УДК 517.53

А. А. ГОЛЬДБЕРГ

О РОСТЕ ЦЕЛОЙ ФУНКЦИИ, ПРЕДСТАВИМОЙ ЛАКУНАРНЫМ СТЕПЕННЫМ РЯДОМ

Теорема. *Пусть* (λ_j) — *произвольная строго возрастающая последовательность натуральных чисел,* $\psi(x)$ — *заданная на* $\boldsymbol{R}_+$, *положительная, неубывающая, стремящаяся к* ∞ *при* $x \to \infty$ *функция. Существует целая функция* f, *представимая степенным рядом*

$$f(z) = \sum_{j=1}^{\infty} a_j z^{\lambda_j}, \qquad (1)$$

такая, что $\overline{\lim\limits_{r\to\infty}} \ln M(r, f)/\psi(T(r, f)) = \infty$ **(2)**, *где* $T(r, f)$ — *неванлинновская характеристика* f.

Эта теорема может представлять интерес в связи со следующими контрастирующими фактами. 1. Если $\lambda_{j+1}/\lambda_j \geqslant q > 1$, $j \geqslant 1$, то для целых функций конечного порядка всегда $\ln M(r, f) = O(T(r, f))$, $r \to \infty$. На это простое следствие теорем Пэйли и Зигмунда [1, с. 346, (8.25)] и Валирона [2, отд. IV, № 54] указал нам М. Н. Шеремета. 2. Для любой целой функции f и $\varepsilon > 0$ можно найти такое множество $E \subset [1, \infty)$ конечной логарифмической меры, что $\ln M(r, f) = o(T(r, f)\{\ln T(r, f)\}^{1+\varepsilon})$, при $r \to \infty$, $r \notin E$. Это утверждение легко следует из одной модификации теоремы Бореля о возрастающих функциях, приведенной в [3, с. 137] (см. также [4, с. 120]), и известного нерaвенства $\ln M(r, f) \leqslant \{(R+r)/(R-r)\} T(R, f)$, $R > r$. По-видимому, по этой причине Хейман [5, с. 43, теорема 1.8] называет указанное утверждение (в несколько ослабленной формулировке) теоремой Симидзу.

Доказательство теоремы. Обозначим $I_2(r, f) = \frac{1}{2\pi} \int\limits_0^{2\pi} |f(re^{i\varphi})|^2 \, d\varphi$.

Построим последовательность многочленов (P_k) вида $P_k(z) = \sum\limits_{j=n_k}^{m_k} a_j z^{\lambda_j}$, $m_k \geqslant n_k \geqslant 1$, $a_j \geqslant 0$ и последовательность натуральных чисел N_k, обладающих свойствами: 1) $n_k \leqslant m_k < n_{k+1}$; 2) $P_k(2^{k-1}) \leqslant 2^{-k+1}$; 3) $\ln P_k(2^k) = \ln N_k \geqslant k\psi(2 \ln M_k)$, где $M_k = \sum\limits_{j=1}^{k-1} P_j(2^k)$; 4) $I_2(2^k, P_k) = 1$.

Положим $P_0 \equiv 1$, $n_0 = m_0 = 0$, $N_0 = M_1 = 1$.

Допустим, что уже выбраны P_j, N_j при $0 \leqslant j \leqslant k-1$ и будем выбирать P_k, N_k. Возьмем произвольное натуральное число N_k такое, что $\ln N_k \geqslant k\psi(2 \ln M_k)$ **(3)**. Натуральное число n_k выберем большим m_{k-1}, $m_k = n_k + N_k^2 - 1$, $P_k(z) = N_k^{-1} \sum\limits_{j=n_k}^{m_k} (z/2^k)^{\lambda_j}$. Выполнение 1) очевидно. Учитывая, что $\lambda_{n_k} \geqslant k$, получаем $P_k(2^{k-1}) = N_k^{-1} \sum\limits_{j=n_k}^{m_k} 2^{-\lambda_j} \leqslant \sum\limits_{j=k}^{\infty} 2^{-j} = 2^{-k+1}$, т. е. выполняется 2). Далее $P_k(2^k) = N_k$, поэтому из (3) следует справедливость свойства 3). Используя равенство Парсеваля, получаем $I_2(2^k, P_k) = N_k^{-2} \sum\limits_{j=n_k}^{m_k} 1 = 1$, т. е. выполняется 4).

Положим $f(z) = \sum\limits_{k=1}^{\infty} P_k(z)$. Абсолютная и равномерная на компактах сходимость этого ряда следует из использующей 2) оценки

$$\sum_{j=k+1}^{\infty} P_j(2^k) \leqslant \sum_{j=k+1}^{\infty} P_j(2^{j-1}) \leqslant \sum_{j=k+1}^{\infty} 2^{-j+1} = 2^{-k+1} \leqslant 1. \qquad (4)$$

Очевидно, что f — целая функция, представимая в виде (1). Для нее $\ln M(2^k, f) \geqslant \ln P_k(2^k) = \ln N_k$ **(5)**. Используя (4), свойство 4) и лемму 1.1 из [4, с. 116], получаем $T(2^k, f) \leqslant T\left(2^k, \sum\limits_{j=1}^{k-1} P_j\right) + T(2^k, P_k) + T\left(2^k, \sum\limits_{j=k+1}^{\infty} P_j\right) + \ln 3 \leqslant \ln M_k + \frac{1}{2} \ln^+ I_2(2^k, P_k) +$

$+\frac{1}{2}\ln 2+\ln 3=\ln M_k+\frac{1}{2}\ln 2+\ln 3\leqslant 2\ln M_k$ при $k\geqslant k_0$. Отсюда и из (3) следует $(k\geqslant k_0)$ $\psi(T(2^k, f))\leqslant\psi(2\ln M_k)\leqslant$ $\leqslant k^{-1}\ln N_k$ **(6)**. Из (5) и (6) вытекает (2).

Список литературы: 1. *Зигмунд А.* Тригонометрические ряды.— М.: Мир, 1965, **1**.— 615 с. **2**. *Полиа Г., Сеге Г.* Задачи и теоремы из анализа.— М.: ГИТТЛ, 1956, **2**.— 432 с. 3. *Shimizu T.* On the theory of meromorphic functions.— Japan. J. Math., 1929, **6**, № 1, p. 119—171. 4. *Гольдберг А. А., Островский И. В.* Распределение значений мероморфных функций.— М.: Наука, 1970.— 592 с. 5. *Хейман У. К.* Мероморфные функции.— М.: Мир, 1966.— 287 с.

Поступила в редколлегию 12.11.82.