УДК 517.53

Е. В. ГЛЕЙЗЕР

О КЛАССАХ δ-СУБГАРМОНИЧЕСКИХ ФУНКЦИЙ С РАЗДЕЛЕННЫМИ МАССАМИ

В работах [1—3] А. С. Колокольников ввел в рассмотрение классы δ-субгармонических функций с массами, разделенными относительно одной сферической функции [1] и относительно ортонормированной системы сферических функций [3]. Обозначим эти классы соответственно через $R[Y_p]$ и $R[\mathbf{Y}_p]$, где $\mathbf{Y}_p = \{Y_p^l\}$, $l = 1, \ldots, h$,— полная ортонормированная система сферических функций степени p. Верна следующая

Теорема. $R[\mathbf{Y}_p] \subset R[Y_p]$, *где* $Y_p = \sum\limits_{l=1}^{h} Y_p^l$.

Таким образом, теоремы 1 и 2 из [3] содержатся в теоремах 1 и 3 из [1].

При доказательстве теоремы будем пользоваться обозначениями и определениями из [1, 3]. Кроме того, натуральное число p полагаем фиксированным, поэтому зависимость от p, где это возможно, явно указывать не будем. Пусть u — δ-субгармоническая в $\boldsymbol{R}^m$, $m \geqslant 2$, функция, т. е. $u(x) = u_1(x) - u_2(x)$, где u_1, u_2 — субгармонические в $\boldsymbol{R}^m$, гармонические в некоторой окрестности начала координат функции, с риссовскими массами μ_1 и μ_2, сосредоточенными на непересекающихся множествах; $x \in \boldsymbol{R}^m \setminus \{0\}$, $x^0 = x/|x|$. Обозначим $D_1^l(\varepsilon) = \{x : Y^l(x^0\} > \varepsilon\}$, $D_2^l(\varepsilon) = \{x : Y^l(x_0) < -\varepsilon\}$.

Пусть $u \in R[\boldsymbol{Y}]$. Тогда, в силу определения $R[\boldsymbol{Y}]$ из [3],

$$-\int\limits_{D_2^l(0)} Y^l(x^0)|x|^{-m+2-p}\, d\mu_1 + \int\limits_{D_1^l(0)} Y^l(x^0)|x|^{-m+2-p}\, d\mu_2 < \infty, \quad l = 1, \ldots, h,$$

а следовательно, для любого $\varepsilon > 0$ выполняется

$$-\int\limits_{D_2^l(\varepsilon)} Y^l(x^0)|x|^{-m+2-p}\, d\mu_1 + \int\limits_{D_1^l(\varepsilon)} Y^l(x^0)|x|^{-m+2-p}\, d\mu_2 < \infty, \quad l = 1, \ldots, h,$$

откуда следует, что

$$\int\limits_{D_2^l(\varepsilon)} |x|^{-m+2-p}\, d\mu_1 + \int\limits_{D_1^l(\varepsilon)} |x|^{-m+2-p}\, d\mu_2 < \infty, \quad l = 1, \ldots, h. \tag{1}$$

Суммируя неравенство (1) по l от 1 до h и учитывая равенства

$$\bigcup_{l=1}^{h} D_2^l(\varepsilon) = c \bigcap_{l=1}^{h} \overline{D_1^l(-\varepsilon)} = \boldsymbol{R}^m \setminus A_1(\varepsilon); \tag{2}$$

$$\bigcup_{l=1}^{h} D_1^l(\varepsilon) = c \bigcap_{l=1}^{h} \overline{D_2^l(-\varepsilon)} = \boldsymbol{R}^m \setminus A_2(\varepsilon), \tag{3}$$

для любого $\varepsilon > 0$ получим

$$\int\limits_{R^m \setminus A_1(\varepsilon)} |x|^{-m+2-p}\, d\mu_1 + \int\limits_{R^m \setminus A_2(\varepsilon)} |x|^{-m+2-p}\, d\mu_2 < \infty. \tag{4}$$

Положим $Y = \sum\limits_{l=1}^{h} Y^l$, Y — сферическая функция степени p. Известно (см., напр., равенство (3) из [3]), что

$$\sum_{l=1}^{h} (Y^l)^2 = M = \mathrm{const} > 0. \tag{5}$$

Пусть теперь $x \in A_1(\varepsilon)$, где $0 < \varepsilon < (M/h)^{1/2}(h-1)^{-1}$. Тогда из (2) следует, что для всех $l = 1, \ldots, h$ выполняется $Y^l(x^0) > -\varepsilon$.

Но из (5) получаем, что $\max\{|Y^l(x^0)|: 1 \leqslant l \leqslant h\} \geqslant (M/h)^{1/2}$, поэтому $Y(x^0) \geqslant (M/h)^{1/2} - \varepsilon(h-1) = \varepsilon_1 > 0$, т. е. $A_1(\varepsilon) \subset \overline{D_1(\varepsilon_1)} = \{x: Y(x^0) \geqslant \varepsilon_1\}$.

Аналогично показываем, что $A_2(\varepsilon) \subset D_2(\varepsilon_1) = \{x: Y(x^0) \leqslant -\varepsilon_1\}$.

Итак, существует $\varepsilon_1 > 0$ такое, что

$$\int\limits_{R^m \setminus D_1(\varepsilon_1)} |x|^{-m+2-p} d\mu_1 + \int\limits_{R^m \setminus D_2(\varepsilon_1)} |x|^{-m+2-p} d\mu_2 < \infty,$$

а это означает, что $u \in R[Y]$.

Список литературы: 1. *Колокольников А. С.* О росте субгармонических в пространстве функций со специальным распределением масс.— Теория функций, функцион. анализ и их прил., 1974, вып. 21, с. 42—56. 2. *Колокольников А. С.* Письмо в редакцию.— Теория функций, функцион. анализ и их прил., 1976, вып. 26, с. 128—129. 3. *Колокольников А. С.* О разностях субгармонических функций с массами, разделенными относительно сферических функций — Теория функций, функцион. анализ и их прил., 1981, вып. 35, с.52—54.

Поступила в редколлегию 11.01.82.