L(B_1, B_2)$, $a_1 \in L(B_2, B_1)$, $b_n \in L(B_1, B_1)$. Всякое дробно-линейное преобразование единичного шара в X является l-аналитическим. Для случая, где $B_1 = B_2 = H$ — гильбертово пространство, с помощью специальных конструкций Р. Филлипс доказал [6], что всякий l-аналитический автоморфизм гипершара является дробно-линейным.

Непосредственное применение теоремы 4 позволяет дать простое доказательство этого факта для случая $X = L(H_1, H_2)$, H_i — гильбертовы пространства, $i = 1,2$.

Список литературы: 1. *Иванов А. А.* Неподвижные точки отображений метрических пространств.—Исследования по топологии. II. Зап. науч. семинара ЛОМИ, 1976, **66**, с. 5—103. 2. *Harris L. A.* Shwarts-Pick systems of pseudometrics for domains in a normed linear space.— Advanced in Holomorphy. North-Holland, 1979, p. 345—406. 3. *Хацкевич В. А.* Об одном применении принципа сжатых отображений в теории пространств с индефинитной метрикой.— Функцион. анализ и его прил., 1978, **12**, № 1, с. 88—89. 4. *Азизов Т. Я., Хорошавин С. А.* Об инвариантных подпространствах операторов, действующих в пространствах с индефинитной метрикой.— Функцион. анализ и его прил., 1980, **14**, № 4, с. 1—7. 5. *Соболев А. В. Хацкевич В. А.* О дефинитных инвариантных подпространствах и структуре спектра фокусирующего плюс-оператора.— Функцион. анализ и его прил., 1981, **15**, № 1, с. 87—88. 6. *Phillips R. S.* On symplectic mappings of contraction operators.— Studia Math., 1968, **31**, p. 23—32.

Поступила в редколлегию 09.10.81.