УДК 517.53

А. Ф. ГРИШИН

О МНОЖЕСТВАХ РЕГУЛЯРНОГО РОСТА ЦЕЛЫХ ФУНКЦИЙ. 2*

4. Построение объемлющего правильно распределенного множества.

Пусть $h(\theta)$ — ρ-тригонометрически выпуклый индикатор, $\rho > 0$, $H(re^{i\theta}) = r^\rho h(\theta)$. Тогда риссовская мера субгармонической функции $H(z)$ имеет плотность $\rho r^{\rho-1}\,dr\,ds(\theta)$, где $s(\theta)$ — монотонная функция, которая в точках непрерывности $h'(\theta)$ совпадает с функцией $s(\theta) = h'(\theta) - h'(+0)\int\limits_0^\theta h^2(\varphi)\,d\varphi$.

Лемма 2. *Пусть* $H(re^{i\theta}) = r^\rho h(\theta)$, *а* E — *ограниченное борелевское множество. Пусть* $E_\theta = E \cap \{z : \arg z = \theta\}$, $\operatorname{mes} E_\theta = 0$ *для любого* θ. *Тогда* $\mu_H(E) = 0$.

Доказательство. Пусть $F \subset C(0, R)$. Тогда $\mu_H(E) =$
$= \rho \iint\limits_{C(0,R)} \chi_E(z)\, r^{\rho-1}\,dr\,ds(\theta) = \rho \int\limits_0^{2\pi}\left(\int\limits_0^R \chi_E(re^{i\theta})\, r^{\rho-1}\,dr\right)ds(\theta)$. Так как во внутреннем интеграле подынтегральная функция равна нулю почти всюду, то $\mu_H(E) = 0$.

Пусть $F(x)$, где x пробегает множество $A \subset R^n$, — семейство множеств в плоскости. Назовем семейство $F(x)$ непрерывным в точке x_0, если для каждого $\sigma > 0$ найдется такое $\delta > 0$, что при $\|x - x_0\| < \delta$, $x \in A$, будет справедливо соотношение $F(x)\,\Delta F(x_0) \subset (\partial F(x_0))_\sigma$, где $F(x)\,\Delta F(x_0) = (F(x) \setminus F(x_0)) \cup \cup (F(x_0) \setminus F(x))$, $\partial F(x_0)$ — граница $F(x_0)$.

Лемма 3. *Пусть* $K(x)$ — *непрерывное на множестве* $A \subset R^n$ *семейство нормальных компактов относительно меры* μ_H (*т. е. таких, что* $\mu_H(\partial K(x)) = 0$. *Пусть* $d_E(K) \leqslant \mu_H(K)$ *для любого*

---

* Сообщ. 1 опубликовано в вып. 40 данного сб.

компакта K. Тогда функция $d_E(K(x))$ непрерывная на множестве A.

Доказательство. Пусть $x_0 \in A$, $\varepsilon > 0$. Так как $\mu_H(\partial K(x_0)) = 0$, то существует $\sigma > 0$ такое, что $\mu_H((\partial K(x_0))_\sigma < \varepsilon$. В силу непрерывности семейства $K(x)$ существует $\delta > 0$ такое, что при $\|x - x_0\| < \delta$, $x \in A$ $K(x) \Delta K(x_0) \subset (\partial K(x_0))_\sigma$. Так как $K(x) \subset K(x_0) \cup (K(x) \setminus K(x_0)) \subset K(x_0) \cup (\partial K(x_0))_\sigma$, то $d_E(K(x)) \leqslant \leqslant d_E(K(x_0)) + d_E((\partial K(x_0))_\sigma) \leqslant d_E(K(x_0)) + \mu_H((\partial K(x_0))_\sigma) \leqslant \leqslant d_E(K(x_0)) + \varepsilon$. С другой стороны $K(x_0) \subset K(x) \cup (K(x_0) \setminus K(x)$. И далее аналогичным способом получим $d_E(K(x_0)) \leqslant d_E(K(x)) + + \varepsilon$. Поэтому $\lim\limits_{x \to x_0} d_E(K(x)) = d_E(K(x_0))$.

Лемма 4. *Пусть $K(x)$ — непрерывное семейство нормальных относительно меры μ_H компактов, где параметр x изменяется на компакте $S \subset R^n$. Тогда существует функция $\varepsilon(r) \downarrow 0$ при $r \to$ ∞ такая, что $n_E(K^r(x)) \leqslant (d_E(K(x)) + \varepsilon(r))\, r^{\rho(r)}$, если $\forall K\, d_E(K) \leqslant \mu_H(K)$.*

Доказательство. Обозначим

$$\psi(x, r) = \left[\frac{n_E(K^r(x))}{r^{\rho(r)}} - d_E(K(x))\right]^+.$$

Докажем, что функция $\psi(x, r)$ равномерно на множестве S стремится к нулю при $r \to \infty$. Если это не так, то существуют положительное число η, последовательность $x_n \in S$ и последовательность $r_n \to \infty$ такие, что $\psi(x_n, r_n) \geqslant \eta$. Не ограничивая общности, можно считать, что $x_n \to x_0$. Так как для любого $\sigma > 0$ существует $N(\sigma)$ такое, что при $n > N(\sigma)$ $K(x_n) \subset K_\sigma(x_0)$, то при таких n

$$\frac{n_E(K_\sigma^{r_n}(x_0))}{r_h^{\rho(r_n)}} - d_E(K(x_n)) \geqslant \eta.$$

Перейдем к верхнему пределу при $n \to \infty$ и, пользуясь непрерывностью $d_E(K(x))$, получим $d_E(K_\sigma(x_0)) - d_E(K(x_0)) \geqslant \eta$. Переходя к пределу при $\sigma \to 0$, получим противоречие $0 \geqslant \eta$. Таким образом, функция $\psi(x, r)$ равномерно на множестве S стремится к нулю при $r \to$ ∞. Положив $\varepsilon(r) = \sup\limits_{t \geqslant r} \sup\limits_{x \in S} \psi(x, t)$, получим требуемую в лемме функцию.

Замечание 1. Обозначим через $D(\alpha, \beta, \theta_1, \theta_2)$ $\alpha \leqslant \beta$, $\theta_1 \leqslant \theta_2$, $\theta_2 - \theta_1 \leqslant 2\pi$ замкнутую область, лежащую в кольце $\alpha \leqslant |z| \leqslant \beta$, границей которой является дуга окружности $|z| = \alpha$, $\theta_1 \leqslant \arg z \leqslant \leqslant \theta_2$, дуга окружности $|z| = \beta$, расположенная между прямыми, проведенными через точки $\alpha e^{i\theta_1}$ и $\alpha e^{i\theta_2}$ под углом $\frac{1}{4}\pi$ к радиусам-векторам этих точек и отрезки этих прямых, расположенные в кольце $\alpha \leqslant |z| \leqslant \beta$. Обозначим через $K(z, \alpha)$ — замкнутый круг с центром в точке z радиуса α. Пусть E — счетное множество с единственной точкой сгущения на бесконечности такое, что $d_E(K) \leqslant \mu_H(K)$ для любого компакта K. Обозначим через S множество $S = \{\alpha, \beta, \theta_1, \theta_2\}: 0{,}5 \leqslant \alpha \leqslant \beta \leqslant 1{,}5, \quad 0 \leqslant \theta_1 \leqslant \theta_2 \leqslant \leqslant 4\pi, \ \theta_2 - \theta_1 \leqslant 2\pi\}$. По лемме 2 множества $D(\alpha, \beta, \theta_1, \theta_2)$, $K(z, \alpha)$ нормальны относительно меры μ_H, по лемме 3 функции $d_E(D(\alpha, \beta, \theta_1, \theta_2))$, $d_E(K(e^{i\theta}, \alpha))$, непрерывны. По лемме 4 существует функция $\varepsilon(r) \downarrow 0$ при $r \to \infty$ такая, что $n_E(D^r(\alpha, \beta, \theta_1, \theta_2)) \leqslant (d_E(D(\alpha, \beta, \theta_1, \theta_2)) + \varepsilon(r))\, r^{\rho(r)}$ при $(\alpha, \beta, \theta_1, \theta_2) \in S$; $n_E(K(z, \alpha r)) \leqslant (d_E(K(e^{i\theta}, \alpha)) + \varepsilon(r))\, r^{\rho(r)}$ при $\alpha \leqslant 0{,}5$, $z = re^{i\theta}$.

Лемма 5. *Пусть при* $r \to \infty$ $\varepsilon(r) \downarrow 0$, $\varphi(r) \uparrow \infty$, $\varphi(a) > 0$, φ — *дифференцируемая функция,* $\varepsilon_1(r) = \dfrac{\sup\limits_{0 \leqslant t \leqslant r} \varepsilon(t)\varphi(t)}{\varphi(r)}$. *Тогда* $\varepsilon_1(r) \geqslant \varepsilon(r)$, $\varepsilon_1(r) \downarrow 0$, $\varepsilon_1(r)\varphi(r)$ — *неубывающая функция, причем* $\dfrac{|\varepsilon_1'(r)|}{\varepsilon_1(r)} \leqslant \dfrac{\varphi'(r)}{\varphi(r)}$, *где* $-\varepsilon_1'(r) = \lim\limits_{h \to 0} \dfrac{\varepsilon_1(r) - \varepsilon_1(r+h)}{h}$. *В частности, если* $\varphi(r) = \ln r$ *то* $\dfrac{\varepsilon_1'(r)}{\varepsilon_1(r)} \leqslant \dfrac{1}{r \ln r}$ *при* $r \geqslant 2$.

Доказательство. Из определения $\varepsilon_1(r)$ следует, что $\varepsilon_1(r)\varphi(r)$ — неубывающая функция и что $\varepsilon_1(r) \geqslant \varepsilon(r)$ при $r \geqslant a$. Далее имеем при $a \leqslant r_1 < r_2$

$$\varepsilon_1(r_2) = \frac{\max\,[\varepsilon_1(r_1)\varphi(r_1), \sup\limits_{r_1 \leqslant t \leqslant r_2} \varepsilon(t)\varphi(t)]}{\varphi(r_2)} \leqslant \max\left[\varepsilon_1(r_1)\frac{\varphi(r_1)}{\varphi(r_2)},\ \varepsilon(r_1)\right].$$

Учитывая соотношения $\varepsilon(r_1) \leqslant \varepsilon_1(r_1)$, $\varphi(r_1) \leqslant \varphi(r_2)$, получим, что $\varepsilon_1(r_2) \leqslant \varepsilon_1(r_1)$. Кроме того, если ε — произвольное положительное число, то, выбрав r_1 так, чтобы выполнялось неравенство $\varepsilon(r_1) < < \varepsilon$, затем выбираем R так, чтобы при $r_2 > R$ выполнялось неравенство $\varepsilon_1(r_1)\dfrac{\varphi(r_1)}{\varphi(r_2)} < \varepsilon$. Тогда при $r_2 > R$ будет выполняться неравенство $\varepsilon_1(r_2) < \varepsilon$. Таким образом, $\varepsilon_1(r) \downarrow 0$ при $r \to \infty$. Из монотонности функций $\varepsilon_1(r)$ и $\varepsilon_1(r)\varphi(r)$ следует, что при $a \leqslant \leqslant r_1 < r_2$ выполняются неравенства $\varepsilon_1(r_1)\left[\dfrac{\varphi(r_1)}{\varphi(r_2)} - 1\right] \leqslant \varepsilon_1(r_2) - - \varepsilon_1(r_1) \leqslant 0$. Разделим все части неравенств на $r_2 - r_1$ и попеременно перейдем к нижнему пределу сначала при $r_1 \to r_2$, а затем — при $r_2 \to r_1$. Получим, что $\dfrac{|\varepsilon_1'(r)|}{\varepsilon_1(r)} \leqslant \dfrac{\varphi'(r)}{\varphi(r)}$.

Лемма 6. *Пусть* $\varepsilon(r) \downarrow 0$ *при* $r \to \infty$, $\rho(r)$ — *уточненный порядок,* $\rho > 0$. *Тогда существует покрытие области* $Z \setminus C(0, r)$ *областями* $D_j = D^{t_j}(1, \beta_j, \theta_{1j}, \theta_{2j})$ *такое, что выполняются условия:* 1) $\overset{0}{D}_{j_1} \cap \overset{0}{D}_{j_2} = \varnothing$ при $j_1 \neq j_2$, $\overset{0}{D}_j$ — внутренность D_j;

2) $\lim\limits_{j\to\infty}(\beta_j-1)=\lim\limits_{j\to\infty}(\theta_{2j}-\theta_{1j})=0$; 3) $\lim\limits_{r\to\infty}\frac{1}{r^{\rho(r)}}\sum\limits_{D_j\bigcap C(0,\,r)\neq\varnothing}\max(1,\ \varepsilon(t_j)\,t_j^{\rho(t_j)})=0$.

Доказательство. Пусть $\varphi(t)$, $\varphi(0)=0$,— бесконечно большая, непрерывно дифференцируемая функция с положительной производной, а $\psi(t)\geqslant 1$ — монотонно возрастающая бесконечно большая функция. Пусть s_j — корень уравнения $\varphi(s_j)=j$. Разобьем плоскость Z на кольца окружностями $|z|=s_j$. Пусть $\nu_{j,\,k}=k\frac{2\pi}{[\psi(s_j)]}$. Разобьем кольцо $K_j=\{z:s_j\leqslant|z|\leqslant s_{j+1}\}$ на области $D(s_j,\ s_{j+1},\ \nu_{j,\,k},\ \nu_{j,\,k+1})$, $k=0,\ 1,\ \ldots,\ [\psi(s_j)]-1$. Перенумеруем полученные области следующим образом. Сначала перенумеруем области в кольце K_1 в порядке возрастания величин ν_{1k}, затем продолжим нумерацию в кольце K_2 и так далее. Получим систему областей D_j. Для так построенной системы областей условие 1 леммы выполняется. Функцию $\varepsilon(t)$, фигурирующую в условиях леммы, не ограничивая общности, можно считать удовлетворяющей неравенству $|\varepsilon'(t)|\leqslant\varepsilon(t)\frac{1}{t\ln t}$ при $t\geqslant 2$ (иначе возьмем мажоранту с требуемыми свойствами). Возьмем $\psi(t)=$ $=(\varepsilon(t))^{-1/3}$; $\varphi'(t)=\frac{t\ln t\rho'(t)+\rho(t)}{t\sqrt[3]{\varepsilon(t)}}$ при $t\geqslant 2$. Так как $\psi(t)\uparrow\infty$, то $\nu_{j,\,k+1}-\nu_{j,\,k}\to 0$ при $j\to\infty$. Кроме того, имеем $1=\varphi(s_{j+1})-$ $-\varphi(s_j)=\varphi'(\xi)(s_{j+1}-s_j)$. Откуда

$$\frac{s_{j+1}-s_j}{s_{j+1}}\sim\frac{\xi\sqrt[3]{\varepsilon(\xi)}}{(\xi\ln\xi\rho'(\xi)+\rho(\xi))\,s_{j+1}}\xrightarrow[j\to\infty]{}0.$$

Из предположений относительно $\varepsilon(t)$ следует, что

$$s_{j+1}-s_j\sim\frac{\sqrt[3]{\varepsilon(s_j)}}{\rho}\,s_j\ \ (j\to\infty). \tag{22}$$

Таким образом, условие 2 леммы также выполняется. Так как $\varepsilon(t)\,t^{\rho(t)}\uparrow\infty$ при $t\to\infty$, то $\sum\limits_{D_j\subset C(0,\,s_N)}\varepsilon(s_j)\,s_j^{\rho(s_j)}=\int\limits_0^{s_{N-1}}[\psi(t)]\,\varepsilon(t)\times$ $\times\, t^{\rho(t)}\,d[\varphi(t)]\leqslant\int\limits_0^{s_N}\psi(t)\,\varepsilon(t)\,t^{\rho(t)}\varphi'(t)\,dt=\int\limits_0^{s_N}\sqrt[3]{\varepsilon(t)}\,(t^{\rho(t)})'\,dt=o(s_N^{\rho(s_N)})$ $(N\to\infty)$.

Из полученного соотношения следует, что условие 3 леммы выполняется. Если применить изложенное доказательство к функции $\varepsilon_1(t)=\max(t^{-\rho(t)},\ \varepsilon(t))$, то получим доказательство леммы.

Пусть U — множество интервалов плотности ноль [1, гл. II] Тогда функция $\varepsilon_U(r) = \sup_{t \geq r} \frac{1}{t} \operatorname{mes}(U \cap [0, t])$ монотонно стремится к нулю при $r \to \infty$.

Лемма 7. *Пусть U — множество интервалов линейной плотности ноль, K — произвольное положительное число, $\rho(r)$ — уточненный порядок, $\rho > 0$. Тогда существуют положительное число R_0, функция $\varepsilon_0(r) \downarrow 0$ при $r \to \infty$ и последовательность положительных чисел r_n такие, что 1) $r_n \bar{\in} U$; 2) $r_{n+1} - r_n \geq d r_n^{1-\rho(r_n)}$; $d = \frac{1}{4K\rho}$; 3) если последовательность R_m, $m \geq 1$, такова, что $R_1 \geq R_0$, $R_{m+1} = (1 + \varepsilon(R_m)) R_m$, где $\varepsilon(r) \geq \varepsilon_0(r)$, то число точек n_m последовательности r_n, попавших в интервал (R_m, R_{m+1}), будет больше, чем $K\rho \int\limits_{R_m}^{R_{m+1}} t^{\rho(t)-1}\,dt$.*

Доказательство. Пусть $\varepsilon_1(r) = \max\left(\varepsilon_U(r), \frac{1}{\ln r}\right)$, $\varepsilon_2(r) = \frac{\sup_{2 \leq t \leq r} \varepsilon_1(t) \ln t}{\ln r}$, $\varepsilon_0(r) = 2\varepsilon_2(r)$. Пусть r_1 — первая точка на полуоси $[2, \infty)$, не принадлежащая множеству U. Пусть уже выбраны точки $r_1, r_2, \ldots, r_s$. Тогда в качестве точки r_{s+1} возьмем первую точку на полуоси $[r_s + d r_s^{1-\rho(r_s)}, \infty)$, не принадлежащую множеству U. Продолжая этот процесс до бесконечности, получим последовательность r_n. Пусть $\varepsilon(r) \geq \varepsilon_0(r)$, R_0 — некоторое число, которое выберем позже, а пока будем считать, что $\varepsilon_0(r) \leq 1$ при $r \geq R_0$. Пусть $R_1 \geq R_0$, $R_{m+1} = (1 + \varepsilon(R_m)) R_m$. Не ограничивая общности, можно считать, что $\frac{R_{m+1}}{R_m} \leq q = 2^{\frac{1}{\rho+2}}$. Если это не так, то рассмотрим последовательность точек $q_1 R_m$, $q_1^2 R_m$, $q_1^2 R_m$, $\ldots$, $q_1^\nu R_m$, где $\nu = \left[\log_{q_1} \frac{R_{m+1}}{R_m}\right] - 1$, $q_1 = \sqrt{q}$.

В каждый интервал (R_m, R_{m+1}), для которого $R_{m+1} > qR_m$, вставим последовательность точек $q_1 R_m, \ldots, q_1^\nu R_m$. Получим новую последовательность точек, которую снова обозначим R_m. Для этой последовательности будут выполняться условия $\frac{R_{m+1} - R_m}{R_m} = \varepsilon(R_m) \geq \varepsilon_0(R_m)$, $\frac{R_{m+1}}{R_m} \leq q$. Оценим n_m — число точек r_n, попавших в интервал (R_m, R_{m+1}). Пусть $r_{s+1} = r_s + d r_s^{1-\rho(r_s)} + l_s$. Это означает, что полусегмент $[r_s + d r_s^{1-\rho(r_s)}, r_s + d r_s^{1-\rho(r_s)} + l_s]$ покрыт множеством U. Обозначим через l_s^m длину пересечения указанного выше полусегмента с сегментом $[R_m, R_{m+1}]$. Пусть $r_{\bar{n}}$ — первая точка последовательности r_n, попавшая в интервал (R_m, R_{m+1}). Если R_0 достаточно велико, то такая точка существует. Длина не покрытой множеством U части сегмента $[R_m, r_{\bar{n}}]$ не превышает $dR_m^{1-\rho(R_m)}$. Поэтому $\sum_{n=\bar{n}}^{\bar{n}+n_m} dr_n^{1-\rho(r_n)} \geqslant R_{m+1} - R_m - dR_m^{1-\rho(R_m)} - \sum_{n=\bar{n}-1}^{\bar{n}+n_m} l_n^m \geqslant \varepsilon(R_m) R_m - dR_m^{1-\rho(R_m)} - \text{mes}\,(U \cap [R_m, R_{m+1}]) \geqslant \varepsilon(R_m) R_m - dR_m^{1-\rho(R_m)} - \varepsilon_U(R_{m+1}) R_{m+1} \geqslant \varepsilon(R_m) \times R_m - dR_m^{1-\rho(R_m)} - \varepsilon_U(R_m)(R_m + \varepsilon(R_m) R_m) \geqslant \frac{1}{2}\varepsilon(R_m) \times R_m - \varepsilon_U(R_m)\varepsilon(R_m) R_m - dR_m^{1-\rho(R_m)}$. Так как при $\bar{n} \leqslant n \leqslant \bar{n} + n_m$ $r_n^{1-\rho(r_n)} \leqslant \max\limits_{R_m \leqslant R \leqslant R_{m+1}} R^{1-\rho(R)}$, а $\int\limits_{R_m}^{R_{m+1}} t^{\rho(t)-1}\,dt = \varepsilon(R_m) R_m \times \bar{R}^{1-\rho(\bar{R})}$, где $\bar{R}$ — некоторая точка интервала (R_m, R_{m+1}), то

$$n_m \geqslant \frac{1}{d} \frac{\frac{1}{2}\varepsilon(R_m) - \varepsilon_U(R_m)\varepsilon(R_m) - dR_m^{-\rho(R_m)}}{\max\limits_{R_m \leqslant R \leqslant R_{m+1}} R^{1-\rho(R)}\varepsilon(R_m)\bar{R}^{\rho(t)-1}} \int\limits_{R_m}^{R_{m+1}} t^{\rho(t)-1}\,dt = \frac{1}{d} \times$$

$$\times \frac{\frac{1}{2} - \varepsilon_U(R_m) - d/\varepsilon(R_m) R_m^{\rho(R_m)}}{\max\limits_{R_m \leqslant R \leqslant R_{m+1}} R^{1-\rho(R)}\bar{R}^{\rho(\bar{R})-1}} \int\limits_{R_m}^{R_{m+1}} t^{\rho(t)-1}\,dt.$$ Так как в силу выбора функции $\varepsilon_0(r)$ $\lim\limits_{r\to\infty}\varepsilon(r) r^{\rho(r)} = \infty$, а $\lim\limits_{r\to\infty} \frac{\bar{R}^{1-\rho(\bar{R})}}{\max\limits_{r \leqslant R \leqslant r'} R^{1-\rho(R)}} > \frac{1}{2}$ при $r' \leqslant qr$, $\bar{R} \in (r, r')$, то, если R_0 взять достаточно большим, будет справедливо неравенство $n_m > K\rho \int\limits_{R_m}^{R_{m+1}} t^{\rho(t)-1}\,dt$. Выбрав R_0 соответствующим образом, завершим доказательство леммы.

Лемма 8. *Пусть F — множество, имеющее относительно уточненного порядка $\rho(r)$, ρ — целое, положительное, угловую плотность $\Delta(\vartheta, \theta)$, которая для неособых точек равна $s(\theta) - s(\vartheta)$, причем $\int\limits_0^{2\pi} e^{i\rho\theta}\,ds(\theta) = 0$. Пусть μ_F — мера с единичными массами, сосредоточенными в точках множества F. Пусть q — произвольное число из интервала $(0, 1)$. Тогда функция $\delta(R, \alpha) = \frac{1}{R^{\rho(R)-\rho}} \iint\limits_{K(R,\alpha)} \frac{d\mu_F(\zeta)}{\zeta^\rho}$, где $K(R, \alpha) = \{\zeta\colon \alpha R \leqslant |\zeta| \leqslant R$*

при $\alpha > 1$ *и* $R \leqslant |\zeta| \leqslant \alpha R$ *при* $\alpha \geqslant 1\}$, *равномерно на сегменте* $\left[q, \frac{1}{q}\right]$ *стремится к нулю при* $R \to \infty$.

Доказательство. Пусть $L(R) = R^{\rho(R)-\rho}$, ν — мера с плотностью $\rho r^{\rho-1}\, dr\, ds(\theta)$. Тогда (см. [7]) $\nu = T_1 \lim\limits_{R\to\infty} \mu_{F,R}$, где $\mu_{F,R}(D) = \frac{\mu_F(D^R)}{R^{\rho(R)}}$. Предположим для определенности $\alpha > 1$. Кольцо $K = K(1, \alpha)$ — есть нормальное множество для меры ν, поэтому [3, теорема 0.5′] $\nu_K = T_1 \lim\limits_{R\to\infty} \mu_{F,R,K}$, где инденс K в данном случае означает сужение меры на кольцо K. Функция $z^{-\rho}$ с кольца K продолжается до финитной бесконечно дифференцируемой функции $\beta(z)$, $z = x + iy$, по переменным x и y.

Имеем $\lim\limits_{R\to\infty} \delta(R, \alpha) = \lim\limits_{R\to\infty} \frac{1}{L(R)} \iint\limits_{K(R,\alpha)} \frac{d\mu_F(\zeta)}{\zeta^\rho} = \lim\limits_{R\to\infty} \iint\limits_K z^{-\rho} \times$ $\times\, d\mu_{F,R}(\zeta) = \lim\limits_{R\to\infty} \iint\limits_Z \beta(z)\, d\mu_{F,R,K}(z) = \iint\limits_Z \beta(z)\, d\nu_K(z) = \rho \iint\limits_K z^{-\rho} \times$ $\times\, r^{\rho-1}\, dr\, ds(\theta) = \rho \int\limits_1^\alpha \frac{dr}{r} \int\limits_0^{2\pi} e^{-i\rho\theta}\, ds(\theta) = 0.$

Далее нужно доказать, что предел равномерный на сегменте $\left[q, \frac{1}{q}\right]$. Если это не так, то существуют положительное число ε и последовательности $R_n \to \infty$, $\alpha_n \in \left[q, \frac{1}{q}\right]$ такие, что $\delta(R_n, \alpha_n) \geqslant \varepsilon$. Можно считать, что $\alpha_n \to \alpha_0$. Кроме того, по лемме 4 существует такая функция $\varepsilon(r) \downarrow 0$ при $z \to \infty$, что для любых $\alpha, \beta \in \left[q, \frac{1}{q}\right]$ будет выполняться неравенство $\mu_F(K^r(\alpha, \beta)) \leqslant [\Delta(\beta^\rho - \alpha^\rho) + \varepsilon(r)]\, r^{\rho(r)}$, где $K^r(\alpha, \beta) = \{\zeta : \alpha r \leqslant |\zeta| \leqslant \beta r\}$, $\Delta = s(2\pi + 0) - s(+0)$. Пусть A_n — полуоткрытое кольцо, состоящее из тех точек ζ, для которых $|\zeta|$ лежит между $\alpha_0 R_n$ и $\alpha_n R_n$, причем окружность $|\zeta| = \alpha_n R_n$ не входит в A_n. Тогда $\mu_F(A_n) \leqslant [\Delta|\alpha_0^\rho - \alpha_n^\rho| + \varepsilon(R_n)]\, R_n^{\rho(R_n)}$. Поэтому существует число n_0 такое, что при $n > n_0$ будет справедливо неравенство

$$\frac{1}{L(R_n)} \left| \iint\limits_{A_n} \frac{d\mu_F(\zeta)}{\zeta^\rho} \right| \leqslant \frac{1}{q^\rho} \frac{\mu_F(A_n)}{R_n^\rho L(R_n)} < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Учитывая, что $\delta(R_n, \alpha_n) \geqslant \varepsilon$, получим, что

$$\frac{1}{L(R_n)} \left| \iint\limits_{K(R_n,\alpha_0)} \frac{d\mu_F(\zeta)}{\zeta^\rho} \right| \geqslant \frac{\varepsilon}{2} \text{ при } n > n_0.$$

Получили противоречие. Лемма 8 доказана.

Пусть E — счетное множество с единственной точкой сгущения на бесконечности, а $\rho(r)$ — уточненный порядок. Обозначим

$$\Phi_{E,\,z}(\alpha)=\frac{(n_E(C(z,\alpha r))-1)^+}{r^{\rho(r)}},\quad r=|z|.$$

Если $f(z)$ — целая функция, а $\rho(r)$ — ее уточненный порядок, то $n_f(C(z,\ \alpha r))=n_E(C(z,\ \alpha r))$, $\Phi_{f,\,z}(\alpha)=\Phi_{E,\,z}(\alpha)$, где E — множество корней функции $f(z)$.

Лемма 9. *Пусть E_1 и E_2 такие множества, что*

$$\lim_{\delta\to 0}\sup_z\int_0^\delta\frac{\Phi_{E_1,\,z}(\alpha)}{\alpha}\,d\alpha=\lim_{\delta\to 0}\sup_z\int_0^\delta\frac{\Phi_{E_2,\,z}(\alpha)}{\alpha}\,d\alpha=0,$$

причем множество кругов $C\left(z,\ r\exp\left(-r^{\frac{1}{2}\rho(r)}\right)\right)$, $z\in E_2$ состоит из непересекающихся кругов и не пересекается с множеством E_1. Тогда

$$\lim_{\delta\to 0}\sup_z\int_0^\delta\frac{\Phi_{E_1\bigcup E_2,\,z}(\alpha)}{\alpha}\,d\alpha=0.$$

Доказательство. Имеем неравенство

$$\Phi_{E_1\bigcup E_2,\,z}(\alpha)\leqslant\Phi_{E_1,\,z}(\alpha)+\Phi_{E_2,\,z}(\alpha)+\frac{1}{r^{\rho(r)}}.$$

Далее

$$\int_0^\delta\frac{\Phi_{E_1\bigcup E_2,\,z}(\alpha)}{\alpha}\,d\alpha\leqslant\int_0^{\alpha(r)}\frac{\Phi_{E_1\bigcup E_2,\,z}(\alpha)}{\alpha}\,d\alpha+$$
$$+\int_{\alpha(r)}^\delta\frac{\Phi_{E_1,\,z}(\alpha)}{\alpha}\,d\alpha+\int_{\alpha(r)}^\delta\frac{\Phi_{E_2,\,z}(\alpha)}{\alpha}\,d\alpha+\frac{\ln\delta+r^{\frac{3}{4}\rho(r)}}{r^{\rho(r)}}$$

где $\alpha(r)=\exp\left(-r^{\frac{3}{4}\rho(r)}\right)$. Пусть $\alpha_1(r)=\exp\left(-r^{\frac{1}{2}\rho(r)}\right)$, пусть $\zeta\in C(z,\ r\alpha(r))$. Тогда из свойств уточненного порядка следует существование такого числа R_1, что при $r>R_1$ будет справедливо неравенство $|\zeta|\alpha_1(|\zeta|)>2r\alpha(r)$. Из этого неравенства и условий леммы следует, что если в круге $C(z,\ r\alpha(r))$ существует точка $\zeta\in E_2$, то в этом круге нет других точек множества $E_1\cup E_2$. Поэтому при $|z|>R_1$ и $\alpha\leqslant\alpha(r)$ справедливо равенство $\Phi_{E_1\bigcup E_2,\,z}(\alpha)=\Phi_{E_1,\,z}(\alpha)$. Таким образом, при $|z|>R_1$ имеет место неравенство

$$\int_0^\delta\frac{\Phi_{E_1\bigcup E_2,\,z}(\alpha)}{\alpha}\,d\alpha\leqslant\int_0^\delta\frac{\Phi_{E_1,\,z}(\alpha)+\Phi_{E_2,\,z}(\alpha)}{\alpha}\,d\alpha+r^{-\frac{1}{4}\rho(z)}.\qquad(23)$$

Пусть ε — произвольное положительное число. Существует $\delta_1 > 0$ такое, что при $\delta < \delta_1$ интеграл в правой части неравенства (23) будет меньше $\frac{1}{2}\varepsilon$. Кроме того, существует число R_2 такое, что при $r > R_2$ справедливо неравенство $r^{-\frac{1}{4}\rho(r)} < \frac{1}{2}\varepsilon$. Следовательно, при $|z| > R = \max(R_1, R_2)$ и при $\delta < \delta_1$ имеет место оценка

$$\int_0^\delta \frac{\Phi_{E_1 \cup E_2, z}(\alpha)}{\alpha}\, d\alpha < \varepsilon. \tag{24}$$

Так как в множестве $E_1 \cup E_2$ нет кратных точек, то существует такое положительное число δ_2, что при $\delta < \delta_2$, $|z| \leqslant R$ интеграл в левой части неравенства (24) обратится в ноль. Таким образом, при $\delta < \delta_3 = \min(\delta_1, \delta_2)$ оценка (24) будет справедлива для всех z. Лемма 9 доказана.

Теорема 5. *Пусть $\rho(r)$, $\rho > 0$ — уточненный порядок. Пусть E — счетное множество, $H(re^{i\theta}) = r^\rho h(\theta)$, $d_E(K) \leqslant \mu_H(K)$ для любого компакта K. Тогда существует целая функция $\varphi(z)$ вполне регулярного роста с индикатором $h(\theta)$ относительно уточненного порядка $\rho(r)$, которая обращается в ноль на множестве E. Причем функцию $\varphi(z)$ можно найти такую, что будут выполняться дополнительные условия. 1) У функции $\varphi(z)$ нет кратных корней. 2) Пусть $\rho' > \rho - 1$ (ρ' — произвольное число, удовлетворяющее этому неравенству, а функция $\varphi(z)$ будет зависеть от выбора ρ', а $E_1 = \{\lambda_n\}$, $|\lambda_1| \leqslant |\lambda_2| \leqslant \ldots$ корни $\varphi(z)$, не принадлежащие множеству E. Тогда круги $C(\lambda_n, |\lambda_n|^{-\rho'})$ не пересекаются между собой и не пересекают множество E. Кроме того, существует положительное число d такое, что выполняются неравенства $|\lambda_{n+1}| \geqslant |\lambda_n| + d|\lambda_n|^{1-\rho(\lambda_n)}$.*

Доказательство. Опишем около каждой точки $z \in E$ открытый круг $C(z, 2r^{-\rho'})$ и обозначим через U круговую проекцию этого множества на луч $(0, \infty)$. В силу неравенства $\rho' > \rho - 1$ открытое множество U имеет нулевую плотность. Пусть $s(\theta)$ — монотонная функция, которая в точках непрерывности $h'(\theta)$ задается равенством $s(\theta) = h'(\theta) - h'(-0) + \rho^2 \int_0^\theta h(\varphi)\, d\varphi$. Как доказано в [1, гл. 1, § 16], при целом ρ имеет место равенство $\int_0^{2\pi} e^{i\rho\theta} ds(\theta) = 0$. Пусть $\Delta = s(2\pi + 0) - s(+0)$, $K = 6\Delta + 3$, $d = \frac{1}{4K\rho}$. Пусть число R_0, функция $\varepsilon_0(r)$ и последовательность r_n — те объекты, которые конструируются в лемме 7 для заданных множества U, числа K и уточненного порядка $\rho(r)$. Существует число T_1 такое, что если $z_1 = r_1 e^{i\theta_1}$ и $z_2 = r_2 e^{i\theta_2}$ таковы, что $r_1 \geqslant T_1$, $r_1 \overline{\in} U$, $r_2 \overline{\in} U$, $r_2 \geqslant r_1 + d r_1^{1-\rho(r_1)}$, то круги $C(z_1, r_1^{-\rho'})$, $C(z_2, r_2^{-\rho'})$ не пересекаются и не пересекают множества E. Пусть $\varepsilon_1(r)$ та функция для множества E, существование которой утверждается в замечании 1. Пусть $\varepsilon_2(r) = \max(\varepsilon_1(r), \varepsilon_0(r))$. при $r \geqslant 2$, а $\varepsilon_3(r) = \dfrac{\sup\limits_{2 \leqslant t \leqslant r} \varepsilon_2(t) \ln t}{\ln r}$. Пусть в лемме 6 построение системы областей D_j ведется с помощью функций $\varphi(t)$ и $\psi(t)$, которые определяются с помощью функции $\varepsilon_3(t)$. Подвергнем систему D_j следующему преобразованию. Граница D_j состоит из двух отрезков и двух дуг окружностей. Область D_j получается из D_j удалением некоторых граничных отрезков, дуг окружностей или угловых точек. Это удаление можно произвести так, чтобы области $\tilde{D}_j$ не пересекались и чтобы $\bigcup D_j = \bigcup \tilde{D}_j$. Так, полученную систему областей $\tilde{D}_j$ вновь будем обозначать D_j. Для системы D_j будут выполняться следующие соотношения:

$$n_E(D_j) \leqslant t_j^{\rho(t_j)} (d_E(D(1, \beta_j, \theta_{1j}, \theta_{2j})) + \varepsilon_3(t_j)); \tag{25}$$

$$\lim_{r \to \infty} \frac{1}{r^{\rho(r)}} \sum_{D_j \bigcap C(0, r) \neq \Phi} \max(1, \varepsilon_3(t_j) t_j^{\rho(t_j)}) = 0. \tag{26}$$

Если $K_j = \{z\colon s_j \leqslant |z| \leqslant s_{j+1}\}$ — система колец, разбиением которых получается система D_j, то согласно (22) имеет место соотношение $s_{j+1} - s_j \sim \frac{1}{\rho} \sqrt[3]{\varepsilon_3(s_j)}\, s_j$. Существует число T_2 такое, что если $s_j \geqslant T_2$, то $s_{j+1} - s_j \geqslant \varepsilon_0(s_j) s_j$. В дальнейшем будем считать что $s_j \geqslant T_3 = \max(R_0, T_1, T_2)$. Тогда по лемме 7 в каждом интервале (s_j, s_{j+1}) будет больше, чем $(6\Delta + 3)\rho \int\limits_{s_j}^{s_{j+1}} t^{\rho(t)-1} dt$ точек r_n. Пусть n_j^0 — число точек r_n с номерами, кратными трем, попавших в интервал $(s_j; s_{j+1})$. Тогда $n_j^0 > 2\Delta \int\limits_{s_j}^{s_{j+1}} t^{\rho(t)-1} dt$. Пусть n_j — наименьшее целое неотрицательное число такое, что $n_E(D_j - n_j \leqslant t_j^{\rho(t_j)} d_E(D(1, \beta_j, \theta_{1j}, \theta_{2j}))$. Из (25) следует, что $0 \leqslant n_j \leqslant \varepsilon_3(t_j) t_j^{\rho(t_j)}$. Выбросим в каждой области D_j какие-нибудь n_j точек из множества E. Обозначим через A множество всех выброшенных точек, а через B — множество всех оставшихся точек, так что $E = A \bigcup B$. Из равенства (26) следует, что множество A имеет нулевую угловую плотность, а для множества B справедливы неравенства

$$n_B(D_j) \leqslant t_j^{\rho(t_j)} d_E(D(1, \beta_j, \theta_{1j}, \theta_{2j})). \tag{27}$$

Существует непрерывная функция $\varepsilon_4(r) \downarrow 0$ при $r \to \infty$ такая, что для меры μ_1 с плотностью $\rho(1 + \varepsilon_4(r)) r^{\rho(r)-1} dr\, ds(\theta)$ будут справедливы неравенства

$$\mu_1(D_j) \geqslant t_j^{\rho(t_j)} \mu_H(D(1, \beta_j, \theta_{1j}, \theta_{2j})). \tag{28}$$

Пусть μ_2 — мера, плотность которой в области D_j равна $\rho\sigma_j(1 + \varepsilon_4(r)) r^{\rho(r)-1} dr\, ds(\theta)$, где число σ_j определяется из равенства $\rho\sigma_j \iint\limits_{D_j} (1 + \varepsilon_4(r)) r^{\rho(r)-1} dr\, ds(\theta) = n_B(D_j)$. Из неравенства (27) и (28) следует, что $0 \leqslant \sigma_j \leqslant 1$. Поэтому мера $\mu_3 = \mu_1 - \mu_2$ — неотрицательная, ее плотность в области D_j равна $\rho(1 - \sigma_j)(1 + \varepsilon_4(r)) r^{\rho(r)-1} dr\, ds(\theta)$. Строим теперь меру μ_4 с плотностью в области D_j, равной $\rho(1 - \sigma_j - \sigma_{1j})(1 + \varepsilon_4(r)) r^{\rho(r)-1} dr\, ds(\theta)$, $0 \leqslant \sigma_{1j} \leqslant 1 - \sigma_j$, так, чтобы $\mu_4(D_j) = [\mu_3(D_j)]$. Из равенства (26) следует, что мера $\mu_3 - \mu_4$ имеет нулевую угловую плотность. Мера $\mu_5 = \mu_2 + \mu_4 = \mu_1 - \mu_3 + \mu_4$ имеет такую же угловую плотность, как и мера μ_1, т. е. угловая плотность $\Delta(\vartheta, \theta)$ меры μ_5 для неособых лучей равна $s(\theta) - s(\vartheta)$. Заменим меру μ_2 мерой с единичными массами, сосредоточенными в точках множества B, а меру μ_4 в каждой из областей D_j — мерой с единичными массами в точках $u_1^j, u_2^j, \ldots, u_{\mu_4(D_j)}^j$, где точки $u_k^j \in D_j$. Так, преобразованную меру μ_5 обозначим μ_6. Немного позже укажем, как выбираются точки u_k^j. Однако при любом выборе точек u_k^j в области D_j меры μ_5 и μ_6 имеют одинаковую угловую плотность. Пусть счетное множество B_1 есть носитель меры μ_6, а $B_2 = B_1 \cup A$. Так как множество A имеет нулевую угловую плотность, то у множества B_2 угловая плотность равна $\Delta(\vartheta, \theta) = s(\theta) - s(\vartheta)$ для неособых лучей. Множество B_2 содержит множество E. Укажем теперь способ выбора точек u_k^j. Пусть T_4 таково, что при $r \geqslant T_4$ выполняется неравенство $\varepsilon_4(r) \leqslant 1$. В дальнейшем будем считать, что $s_m \geqslant T = \max(T_3, T_4)$. Пусть j_m — наименьшее значение j, для которого $D_j \subset K_m$. Пусть r_n — та последовательность, которую мы построили в начале доказательства. Из полученной ранее оценки для числа n_m^0 и выбора T следует, что $n_m^0 > \mu_1(K_m)$. Пусть q_m — наименьшее целое число такое, что $r_{3q_m} \in (s_m, s_{m+1})$. Каждую из точек $u_k^{j_m}$, $k = 1, 2, \ldots, \mu_4(D_{j_m})$ возьмем в пересечении $D_{j_m} \cap \{z\colon |z| = r_{3(q_m+k-1)}\}$. Затем каждую точку $u_k^{j_m+1}$ возьмем в пересечении $D_{j_m+1} \cap \{z\colon |z| = r_{3(q_m+\mu_4(D_{j_m})+k-1)}\}$. Этот процесс продолжаем до номера $j_{m+1} - 1$ включительно. Этот процесс возможен, так как $\sum\limits_{j=j_m}^{j_{m+1}} \mu_4(D_j) \leqslant$

$\leqslant \mu_4(K_m) \leqslant \mu_1(K_m)$. Затем также поступаем с остальными кольцами K_n. В случае нецелого ρ в качестве функции $\varphi(z)$ возьмем каноническую функцию множества B_2. Индикатор $\varphi(z)$ будет равен $h(\theta)$. В силу выбора последовательности r_n и числа T для функции $\varphi(z)$ будут выполняться дополнительные условия.

Пусть теперь ρ — целое. В этом случае функцию $\varphi(z)$ будем искать в виде $\varphi(z) = e^{Cz^\rho} \prod\limits_{a_n \in B_4} E\left(\frac{z}{a_n}, \rho\right)$, где $B_4 = B_2 \cup B_3$, причем множество B_3 имеет нулевую угловую плотность, $E\left(\frac{z}{a_n}, \rho\right)$ — канонический множитель Вейерштрасса. Множество B_2 имеет угловую плотность, порожденную монотонной функцией $s(\theta)$, которая в точках непрерывности функции $h'(\theta)$ равна $s(\theta) = h'(\theta) - h'(-0) + \rho^2 \int\limits_0^\theta h(\varphi)\,d\varphi$. Индикатор $h(\theta)$ при целом ρ имеет вид $h(\theta) = \int\limits_{\theta-2\pi}^{\theta} (\psi - \theta)\sin\rho(\psi - \theta)\,ds(\psi) + \tau\cos\rho(\theta - \gamma)$. Пусть $L(r) = r^{\rho(r)-\rho}$. Для того чтобы индикатор функции $\varphi(z)$ равнялся $h(\theta)$, достаточно, чтобы

$$\tau e^{i\rho\gamma} = \lim_{r\to\infty} \frac{1}{L(r)}\Big[c + \sum_{\substack{a_n \in B_4 \\ |a_n| \leqslant r}} a_n^{-\rho}\Big]. \tag{29}$$

Перейдем к построению множества B_3 и числа c так, чтобы выполнялось равенство (29). Пусть G_j — кольцо $2^j \leqslant |z| < 2^{j+1}$. Пусть $\frac{1}{L(2^j)} \iint\limits_{G_j} \frac{d\mu_{B_2}}{\zeta^\rho} = \alpha_j + i\beta_j$. В силу леммы 8 величины α_j и β_j стремятся к нулю при $j \to \infty$. Пусть $\gamma_j = \frac{L(2^{j-1})}{L(2^j)} - 1$. Так как $L(r)$ — медленно меняющаяся функция, то $\gamma_j \to 0$ при $j \to \infty$. Обозначим $\tilde{\alpha}_j = \alpha_j - \gamma_j\tau\cos\rho\gamma$; $\tilde{\beta}_j = \beta_j - \gamma_j\tau\sin\rho\gamma$. Величины $\tilde{\alpha}_j$ и $\tilde{\beta}_j$ также стремятся к нулю при $j \to \infty$.

Пусть n_j^1 и n_j^2 — число точек r_n с номерами вида $n = 3m+1$ и $n = 3m+2$, попавших в интервал $(2^j, 2^{j+1})$. Из выбора числа K и леммы 7 следует существование такого целого числа N, что при $j \geqslant N$ будут выполняться неравенства

$$n_j^1 > 2\Delta \int\limits_{2^j}^{2^{j+1}} t^{\rho(t)-1}dt > \Delta 2^{j\rho(2^j)} = \tilde{u}_j,\ n_j^2 > \tilde{u}_j;\ |\tilde{\alpha}| < \frac{\Delta}{2^{\rho+1}},$$

$$|\tilde{\beta}_j| < \frac{\Delta}{2^{\rho+1}}.$$

В дальнейшем будем рассматривать только случай, когда $j \geqslant N$. Пусть $\tilde{\nu}_1$ — мера с единичными массами, сосредоточенными в некоторых из точек r_n, $2^j < r_n < 2^{j+1}$, номера которых имеют вид $3m+1$, а число точек равно $\tilde{u}_j$. Тогда

$$\frac{1}{L(2^j)} \int\limits_{[2^j,\, 2^{j+1}]} \frac{d\nu_1(t)}{t^\rho} > \frac{1}{2^\rho} \frac{\tilde{u}_j}{2^{j\rho(2^j)}} = \frac{\Delta}{2^\rho} > 2|\tilde{\alpha}_j|.$$

Вклад Δ_j^n одной точки r_n в левую часть оценивается следующим образом:

$$\Delta_j^n = \frac{1}{L(2^j)} \frac{1}{r_n^\rho} < \frac{1}{L(2^j)\, 2^{j\rho}} = \frac{1}{2^{j\rho(2^j)}}.$$

Следовательно, можно найти u_j, $u_j \leqslant \tilde{u}_j$ точек r_n с номерами вида $3m+1$ таких, что если в этих точках разместить единичные массы, то для полученной меры ν_1 будет справедливо неравенство

$$\left| \frac{1}{L(2^j)} \int\limits_{[2^j,\, 2^{j+1}]} \frac{d\nu_1(t)}{t^\rho} - |\tilde{\alpha}_j| \right| < \frac{1}{2^{j\rho(2^j)}}.$$

Тогда $$\left| \int\limits_{G_j} \frac{d\nu_1(t)}{t^\rho} - \left| \operatorname{Re} \int\limits_{G_j} \frac{d\mu_{B_2}(\zeta)}{\zeta^\rho} - L(2^j)\, \gamma_j \tau \cos \rho\gamma \right| \right| < \frac{1}{2^{j\rho}}. \qquad (30)$$

Аналогично найдем меру ν_2, сосредоточенную в v_j, $v_j \leqslant \tilde{u}_j$, точках r_n, $2^j < r_n < 2^{j+1}$, с номерами вида $3m+2$ такую, что

$$\left| \int\limits_{G_j} \frac{d\nu_2(t)}{t^\rho} - \left| \operatorname{Im} \int\limits_{G_j} \frac{d\mu_{B_2}(\zeta)}{\zeta^\rho} - L(2^j)\, \gamma_j \tau \sin \rho\gamma \right| \right| < \frac{1}{2^{j\rho}}. \qquad (31)$$

Сместим носитель меры ν_1 по концентрическим окружностям с центром в нуле на луч $\arg z = 0$, если $\tilde{\alpha}_j < 0$, и на луч $\arg z = \frac{\pi}{\rho}$, если $\tilde{\alpha}_j > 0$. Меру, сосредоточенную на смещенных точках, обозначим ν_3. Аналогично сместим носитель меры ν_2 на луч $\arg z = \frac{\pi}{2\rho}$, если $\tilde{\beta}_j < 0$, и на луч $\arg z = \frac{3\pi}{2\rho}$, если $\tilde{\beta} > 0$. Меру, сосредоточенную на смещенных точках, обозначим ν_4. Пусть B_3 множество точек, которое в кольцах G_j, $j \geqslant N$ совпадает с носителем меры $\nu_3 + \nu_4$. Пусть

$$\Delta_j = \int\limits_G \frac{d\mu_{B_3}(\zeta)}{\zeta^\rho} + \int\limits_G \frac{d\mu_{B_2}(\zeta)}{\zeta^\rho} - L(2^j)\, \gamma_j \tau e^{i\rho\gamma}.$$

Тогда из неравенств (30), (31) следует, что $|\Delta_j| < \frac{2}{2^{j\rho}}$. Следовательно, ряд $\sum\limits_{j=N}^{\infty} \Delta_j$ сходится, причем $\left|\sum\limits_{j=m+1}^{\infty} \Delta_j\right| \leqslant \frac{2}{2^\rho - 1} 2^{-m\rho}$. Количество точек множества B_3 в кольце G_j равно $u_j + v_j = \delta_j 2^{j\rho(2^j)}$. Очевидно, что $\delta_j \to 0$ при $j \to \infty$. Поэтому множество B_3 имеет нулевую угловую плотность. Пусть $B_4 = B_2 \bigcup B_3 = \{a_n, \quad n = 1, 2, \dots\}$; $c = -\sum\limits_{|a_j| < 2^N} a_j^{-\rho} - \sum\limits_{j=N}^{\infty} \Delta_j + L(2^{N-1}) \tau e^{i\rho\gamma}$;

$\delta(r) = \frac{1}{L(r)}\left[c + \iint\limits_{|\zeta| \leqslant r} \frac{d\mu_{B_4}(\zeta)}{\zeta^\rho}\right]$.

Преобразуем выражение для

$$\delta(r) = \frac{1}{L(r)}\left(L(2^{N-1}) \tau e^{i\rho\gamma} + \sum_{j=N}^{m} L(2^j) \gamma_j \tau e^{i\rho\gamma} - \right.$$

$$\left. - \sum_{j=m+1}^{\infty} \Delta_j + \iint\limits_{2^m < |\zeta| \leqslant r} \frac{d\mu_{B_4}(\zeta)}{\zeta^\rho}\right), \text{ где } m = [\log_2 r].$$

Так как $\gamma_j = 1 - \frac{L(2^{j-1})}{L(2^j)}$, то

$$L(2^{N-1}) \tau e^{i\rho\gamma} + \sum_{j=N}^{m} L(2^j) \gamma_j \tau e^{i\rho\gamma} = L(2^m) \tau e^{i\rho\gamma}.$$

Так как $\frac{1}{2} r < 2^m \leqslant r$, а $L(r)$ — медленно меняющаяся **функция**, то $\lim\limits_{r \to \infty} \frac{L(2^m)}{L(r)} = 1$. Так как

$$\left|\sum_{j=m+1}^{\infty} \Delta_j\right| < \frac{2}{2^\rho - 1} 2^{-m\rho} < \frac{2^{\rho+1}}{2^\rho - 1} \frac{1}{r^\rho}, \text{ то } \lim_{r \to \infty} \frac{1}{L(r)} \sum_{j=m+1}^{\infty} \Delta_j = 0.$$

По лемме 8 $\lim\limits_{r \to \infty} \frac{1}{L(r)} \iint\limits_{2^m < |\zeta| \leqslant r} \frac{d\mu_{B_4}(\zeta)}{\zeta^\pi} = 0$. Таким образом, $\lim\limits_{r \to \infty} \delta(r) = \tau e^{i\rho\gamma}$. Следовательно, функция $\varphi(z) = e^{cz^\rho} \prod\limits_{a_n \in B_4} E\left(\frac{z}{a_n}, \rho\right)$ является функцией вполне регулярного роста с индикатором $h(\theta)$ относительно уточненного порядка $\rho(r)$ и удовлетворяет дополнительным условиям. Теорема 5 доказана.

Замечание 2. Если E — пустое множество, то построение функции $\varphi(z)$ приведено в [1], причем в случае целого ρ там от уточненного порядка требовалось еще, чтобы он был сильным уточненным порядком. Это ограничение на уточненный порядок затем было снято В. Н. Логвиненко [6]. У этих авторов не требовалось, чтобы функция $\varphi(z)$ удовлетворяла дополнительным условиям. А. Ф. Леонтьев [7] произвел построение функции $\varphi(z)$ для любого $\rho(r)$, которая удовлетворяла дополнительным условиям. В случае, когда ρ — целое, а множество E имеет угловую плотность, удовлетворяющую условию $\int\limits_0^{2\pi} e^{i\rho\theta} ds(\theta) = 0$, построение функции $\varphi(z)$ произведено Г. Л. Лунцем [8]. В [9] Б. Я. Левин вводит понятие максимальной угловой плотности:

$$\Delta(\vartheta, \theta) = \lim \sum_{j=0}^{n-1} \lim_{k \to 1+0} \overline{\lim_{r \to \infty}} \frac{n_E(kr, \psi_j, \psi_{j+1}) - n_E(r, \psi_j, \psi_{j+1})}{(kr)^{\rho(kr)} - r^{\rho(r)}},$$

$$\max|\psi_{j+1} - \psi_j| \to 0,$$

где $\vartheta = \psi_0 < \psi_1 < \cdots < \psi_n = \theta$, $n_E(r, \alpha, \beta)$ — число точек множества E в секторе $\{z: |z| \leqslant r, \ \alpha < \arg z < \beta\}$, и приводит утверждение, что если у множества E существует конечная максимальная плотность $\Delta(\vartheta, \theta)$, то существует множество E_1, содержащее E и имеющее угловую плотность $\Delta(\vartheta, \theta)$. Из этого утверждения и из работы Лунца следует существование функции $\varphi(z)$, о которой говорится в теореме 5, правда, эти авторы не рассматривают дополнительные условия. Заметим, в свою очередь, что все результаты, о которых упоминалось в замечании, следуют из теоремы 5.

Теорема 5. *Пусть* $\rho(r)$ — *уточненный порядок,* $\lim\limits_{r \to \infty} \rho(r) = \rho$, $h(\theta)$ — *тригонометрически* ρ — *выпуклый индикатор,* $\varepsilon(r)$ — *функция, стремящаяся к нулю при* $r \to \infty$. *Пусть* $A = \{a_n, n = 1, 2, \ldots\}$ — *счетное множество,* $n_A(C(0, r)) \leqslant \exp(\varepsilon(r) r^{\rho(r)})$. *Тогда существует целая функция* $\varphi(z)$ *вполне регулярного роста с индикатором* $h(\theta)$ *относительно уточненного порядка* $\rho(r)$ *такая, что*

$$\lim_{n \to \infty} \left[\frac{1}{r_n^{\rho(r_n)}} \ln|\varphi(a_n)| - h(\theta)\right] = 0, \ a_n = r_n e^{i\theta_n}. \tag{32}$$

Кроме того, можно считать, что функция $\varphi(z)$ удовлетворяет дополнительным условиям: 1) корни λ_n, $|\lambda_1| \leqslant |\lambda_2| \leqslant \ldots$, функции $\varphi(z)$ простые; 2) $|\lambda_{n+1}| \geqslant |\lambda_n| + d|\lambda_n|^{1-\rho(|\lambda_n|)}$ для некоторого $d > 0$; 3) для некоторой функции $\varepsilon_1(r) \downarrow 0$ круги $C(\lambda_n, |\lambda_n| \exp(-\varepsilon_1(|\lambda_n|)|\lambda_n|^{\rho(|\lambda_n|)}))$ не пересекаются между собой и не пересекают множество A.

Отметим, что аналогичные функции строила О. С. Фирсакова [10] и они играли существенную роль в ее рассуждениях.

Доказательство. Пусть $\varepsilon_2(r)$ — такая функция, что $\varepsilon_2(r)\downarrow 0$, $\varepsilon_2(r)\geqslant 2\varepsilon(r)$, $\varepsilon_2(r)\geqslant\frac{1}{\ln r}$, $\frac{|\varepsilon_2'(r)|}{\varepsilon_2(r)}\leqslant\frac{1}{r\ln r}$ при $r\geqslant 2$. Существование функции $\varepsilon_2(r)$ следует из леммы 5. Опишем около каждой точки $a_n\in A$ круг $C(a_n, |a_n|\exp(-\varepsilon_2(|a_n|)|a_n|^{\rho(|a_n|)}))$. В силу ограничения на множество A сумма радиусов всех таких кругов конечна. Пусть U — круговая проекция этих кругов на ось $(0, \infty)$. Пусть d выбрано так же, как в теореме 5. Пусть T_1 такое, что если $z_1=r_1e^{i\theta_1}$; $z_2=r_2e^{i\theta_2}$; $r_1\overline{\in}U$; $r_2\overline{\in}U$; $r_1\geqslant T_1$; $r_2\geqslant r_1+dr_1^{1-\rho(r_1)}$, то круги $C(z_1, r_1\exp(-2\varepsilon_2(r_1)r_1^{\rho(r_1)}))$ и $C(z_2, r_2\exp(-2\varepsilon_2(r_2)r_2^{\rho(r_2)}))$ не пересекаются между собой и не пересекают множества A. Дальше построения нужно производить так же, как и в теореме 5, считая множество E пустым. Для построенной функции $\varphi(z)$ будут выполняться все условия теоремы (в дополнительном условии 3 нужно считать $\varepsilon_1(r)=2\varepsilon_2(r)$), кроме, быть может, условия (32). Проверим условие (32). Корни функции $\varphi(z)$ образуют регулярное множество (R-множество) в смысле Б. Я. Левина. В [1, гл. II, § 6, теор. 5] доказано, что вне кругов $C(\lambda_n, d|\lambda_n|^{1-\rho(|\lambda_n|)})$ справедлива оценка $\ln|\varphi(re^{i\theta})|\approx\approx h(\theta)r^{\rho(r)}$. Однако можно заметить, что эта оценка справедлива вне кругов $C(\lambda_n, |\lambda_n|\exp(-\delta(|\lambda_n|)|\lambda_n|^{\rho(|\lambda_n|)}))$, где $\delta(r)\to 0$ при $r\to\infty$. Тогда из дополнительного условия 3 следует (32). Теорема 6 доказана.

Теорема 7. *Если функция $f(z)$ имеет регулярный рост относительно индикатора $h_1(\theta)$ на некотором подмножестве E множества своих корней, то существует функция $\varphi(z)$ вполне регулярного роста с индикатором $h_1(\theta)$, которая обращается в ноль на множестве E. Причем функция $\varphi(z)$ удовлетворяет дополнительным условиям теоремы 5.*

Эта теорема есть следствие теорем 4 и 5.

Замечание 3. Пусть $f(z)$ — целая функция с индикатором $h(\theta)$ относительно уточненного порядка $\rho(r)$ и множеством корней $E=\{a_n, n=1, 2, \ldots\}$. В теории интерполяции встречается условие

$$\varlimsup_{n\to\infty}\left[\frac{1}{r_n^{\rho(r_n)}}\ln\frac{1}{|f'a_n)|}+h(\theta_n)\right]\leqslant 0,\ a_n=r_ne^{i\theta_n}. \tag{33}$$

Так как индикатор производной не превышает индикатора самой функции, то это фактически означает, что

$$\lim_{n\to\infty}\left[\frac{1}{r_n^{\rho(r_n)}}\ln\frac{1}{|f'(a_n)|}+h(\theta_n)\right]=0.$$

Из этого равенства с помощью формулы Коши для производной легко получить, что функция $f(z)$ имеет регулярный рост на множестве всех своих корней. Тогда теорема 7 дает частичный ответ на давно поставленный А. Ф. Леонтьевым вопрос: следует ли из соотношения (33), что функция $f(z)$ является функцией вполне регулярного роста.

Теорема 8. *Если функция $f(z)$ имеет регулярный рост относительно индикатора $h_1(\theta)$ на некотором подмножестве E множества своих корней, причем*

$$\lim_{\delta\to 0}\sup_z \int_0^\delta \frac{\Phi_{E,\,z}(\alpha)}{\alpha}\,d\alpha = 0,$$

то существует целая функция $\varphi(z)$ вполне регулярного роста с индикатором $h_1(\theta)$, которая обращается в ноль на множестве E, причем

$$\lim_{\delta\to 0}\sup_z \int_0^\delta \frac{\Phi_{\varphi,\,z}(\alpha)}{\alpha}\,d\alpha = 0.$$

Доказательство. Из теорем 4 и 5 следует существование такой целой функции $\varphi(z)$ вполне регулярного роста с индикатором $h_1(\theta)$ и множеством корней $E_1 \bigcup E\ (E_1 \bigcap E = \Phi\}$, что множество $E_1 = \{\lambda_n,\ n = 1,\ 2,\ \ldots,\ |\lambda_1| \leqslant |\lambda_2| \leqslant \ldots\}$ обладает следующими свойствами: 1) $|\lambda_{n+1}| \geqslant |\lambda_n| + d\,|\lambda_n|^{1-\rho(|\lambda_n|)}$; 2) круги $C(\lambda_n,\ |\lambda_n|^{-\rho'})$ не пересекаются и не пересекают множества E.

Из первого свойства следует существование такой константы M, что для всех z будет справедливо неравенство $\Phi_{E_1,\,z}(\alpha) \leqslant \leqslant M\alpha$, $\alpha \in [0,\ 0{,}5]$. Из этого неравенства, свойства 2 и леммы 9 следует заключение теоремы.

Список литературы: 6. *Логвиненко В. Н.* Построение целой функции с заданным индикатором при заданном целом уточненном порядке.— Функцион. анализ и его прил., 1972, **6**, вып. 4, с. 90—91. 7. *Леонтьев А. Ф.* Ряды экспонент.— М.: Наука, 1976.— 536 с. 8. *Лунц Г. Л.* Об одной теореме, связанной с ростом целых функций конечного порядка.— Изв. АН АрмССР, 1970, **4**, с. 357—370. 9. *Левин Б. Я.* Доп. и испр. к кн. «Распределение корней целых функций». Препринт.— Х.: ФТИНТ АН УССР, 1978.— 60 с. 10. *Фирсакова О. С.* Некоторые вопросы интерполирования с помощью целых функций.— Докл. АН СССР, 1958, **120**, № 3, с. 477—480.

Поступила в редколлегию 27.01.82