УДК 517.5

Ю. П. ГИНЗБУРГ

О ВОССТАНОВЛЕНИИ МУЛЬТИПЛИКАТИВНОГО ИНТЕГРАЛА ПО ЕГО МОДУЛЮ

В доказательстве классической теоремы о мультипликативном представлении аналитической j-нерастягивающей матрицы-функции [1] важную роль играла построенная В. П. Потаповым «теория j-модуля». Значительно усовершенствованное изложение этой глубокой теории составляет содержание работ [2; 3].

В потаповской теории j-модуля одно из центральных мест занимают формулы, выражающие суммируемую j-эрмитово-неотрицательную функцию $H(s)$ через j-модуль $R(s)$ мультипликативного интеграла $W(s) = \overset{s}{\underset{0}{\int\limits^{\frown}}} \exp\{-H(t)\,dt\}$ (формулы (6.4) — (6.6) работы [3]).

Предлагаемая статья посвящена некоторому обобщению и уточнению этих результатов с последующим их приложением (в случае $j = I$) к построению мультипликативного представления внешней оператор-функции по значениям в какой-нибудь точке модулей ее делителей специального вида, либо по модулям ее предельных значений. Доказанные при этом предложения могут быть стандартным образом [1] переформулированы в терминах теории канонических систем дифференциальных уравнений.

1. Об одной факторизации абсолютно непрерывной оператор-функции.

Пусть $W(s)$ $(0 \leqslant s \leqslant l)$ — операторнозначная* абсолютно непрерывная (относительно равномерной операторной метрики) функция. Тогда почти в каждой точке $s \in [0, l]$ существует слабая производная $F(s) \equiv W'(s)$ такая, что 1) $F(s)$ слабо измерима на $[0, l]$; 2) $|F| \in L^{(1)}[0, l]$. Оператор-функции, обладающие свойствами 1) и 2), будем называть суммируемыми на $[0, l]$.

Если $W(s)$ при каждом $s \in [0, l]$ является ограниченно обратимым оператором, то $\overset{\curvearrowleft}{\dot{W}}(s) \equiv W'(s)\, W^{-1}(s)$ называется мультипликативной производной функции $W(s)$, которая, в свою очередь, восстанавливается по $C(s) \equiv \overset{\curvearrowleft}{\dot{W}}(s)$ равенством

$$W(s) = W_0 \overset{\curvearrowleft}{\int_0^s} \exp\{C(t)\,dt\}, \tag{1}$$

где $\overset{\curvearrowleft}{\int}$ — символ мультипликативного интеграла Лебега [1; 4], $W_0 = W(0)$. Обратно, если для $W(s)$ справедливо равенство (1), в котором $C(t)$ — произвольная суммируемая оператор-функция, то почти всюду на $[0, l]$ существует $\overset{\curvearrowleft}{\dot{W}}(s) = C(s)$, $W'(s) = C(s)\,W(s)$.

В дальнейшем символом j обозначается такой оператор, что $j = j^* = j^{-1}$.

Лемма. *Пусть* $W(s)$ $(0 \leqslant s \leqslant l)$ — *абсолютно непрерывная оператор-функция,* $W(0) = I$. *Для того чтобы оператор* $W(s)$ *при всех* $s \in [0, l]$ *был* j-*унитарным**), необходима и достаточна* j-*эрмитовость оператора* $B(s) \equiv i\overset{\curvearrowleft}{\dot{W}}(s)$ *почти всюду на* $[0, l]$.

Доказательство. Так как $W'(s) = -iB(s)\,W(s)$, то $(W^*(s)\, jW(s))' = iW^*(s)\,(B^*(s)\,j - jB(s))\,W(s)$. Если $B(s)$ — j-эрмитов, то $(W^*(s)\,jW(s))' = 0$ почти всюду на $[0, l]$ и из $W(0) = I$ следует $W^*(s)\,jW(s) = j$ $(s \in [0, l])$. Из ограниченной обратимости $W(s)$ (вытекающей из (1) при $W_0 = I$) следует j-унитарность $W(s)$. Обратно, если $W(s)$ — j-унитарный оператор, то $(W^*(s) \times \times jW(s))' = 0$ и, значит, $B(s)$ — j-эрмитов оператор почти при всех $s \in [0, l]$.

Теорема 1. *Пусть* $W(s)$ — *абсолютно непрерывная на* $[0, l]$ *оператор-функция,* $W(0) = I$. *Тогда* $W(s)$ *допускает единст-*

---

* Все операторы, рассматриваемые в настоящей статье, действуют в некотором сепарабельном гильбертовом пространстве и являются ограниченными.

** Оператор W называется j-унитарным, если $W^*jW = WjW^* = j$, и j-эрмитовым, если $jW = W^*j$.

венное представление вида $W(s)=U(s)\overset{\curvearrowleft}{\int\limits_0^s}\exp\{H(t)\,dt\}$ **(2)**, где $U(s)$ принимает j-унитарные, а $H(s)$ — j-эрмитовы значения и является суммируемой. При этом $U(s)=\overset{\curvearrowleft}{\int\limits_0^s}\exp\{iB(t)\,dt\}$; $B(s)=\frac{1}{2i}(\overset{\curvearrowleft}{\dot{W}}(s)-j\overset{\curvearrowleft}{\dot{W}}{}^*(s)j)$ **(3)**; $H(s)=U^{-1}(s)A(s)U(s)$; $A(s)=\frac{1}{2}\overset{\curvearrowleft}{\dot{W}}(s)+j\overset{\curvearrowleft}{\dot{W}}{}^*(s)j)$ **(4)**.

Доказательство. Пусть $U(s)$ имеет вид (3). На основании леммы $U(s)$ при всех $s\in[0,l]$ является j-унитарным оператором. Очевидно, функция $Z(s)\equiv U^{-1}(s)W(s)$ абсолютно непрерывна, $Z(0)=I$. Пусть $H(s)=\overset{\curvearrowleft}{\dot{Z}}(s)$; $Z(s)=\overset{\curvearrowleft}{\int\limits_0^s}\exp\{H(t)\,dt\}$. Тогда $W'=iBUZ+UHZ$; $\overset{\curvearrowleft}{\dot{W}}=iB+UHU^{-1}$, откуда и следует (4).

Единственность представления (2) немедленно вытекает из равенства $\overset{\curvearrowleft}{\dot{W}}=\overset{\curvearrowleft}{\dot{U}}+UHU^{-1}$, получающегося дифференцированием (2), и j-эрмитовости операторов $i\overset{\curvearrowleft}{\dot{U}}$ (лемма) и UHU^{-1}.

2. Модуль мультипликативного интеграла от эрмитовозначной функции. Пусть M_j — совокупность таких ограниченно обратимых операторов A, что j-эрмитов оператор $B\equiv jA^*jA$ имеет положительный спектр. Очевидно, классу M_I принадлежит любой ограниченно обратимый оператор. Как известно, при произвольном j классу M_j принадлежат все ограниченно обратимые двоякие j-растягивающие и j-сжимающие операторы. Для любого $A\in M_j$ обозначим через R_A такой единственный оператор с положительным спектром, что $B=R_A^2$. Оператор R_A, являющийся, как легко видеть, j-эрмитовым, называется j-модулем оператора A. Очевидно, $A=V_AR_A$, где V_A — j-унитарный оператор.

Пусть $H(s)$ $(0\leqslant s\leqslant l)$ — произвольная j — эрмитовозначная суммируемая функция. Рассмотрим функцию $Z(s)=\overset{\curvearrowleft}{\int\limits_0^s}\exp\{H(t)dt\}$. Если $Z(s)\in M_j$ при всех $s\in[0,l]$*, то $R_{Z(s)}$ является абсолютно непрерывной функцией [1; 3; 4].

---

* Это будет, в частности, в случае существования такой скалярной суммируемой функции $h(s)$, что $j\,(H(s)+h(s)I)$ «сохраняет знак» на $[0,l]$.

Следующее утверждение, обратное только что приведенному, непосредственно вытекает из теоремы 1.

Теорема 2. *Пусть* $R(s)\,(0 \leqslant s \leqslant l)$ — *абсолютно непрерывная функция, все значения которой — j-эрмитовы операторы с положительным спектром,* $R(0) = I$. *Тогда существует такая единственная j-эрмитовозначная суммируемая на* $[0, l]$ *функция* $H(s)$, *что* $R(s)$ *при каждом* $s \in [0, l]$ *является j-модулем принадлежащего* M_j *оператора* $Z(s) = \overset{s}{\underset{0}{\int\limits^{\curvearrowleft}}} \exp\{H(t)\,dt\}$. При этом справедливы формулы В. П. Потапова: $H(s) = \frac{1}{2} U^{-1}(s)\,(R'(s) \times$ $\times R^{-1}(s) + R^{-1}(s)\,R'(s))\,U(s)$ **(5)**; $U(s) = \overset{s}{\underset{0}{\int\limits^{\curvearrowleft}}} \exp\left\{\frac{1}{2}(R'(t)R^{-1}(t) -\right.$ $\left. - R^{-1}(t)\,R'(t))\,dt\right\}$ **(6)**

$$Z(s) = U^{-1}(s)\,R(s).$$

3. О некоторых классах аналитических оператор-функций и их мультипликативных представлениях. Будем рассматривать голоморфные при $|z| < 1$ функции $X(z)$, значениями которых являются ограниченно обратимые операторы. Отнесем такую функцию к классу A, если $\sup\limits_{0<r<1} \int\limits_0^{2\pi} \ln^+ \| X(re^{it}) \|\,dt < \infty$, к классу D — если равностепенно абсолютно непрерывно на $[0, 2\pi]$ семейство $I_r(s) = \int\limits_0^s \ln^+ \| X(re^{it}) \|\,dt$, к классу C, — если $\| X(z) \| \leqslant 1$ при $|z| < 1$. Очевидно, $C \subset D \subset A$. Скалярные аналоги классов C, D, A обозначаются через C_1, D_1, A_1 соответственно.

Сформулированные ниже простые предложения доказаны в [5]. 1°. $X \in A \leftrightarrow X = y^{-1}Y$ $(y \in C_1,\ y(z) \neq 0$ при $|z| < 1,\ Y \in C)$. 2°. $X \in D \leftrightarrow X = y^{-1}Y$ (y — внешняя функция из C_1, $Y \in C$). 3°. Если $X \in A$, то $X(z)$ и $X^*(z)$ имеют почти в каждой точке e^{it} единичной окружности сильные радиальные предельные значения $X(e^{it})$ и $X^*(e^{it})$.

Пусть K' и K'' — каких-либо два из введенных классов оператор-функций. Будем писать $X \in (K' : K'')$, если $X \in K'$, $X^{-1} \in K''$. Как следует из 1° и 2°, изучение всех классов $(K' : K'')$ сводится к классу $(C : A) \equiv P$. В матричном (конечномерном) случае каждый класс $(K' : A)$ состоит из таких матриц-функций $X \in K'$, что $\det X(z) \neq 0$ при $|z| < 1$.

4° Для каждой функции $X \in P$ существует функция $m \in P_1 \equiv (C_1 : A_1)$ такая, что а) $mX^{-1} \in P$; б) какова бы ни была $m_1 \in P_1$, удовлетворяющая условию $m_1 X^{-1} \in P$, справедливо $m_1 m^{-1} \in P_1$. Такая функция $m(z)$, называемая наилучшей минорантой функции $X \in P$, определяется по X с точностью до скалярного унитарного множителя.

5°. Следующие утверждения равносильны: а) $X \in (C : D)$; б) X — внешняя функция класса P; в) X экстремальна в P, т. е. $X \in P$ и из $X_1 \in P$, $X_1^*(e^{it}) X_1(e^{it}) \leqslant X^*(e^{it}) X(e^{it})$ почти всюду на $[0, 2\pi]$ следует, что $X_1^*(z) X_1(z) \leqslant X^*(z) X(z)$ при $|z| < 1$; г) $X \in P$ и наилучшая миноранта функции X — внешняя функция.

6°. Если $X_1, X_2 \in (D : D)$, $X_1^*(e^{it}) X_1(e^{it}) = X_2^*(e^{it}) X_2(e^{it})$ почти всюду на $[0, 2\pi]$, то $X_2(z) = U X_1(z)$ $(|z| < 1)$, где U — постоянный унитарный оператор.

Следующее предложение [6] распространяет фундаментальную мультипликативную теорему В. П. Потапова [1] на класс P.

7°. Пусть наилучшая миноранта m функции $X \in P$ представлена в виде $m(z) = e^{i\alpha} \exp\left\{\int\limits_0^{2\pi} \frac{z + e^{it}}{z - e^{it}} d\sigma(t)\right\}$, где $\sigma(t)$ — неубывающая на $[0, 2\pi]$ функция, $\sigma(0) = 0$; $\sigma(t - 0) = \sigma(t)$ $(0 < t \leqslant 2\pi)$; $\operatorname{Im} \alpha = 0$. Положим $\varphi(s) = \operatorname{mes}\{t \mid \sigma(t) < s,\ 0 \leqslant s \leqslant l = \sigma(2\pi)\}$. Тогда существует такая эрмитово-неубывающая функция $E(s)$, $\| E(s'') - E(s') \| \leqslant | s'' - s' |$ для любых $s', s'' \in [0, l]$, что

$$X(z) = U \overset{\curvearrowleft}{\int\limits_0^l} \exp\left\{\frac{z + e^{i\varphi(s)}}{z - e^{i\varphi(s)}} dE(s)\right\} \tag{7}$$

(U — унитарный оператор).

Пусть теперь $X \in (C : D)$. Тогда на основании 5° функция $\sigma(t)$ абсолютно непрерывна, откуда, в частности, вытекает отсутствие интервалов постоянства у $\varphi(s)$. Это позволяет произвести в интеграле (7) замену переменной по формулам $\varphi(s) = t$, $s = \sigma(t)$. Обозначая через $G(t)$ слабую производную абсолютно непрерывной функции $E(\sigma(t))$, докажем в части необходимости следующее предложение.

Теорема 3. *Функция $X(z)$ $(|z| < 1)$ принадлежит классу $(C : D)$ (т. е. является внешней функцией класса $P = (C : A)$) в том и только в том случае, если*

$$X(z) = U \overset{\curvearrowleft}{\int\limits_0^{2\pi}} \exp\left\{\frac{z + e^{it}}{z - e^{it}} G(t)\, dt\right\}, \tag{8}$$

где U — унитарный оператор; $G(t)$ — суммируемая на $[0, 2\pi]$ функция со значениями — эрмитово-неотрицательными операторами.

Что касается достаточности, то включение $X \in C$ непосредственно следует [1; 4] из того, что $\operatorname{Re}\left\{\frac{z+e^{it}}{z-e^{it}} G(t)\right\} \leqslant 0$ ($|z|<1$, $t \in [0, 2\pi]$); принадлежность X^{-1} классу D вытекает из следующей теоремы.

Теорема 4. *Функция $X(z)$ ($|z|<1$) принадлежит $(D:D)$ в том и только том случае, если X допускает представление (8) с суммируемой эрмитовозначной функцией $G(t)$.*

Доказательство. Пусть $X \in (D:D)$. Из того, что $X \in D$, $X^{-1} \in D$, на основании 2° следует $X = y^{-1}Y$; $X^{-1} = y_1^{-1}Y_1$, где Y, $Y_1 \in C$, а y, y_1 — внешн е функции класса C_1. Отсюда $Y^{-1} = (yy_1)^{-1}Y_1$. Так как yy_1 — внешняя функция класса C_1, то $Y^{-1} \in D$. Таким образом, $Y \in (C:D)$ и, значит, на сновании теоремы 3

$$Y(z) = V \overset{2\pi}{\underset{0}{\overset{\curvearrowleft}{\int}}} \exp\left\{\frac{z+e^{it}}{z-e^{it}} F(t)\, dt\right\} \tag{9}$$

(V — унитарный оператор; F — суммируемая на $[0, 2\pi]$ функция; $F(t) \geqslant 0$). Так как

$$y(z) = e^{i\alpha} \exp\left\{\int_0^{2\pi} \frac{z+e^{it}}{z-e^{it}} f(t)\, dt\right\} \quad (f \in L', \ f(t) \geqslant 0, \ \operatorname{Im}\alpha = 0), \tag{10}$$

то $X(z)$ допускает представление (8), в котором $U = e^{i\alpha}V$, $G(t) = F(t) - f(t)\, I$.

Обратно, пусть для $X(z)$ справедливо (8). Тогда $X = y^{-1}Y$, где $Y(z)$ имеет вид (9) с $F(t) = G(t) + \|G(t)\| I \geqslant 0$, а $y(z)$ — вид (10) с $f(t) = \|G(t)\|$. На основании 2° $X \in D$. Так как

$$X^{-1}(z) = \overset{2\pi}{\underset{0}{\overset{\curvearrowright}{\int}}} \exp\left\{\frac{z+e^{it}}{z-e^{it}} (-G(t))\, dt\right\} U^{-1},$$

то $X^{-1} \in D$, и, значит, $X \in (D:D)$. Теорема доказана.

Теоремы 3, 4 дают основание называть функции из $(D:D)$ внешними функциями класса $(D:A)$. Можно показать, что $X \in (D:D)$ тогда и только тогда, когда $X(z)$ экстремальна в $(D:A)$ (ср. 5° в).

Единственность представлений вида (8) вытекает из доказанной ниже теоремы 6. Предварительно установим справедливость следующего предложения.

Теорема 5. *Для любой функции $X \in (D:D)$ и любого $s \in [0, 2\pi]$ существует единственная (с точностью до левого унитарного* *множителя, который в дальнейших записях опускается) функция* $X_s \in (D:D)$, *такая, что* $X_s(z)$ *и* $X(z)X_s^{-1}(z)$ голоморфны *и принимают унитарные значения соответственно на дугах* $\alpha_s = \exp(i\,]s,\ 2\pi[)$ и $\hat{\alpha}_s = \exp(i\,]0,\ s[)$. *Если (8) — существующее на основании теоремы 4 представление функции* X, *то*

$$X_s(z) = \overset{s}{\underset{0}{\overset{\frown}{\int}}} \exp\left\{\frac{z+e^{it}}{z-e^{it}}\, G(t)\, dt\right\}. \tag{11}$$

Доказательство. Голоморфность функции $X_s(z)$, задаваемой формулой (11), и

$$X(z)X_s^{-1}(z) = \overset{2\pi}{\underset{s}{\overset{\frown}{\int}}} \exp\left\{\frac{z+e^{it}}{z-e^{it}}\, G(t)\, dt\right\}.$$

соответственно на дугах α_s и $\hat{\alpha}_s$ очевидна; унитарн сть же вытекает непосредственно из леммы.

Пусть теперь функция $\tilde{X}_s(s)\ (\in (D:D))$ и $X(z)\tilde{X}_s^{-1}(z)$ голоморфны и унитарны на дугах α_s и $\hat{\alpha}_s$ соответственно. Тогда, как легко видеть, $\tilde{X}_s^*(e^{it})\tilde{X}_s(e^{it}) = X^*(e^{it})X(e^{it})$, $(0 < t < s)$; $\tilde{X}_s^*(e^{it}) \times \tilde{X}_s(e^{it}) = I$, $(s < t < 2\pi)$. Так как X_s удовлетворяет тем же условиям, то на основании 6° $\tilde{X}_s(z) = UX_s(z)$, где U — унитарный оператор.

Теорема 6. *Пусть* $Q(t)$ $(0 \leqslant t \leqslant 2\pi)$ — *абсолютно непрерывная принимающая эрмитово положительные значения функция,* $Q(0) = I$, z_0 — *произвольная точка,* $|z_0| < 1$. *Тогда существует единственная (с точностью до левого унитарного множителя) функция* $X \in (D:D)$, *такая, что* $X_s^*(z_0)X_s(z_0) = Q(s)$ $(0 \leqslant s \leqslant 2\pi)$. *В случае* $z_0 = 0$ *функция* $X(z)$ *выражается через абсолютно непрерывную функцию* $R(s) = \sqrt{Q(s)}$ *по формулам* (8), (5) (*где следует положить* $G = -H$) и (6).

Доказательство, которое достаточно провести для случая $z_0 = 0$, непосредственно следует из теорем 2, 4 и 5.

Замечание. Из очевидного равенства $\frac{d}{ds}(X_s^*(0)X_s(0)) = -2X_s^*(0)G(s)X_s(0)$ и теоремы 3 следует, что фугурирующая в теореме 6 функция X принадлежит $(C:D)$ в том и только том случае, если $Q(s)$ является эрмитово-невозрастающей.

Следствие. *Функция* G *в мультипликативном представлении (8) функции* $X \in (D:D)$ *определяется однозначно**.

* Некоторые предложения об единственности мультипликативных представлений для иных классов оператор-функций доказаны в [4, 6]. Там же приведены ссылки на ряд других работ, имеющих отношение к обсуждаемым в настоящей статье вопросам.

Следующая теорема показывает, что $G(t)$ зависит лишь от модулей граничных значений функции $X(z)$.

Теорема 7. *Пусть $N(s)$ $(0 \leqslant s \leqslant 2\pi)$ — слабо измеримая функция, принимающая эрмитово-неотрицательные значения и удовлетворяющая условиям $\ln \| N(s) \| \in L^{(1)}[0, 2\pi]$, $\ln \| N^{-1}(s) \| \in L^{(1)} \times [0, 2\pi]$. Тогда существует единственная эрмитовозначная суммируемая на $[0, 2\pi]$ функция $G(t)$, такая, что для функции*

$$X(z) = \overset{2\pi}{\underset{0}{\int^{\curvearrowleft}}} \exp \left\{ \frac{z + e^{it}}{z - e^{it}} G(t)\, dt \right\}$$

почти всюду на $[0, 2\pi]$ справедливо равенство $X^*(e^{is}) X(e^{is}) = N(s)^2$ **(12).**

Доказательство на основании следствия и предложения 6° сводится к тому, чтобы установить существование функции $X \in (D : D)$, удовлетворяющей условию (12). С этой целью рассмотрим функцию

$$w(z) = \exp \left\{ \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{e^{it} + z}{e^{it} - z} \ln \| N(t) \| \, dt \right\} \in (D_1 : D_1).$$

Как известно, $| w(e^{is}) | = \| N(s) \|$ почти везде на $[0, 2\pi]$. Положим $M(s) = \| N(s) \|^{-1} N(s)$. Тогда $M(s)$ слабо измерима, $\| M(s) \| \leqslant 1$ и $\ln \| M^{-1}(s) \| \in L^{(1)}[0, 2\pi]$ (последнее вытекает из неравенств $0 \leqslant \ln \| M^{-1}(s) \| \leqslant \ln \| N(s) \| + \ln \| N^{-1}(s) \|$). На основании известной теоремы Девинатца о факторизации эрмитово-неотрицательной оператор-функции и предложения 5° существует функция $Y \in (C : D)$, удовлетворяющая условию $Y^*(e^{is}) Y(e^{is}) = M(s)^2$ почти всюду на $[0, 2\pi]$.

Рассмотрим функцию $X = wY$. Так как $X \in (D : D)$ и $X^*(e^{is}) \times X(e^{is}) = | w(e^{is}) |^2 Y^*(e^{is}) Y(e^{is}) = \| N(s) \|^2 M(s)^2 = N(s)^2$, то теорема доказана.

Положим $(0 \leqslant s \leqslant 2\pi)$ $N_s(t) = \begin{cases} N(t) & (0 \leqslant t < s) \\ I & (s \leqslant t \leqslant 2\pi). \end{cases}$ Очевидно, $\ln \| N_s \| \in L^{(1)}[0, 2\pi]$, $\ln \| N_s^{-1} \| \in L^{(1)}[0, 2\pi]$ и функция $X_s(z)$ (см. теорему 5) удовлетворяет почти при всех $t \in [0, 2\pi]$ условию $X_s^*(e^{it}) X_s(e^{it}) = N_s(t)^2$ **(13).** Таким образом, нахождение функции G по N сводится к решению семейства граничных задач (13) и к применению формул В. П. Потапова (5), (6) к функции $R(s) \equiv \sqrt{X_s^*(0) X_s(0)}$.

В заключение заметим, что так как функция $W(s) \equiv \overset{s}{\underset{0}{\int^{\curvearrowleft}}} \exp \{ A(t)\, dt \}$ является решением уравнения $W' = AW$ при условии $W(0) = I$, то результаты настоящей статьи могут быть переформулированы как предложения о построении канонической дифференциальной системы по некоторой информации об ее матрице Вронского (сравни с введением к работе [1]).

Список литературы: 1. *Потапов В. П.* Мультипликативная структура j-нерастягивающих матриц-функций.— Тр. Моск. мат. об-ва, 1955, **4**, с. 125—236. 2. *Потапов В. П.* Теорема о модуле, I.— Теория функций, функцион. анализ и их прил., 1982, вып. 38, с. 91—101. 3. *Потапов В. П.* Теорема о модуле, II.— Теория функций, функцион. анализ и их прил., 1983, вып. 39, с. 95—106. 4. *Гинзбург Ю. П.* О мультипликативных представлениях j-нерастягивающих оператор-функций.— Мат. исследования, 1967, **2**, № 2, с. 52—83; № 3, с. 20—51. 5. *Гинзбург Ю. П.* О делителях и минорантах оператор-функций ограниченного вида. — Мат. исследования, 1967, **2**, № 4, с. 47—72. 6. *Гинзбург Ю. П.* Мультипликативные представления и миноранты ограниченных аналитических оператор-функций. —Функцион. анализ и его прил., 1967, **1**, № 3, с. 9—23.

Поступила в редколлегию 30.09.81.