УДК 517.54 + 517.4

В. К. ДУБОВОЙ

ИНДЕФИНИТНАЯ МЕТРИКА В ИНТЕРПОЛЯЦИОННОЙ ПРОБЛЕМЕ ШУРА ДЛЯ АНАЛИТИЧЕСКИХ ФУНКЦИЙ. 3

В предыдущих частях работы, опубликованных в 37 и 38 выпусках этого сборника, методами J-теории была исследована задача Шура для аналитических в единичном круге сжимающих матриц-функций (класс $S_{p,q}$). Это, в частности, позволило ввести для этих функций понятие дефектных чисел (§ 6). С другой стороны, функции класса $S_{p,q}$ являются характеристическими функциями (х. ф.) унитарных узлов [1—3]. В данной части статьи выясняется роль дефектных чисел при исследовании унитарных узлов и соответствующих им консервативных систем. Необходимые понятия и сведения из теории унитарных узлов приведены в § 7. В § 8 устанавливается связь дефектных чисел с управляемостью и наблюдаемостью консервативных систем. Полученные результаты позволяют выяснить связь между кратностями максимальных односторонних сдвигов, содержащихся в операторе сжатия, и сопряженном к нему (§ 9)

7. Некоторые сведения из теории унитарных узлов. 1. Как известно [3], совокупность, состоящая из сепарабельных гильбертовых пространств H (внутреннего), E_-, E_+ (внешних), для которых $\dim(H \oplus E_-) = \dim(H \oplus E_+)$, и унитарного оператора $U \in [H \oplus E_+,\ H \oplus E_-]^*$, называется унитарным узлом или просто узлом и обозначается символом $(H,\ E_-,\ E_+;\ U)$. Оператор U допускает блочное представление:

$$U = \begin{bmatrix} T & F \\ G & S \end{bmatrix},$$

где операторы

$$T \in [H,\ H],\ F \in [H,\ E_-],\ G \in [E_+,\ H],\ S \in [E_+,\ E_-]$$

называются соответственно основным, правым каналовым, левым каналовым и дублирующим. Легко видеть, что операторы T, F, G и S тогда и только тогда являются компонентами узла, когда $T^*T + G^*G = I_H$; $TT^* + FF^* = I_H$ **(7.1)**; $T^*F + G^*S = 0$; $TG^* + FS^* = 0$ **(7.2)**; $F^*F + S^*S = I_{E_-}$; $GG^* + SS^* = I_{E_+}$ **(7.3)**.

Очевидно, что основной оператор узла является сжатием, т. е. для любого $h \in H$ выполняется неравенство $\|Th\| \leqslant \|h\|$.

2. Узлу $\Delta = (H,\ E_-,\ E_+;\ T,\ F,\ G,\ S)$ можно поставить в соответствие консервативную систему α рассеяния с дискретным временем $n\ (= 0,\ 1,\ 2,\ \ldots)$ [4]:

$$\begin{aligned} h(n+1) &= Th(n) + F\varphi_-(n), \\ \varphi_+(n) &= Gh(n) + S\varphi_-(n). \end{aligned} \tag{7.4}$$

Векторы $\varphi_-(n)$, $\varphi_+(n)$ и $h(n)$ из E_-, E_+ и H интерпретируются как данные соответственно на входе, выходе и внутри системы в момент времени n. Оператором T описывается эволюция внутреннего состояния при нулевых данных на входе $h(n) = T^n h(0)$ при $\varphi_-(n) \equiv 0$.

---

* Через $[H,\ E]$ обозначается совокупность всех линейных ограниченных операторов, действующих из E в H.

Как и в работе [4], будем пользоваться следующими обозначениями:

$$H_y = \bigvee_{n=1}^{\infty} T^n F E_-, \quad H_н = \bigvee_{n=0}^{\infty} (T^*)^n G^* E_+ \tag{7.5}$$

($\bigvee_n D_n$ — наименьшее подпространство, содержащее все D_n).

Система α называется управляемой (наблюдаемой), если $H = H_y$ ($H = H_н$). В случае, когда $\dim H < \infty$, управляемая система характеризуется тем, что у нее из нулевого начального состояния можно через некоторый промежуток времени достигнуть любое наперед заданное внутреннее состояние при соответствующем подборе последовательности данных на входе. Система α называется наблюдаемой, если сопряженная система α^*, соответствующая сопряженному узлу $\Delta^* = (H, E_+, E_-; T^*, G^*, F^*, S^*)$, является управляемой.

Сжатие T в H называется вполне неунитарным, если оно не является унитарным ни в H, ни в каком-либо его подпространстве (приводящем оператор T), отличном от $\{0\}$. Как известно [5], каждое сжатие T разлагается в ортогональную сумму унитарного и вполне неунитарного сжатий, что позволяет сводить изучение произвольного сжатия к изучению сжатий этих двух частных видов. Отметим [3], что основной оператор T узла Δ является вполне неунитарным в том и только в том случае, если узел Δ прост, т. е. $H = H_y \vee H_н$.

3. Пусть V — изометрия в H. Подпространство $L \subset H$ называется блуждающим относительно V, если $V^p L \perp V^q L$ для всех неотрицательных p и q, $p \neq q$. Рассмотрим ортогональную сумму $M_+(L) = \bigoplus_0^{\infty} V^n L$. Изометрия V в H называется односторонним сдвигом, если в H существует такое блуждающее относительно V подпространство L, что $M_+(L) = H$. Это подпространство, называемое порождающим, определяется оператором V однозначно, поскольку $L = H \ominus VH$. Размерность L называется кратностью одностороннего сдвига. Кратность определяет V с точностью до унитарной эквивалентности [5].

Пусть T вполне неунитарное сжатие в H. Будем говорить, что односторонний сдвиг V, действующий в H', содержится в T, если: 1) $H' \subseteq H$; 2) H' инвариантно относительно T; 3) $T_{|H'} = V$. Пусть V_1 — максимальный среди всех односторонних сдвигов, содержащихся в T, в том смысле, что содержит любой односторонний сдвиг, входящий в T. Очевидно, V_1 определяется единственным образом. Рассмотрим теперь триангуляцию вида

$$T = \begin{bmatrix} V_1 & * & * \\ 0 & T_0 & * \\ 0 & 0 & V_2^* \end{bmatrix}, \tag{7,6}$$

где V_2 — максимальный односторонний сдвиг, содержащийся в T^*. Пусть V_1 действует в H_1, T_0 — в H_0 и V_2 — в H_2. Тогда в соответствии с (7.6) $H = H_1 \oplus H_0 \oplus H_2$.

Пусть $\Delta = (H.\ E_-,\ E_+;\ T,\ F,\ G,\ S)$ — простой узел. Введем в рассмотрение подпространства $H_y^{(c)} = H \ominus H_y$; $H_н^{(c)} = H \ominus \ominus H_H$ **(7.7)**. Из условий узла (7.1) — (7.3) легко следует, что при представлении T в виде (7.6) $H_1 = H_н^{(c)}$; $H_2 = H_y^{(c)}$. В связи с этим операторы V_1 и V_2 обозначим соответственно $V_н^{(c)}$ и $V_y^{(c)}$. Итак, справедлива

Лемма 7.1. *Пусть $\Delta = (H,\ E_-,\ E_+;\ T,\ F,\ G.\ S)$ — простой унитарный узел. Тогда при разложении внутреннего пространства $H = H_н^{(c)} \oplus H_0 \oplus H_y^{(c)}$* **(7.8)** *сновной оператор допускает триангуляцию*

$$T = \begin{bmatrix} V_H^{(c)} & \divideontimes & \divideontimes \\ 0 & T_0 & \divideontimes \\ 0 & 0 & V_y^{(c)*} \end{bmatrix}, \tag{7.9}$$

где $V_H^{(c)}$ и $V_y^{(c)}$ — максимальные односторонние сдвиги, содержащиеся соответственно в T и в T^*.

4. Построим по данному унитарному узлу $\Delta = (H,\ E_-,\ E_+;\ T,\ F,\ G,\ S)$ функцию комплексного переменного $\theta(\zeta) = S + \zeta G(I - \zeta T)^{-1} F$ $(|\zeta| < 1)$ **(7.10)**. По отношению к узлу Δ функцию $\theta(\zeta)$ принято называть характеристической функцией (х. ф.), а по отношению к соответствующей системе (7.4) ее называют передаточной функцией.

Как известно [3], функция $\theta(\zeta)$ является голоморфной внутри единичного круга и $\theta^*(\zeta)\theta(\zeta) \leqslant I_{E_-}$, при этом значения $\theta(\zeta)$ принадлежат $[E_+,\ E_-]$. Более того, каждая функция $\theta(\zeta)$, обладающая этими свойствами, является х. ф. некоторого простого узла $\Delta = (H,\ E_-,\ E_+;\ T,\ F,\ G,\ S)$, который определяется по $\theta(\zeta)$ с точностью до унитарной эквивалентности.

Отметим, что х. ф. $\hat\theta(\zeta)$ сопряженного узла Δ^* связана с х. ф. $\theta(\zeta)$ узла Δ соотношением [3]: $\hat\theta(\zeta) = \theta^*(\bar\zeta)$ **(7.11)**.

5. Пусть T — сжатие в гильбертовом пространстве H. Как известно [5], операторы $D_T = (I - T^*T)^{\frac{1}{2}}$, $D_{T^*} = (I - TT^*)^{\frac{1}{2}}$ называются дефектными операторами, подпространства $\Delta_{D_T} = \overline{D_T H}$, $\Delta_{D_{T^*}} = \overline{D_{T^*} H}$ — дефектными подпространствами, а кардинальные числа $\delta_T = \dim \Delta_{D_T}$, $\delta_{T^*} = \dim \Delta_{D_{T^*}}$ — дефектными числами сжатия T.

Условие $\delta_T = 0$ характеризует изометрические, а условия $\delta_T = \delta_{T^*} = 0$ — унитарные операторы. Таким образом, дефектные числа являются в некотором смысле мерой отклонения сжатия T от унитарности.

Заметим, что сжатие T всегда можно включить в узел $\Delta = (H, E_-, E_+; T, F, G, S)$ таким образом, что $\delta_T = \dim E_+$, $\delta_{T^*} = \dim E_-$. Такое включение будем называть минимальным, поскольку для любого включения, как следует из условий узла (7.1), справедливы соотношения $\delta_T \leqslant \dim E_+$, $\delta_{T^*} \leqslant \dim E_-$.

В дальнейшем будем рассматривать узлы с конечномерными внешними пространствами $\dim E_+ = p$, $\dim E_- = q$. Зафиксировав в этом случае ортонормированные базисы в E_+ и в E_-, можно отождествить х. ф. простых узлов $\Delta = (H, E_-, E_+; T, F, G, S)$ с функциями класса $S_{p,q}$. Будем предполагать, что это сделано.

8. Связь дефектных чисел характеристической функции с кратностями односторонних сдвигов, содержащихся в сжатии. 1. Вначале* получим играющую существенную роль в дальнейшем формулу для $\rho_{d,n}(0)$. Для этого заметим, что из (6.2) следует

$$\rho_{d,n}^{-1}(0) = \Lambda_{q,n}(0)(I - C_n^* C_n)^{-1} \Lambda_{q,n}^*(0). \tag{8.1}$$

Разложим $I - C_n^* C_n$ на блоки

$$I - C_n^* C_n = \begin{bmatrix} A & B \\ B^* & C \end{bmatrix},$$

где

$$A = I_q - \sum_{k=0}^{n} c_k^* c_k; \quad B = -[c_1^*, \ldots, c_n^*] C_{n-1}; \quad C = I - C_{n-1}^* C_{n-1}.$$

Так как оператор C обратим, то

$$I - C_n^* C_n = \begin{bmatrix} I & BC^{-1} \\ 0 & I \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A - BC^{-1}B^* & 0 \\ 0 & C \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I & 0 \\ C^{-1}B^* & I \end{bmatrix}.$$

Поэтому $(I - C_n^* C_n)^{-1} = \begin{bmatrix} I & 0 \\ -C^{-1}B^* & I \end{bmatrix} \begin{bmatrix} (A - BC^{-1}B^*)^{-1} & 0 \\ 0 & C^{-1} \end{bmatrix} \times$

$$\times \begin{bmatrix} I & -BC^{-1} \\ 0 & I \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} (A - BC^{-1}B^*)^{-1} & * \\ * & * \end{bmatrix}.$$

Подставляя это выражение в (8.1), находим $\rho_{d,n}(0) = A - BC^{-1} \times B^* = I - \sum_{k=0}^{n} c_k^* c_k - [c_1^*, \ldots, c_n^*] C_{n-1} (I - C_{n-1}^* C_{n-1})^{-1} C_{n-1}^* \times \begin{bmatrix} c_1 \\ \vdots \\ c_n \end{bmatrix}$ и после простых преобразований получаем

$$\rho_{d,n}(0) = I - c_0^* c_0 - [c_1^*, \ldots, c_n^*] A_{n-1}^{-1} \begin{bmatrix} c_1 \\ \vdots \\ c_n \end{bmatrix}. \tag{8.2}$$

---

* Как и ранее, рассматриваются функции $\theta(\zeta) \in S_{p,q}$, для которых информационные блоки $A_n = I - C_n C_n^*$, $n = 0, 1, 2 \ldots$ невырождены.

2. Рассмотрим $\theta(\zeta) \in S_{p,q}$: $\theta(\zeta) = c_0 + c_1\zeta + \cdots + c_n\zeta^n + \cdots$ Как было отмечено, $\theta(\zeta)$ является х. ф. некоторого простого узла $\Delta = (H, E_-, E_+; T, F, G, S)$. Поэтому из (7.10) имеем $\theta(\zeta) = S + \sum_{n=1}^{\infty} \zeta^n G T^{n-1} F$, т. е. $c_0 = S$, $c_n = G T^{n-1} F$, $n = 1, 2, 3, \ldots$ **(8.3)**. Это позволяет выразить $\rho_{d,n}(0)$ через элементы узла Δ. Получим сначала соответствующее выражение для информационного блока $A_n = I - C_n C_n^*$.

$$C_n = \begin{bmatrix} c_0 & & & \\ c_1 & c_0 & 0 & \\ \vdots & \vdots & \ddots & \\ c_n & c_{n-1} & \ldots & c_0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} S & & & \\ GF & S & 0 & \\ \vdots & \vdots & \ddots & \\ GT^{n-1}F & GT^{n-2}F & \ldots & S \end{bmatrix} =$$

$$= \begin{bmatrix} S & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & S \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} G & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & G \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & & & & 0 \\ I & 0 & & & \\ T & I & 0 & & \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \\ T^{n-1} & T^{n-2} & T^{n-3} & \ldots & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} F & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & F \end{bmatrix}.$$

Отсюда, учитывая условия узла (7.1) — (7.3), получаем

$$A_n = \begin{bmatrix} G \\ GT \\ \vdots \\ GT^n \end{bmatrix} [G^*, T^*G^*, \ldots, T^{*n}G^*]. \qquad (8.4)$$

Заметим, что

$$[G^*, T^*G^*, \ldots, T^{*n}G^*] \begin{bmatrix} G \\ GT \\ \vdots \\ GT^n \end{bmatrix} = I - T^{*n+1}T^{n+1}. \qquad (8.5)$$

Из этого равенства и (8.4) находим для $m = 1, 2, 3, \ldots$

$$A_n^m = \begin{bmatrix} G \\ GT \\ \vdots \\ GT^n \end{bmatrix} (I - T^{*n+1}T^{n+1})^{m-1} [G^*, T^*G^*, \ldots, T^{*n}G^*]. \quad (8.6)$$

Введем в рассмотрение подпространства $H_n = \bigvee_{k=0}^{n} T^{*k}G^*E_+$, $n = 0, 1, 2, \ldots$ **(8.7)**. Из (8.5) следует, что H_n является образом $I - T^{*n+1}T^{n+1}$. Значит, оператор $Q_n = (I - T^{*n+1}T^{n+1})_{|H_n}$ обратим.

Для дальнейшего удобно через $(I-T^{*n+1}T^{n+1})^{-1}$ обозначить оператор, действующий по правилу

$$(I-T^{*n+1}T^{n+1})^{-1}h=\begin{cases}Q_n^{-1}h, & h\in H_n,\\ 0, & h\in H\ominus H_n.\end{cases}$$

Очевидно, $(I-T^{*n+1}T^{n+1})(I-T^{*n+1}T^{n+1})^{-1}=(I-T^{*n+1}T^{n+1})^{-1}\times$
$\times(I-T^{*n+1}T^{n+1})=P_n$, где P_n — ортопроектор на H_n.

После этого нетрудно проверить, что равенство (8.6) имеет место для любого целого $m=0,\ \pm1,\ \pm2,\ \ldots$.

Вернемся к формуле (8.2). Учитывая (8.3), перепишем ее в виде

$$\rho_{d,n}(0)=I-S^*S-F^*[G^*,T^*G^*,\ldots,T^{*n-1}G^*]\,A_{n-1}^{-1}\begin{bmatrix}G\\ GT\\ \vdots\\ GT^{n-1}\end{bmatrix}F.$$

Подставляя в это равенство выражение для A_{n-1}^{-1} из формулы (8.6) и пользуясь соотношением (8.5), находим $\rho_{d,n}(0)=I-$ $-S^*S-F^*P_{n-1}F$. Откуда с учетом одного из условий узла (см. первое соотношение (7.3)) получаем $\rho_{d,n}(0)=F^*F-F^*P_{n-1}F=$ $=F^*(I-P_{n-1})F$. **(8.8).**

Пусть P_H, P_y, $P_H^{(c)}$ и $P_y^{(c)}$ — ортопроекторы на H_H, H_y, $H_H^{(c)}$ и $H_y^{(c)}$ соответственно. Из (7.7) следует $P_H\oplus P_H^{(c)}=I$, $P_y\oplus P_y^{(c)}=$ $=I$. Очевидно, $P_n\to P_H$ при $n\to\infty$. Поэтому из (8.8) окончательно находим $\rho_{d,\infty}(0)=F^*P_H^{(c)}F$ **(8.9).**

Повторяя аналогичные рассуждения для х. ф. сопряженного узла Δ^* и учитывая (7.11) и (6.6), получаем $r_{g,\infty}(0)=GP_y^{(c)}G^*$ **(8.10).**

3. Соотношение (8.9) позволяет доказать следующее утверждение.

Теорема 8.1. *Ранг правого радиуса $\rho_{d,\infty}(\zeta)$ х. ф. вполне неунитарного сжатия T равен кратности максимального одностороннего сдвига $V_H^{(c)}$, содержащегося в операторе T.*

Доказательство. В соответствии с разложением $H=$ $=H_H^{(c)}\oplus H_H$ представим оператор T в виде

$$T=\begin{bmatrix}V_H^{(c)} & T_{01}\\ 0 & T_1\end{bmatrix}.$$

Тогда унитарный оператор $U=\begin{bmatrix}T & F\\ G & S\end{bmatrix}$ допускает представление

$$U=\begin{bmatrix}V_H^{(c)} & T_{01} & F_0\\ 0 & T_1 & F_1\\ 0 & G_1 & S\end{bmatrix}.$$

В частности, из унитарности U следует $V_н^{(c)} V_н^{(c)} + T_{01}T_{01}^* + F_0 F_0^* = I_{H_н^{(c)}}$ **(8.11)**, $T_1 T_{01}^* + F_1 F_0^* = 0$, $G_1 T_{01}^* + SF_0^* = 0$ **(8.12)**.

Пусть L — блуждающее подпространство для $V_н^{(c)}$. Тогда* $I_{H_н^{(c)}} - V_H^{(c)} V_H^{(c)*} = P_L$ **(8.13)** и кратность $V_н^{(c)}$ равна $\dim L$.

Согласно введенным обозначениям $F_0 = P_H^{(c)} F$. Поэтому из (8.9) следует $\rho_{d,\infty}(0) = F_0^* F_0$. Значит, для доказательства теоремы достаточно показать, что $\Delta_{F_0 F_0^*} = L$ **(8.14)**. Из (8.11) с учетом (8.13) имеем $T_{01}T_{01}^* + F_0 F_0^* = P_L$. **(8.15)**.

Таким образом, для доказательства (8.14) достаточно установить неравенство $T_{01}T_{01}^* < P_L$. Предполагая противное, предположим, что существует вектор $h \in H_н^{(c)}$, $h \neq 0$ такой, что $T_{01}T_{01}^* h = h$. Тогда, в силу (8.15), $F_0^* h = 0$. В этом случае из равенств (8.12) следует $T_1 T_{01}^* h = 0$; $G_1 T_{01}^* h = 0$. Значит, если $g = T_{01}^* h$, то $T_1 g = 0$, $G_1 g = 0$, $g \in H_н$, $g \neq 0$. Откуда, для любого $n = 0, 1, 2, \ldots$ получаем

$$GT^n g = [0,\ G_1] \begin{bmatrix} V_H^{(c)} & T_{01} \\ 0 & T_1 \end{bmatrix}^n \begin{bmatrix} 0 \\ g \end{bmatrix} = G_1 T_1^n g = 0.$$

Таким образом, $g \perp H_н$, т. е. $g = 0$. Полученное противоречие доказывает теорему. Аналогично из (8.10) следует

Теорема 8.2. *Ранг нормированного левого радиуса $r_{g,\infty}(\zeta)$ х. ф. вполне неунитарного сжатия T равен кратности максимального одностороннего сдвига $V_y^{(c)}$, содержащегося в операторе T^*.*

Следствие. *Дефектные числа δ_θ и $\delta_{\theta*}$ х. ф. $\theta(\zeta)$ вполне неунитарного сжатия T равны соответственно кратностям максимальных односторонних сдвигов, содержащихся в T и в T^*.*

Относительно консервативных систем из полученных утверждений непосредственно вытекает

Теорема 8.3. *Консервативная система с передаточной функцией $\theta(\zeta)$ наблюдаема (управляема) в том и только в том случае, если $\delta_\theta = 0$ ($\delta_{\theta*} = 0$).*

Таким образом, дефектное число δ_θ является в некотором смысле мерой отклонения консервативной системы от наблюдаемости, а дефектное число $\delta_{\theta*}$ — мерой отклонения от управляемости.

9. О кратностях односторонних сдвигов, содержащихся в сжатии. Пусть T — вполне неунитарное сжатие в гильбертовом пространстве H с конечными дефектными числами δ_T и δ_{T*}. Рассмотрим для T триангуляцию (7.9) и обозначим соответственно

* P_L — ортопроектор на L.

через m и n кратности односторонних сдвигов $V_н^{(c)}$ и $V_y^{(c)}$. Возникает естественный вопрос о связи между кратностями m, n и дефектными числами δ_T и δ_{T^*}. Из определения δ_T и δ_{T^*} непосредственно следует $n \leqslant \delta_T$; $m \leqslant \delta_{T^*}$ **(9.1)**.

Полный ответ дают следующие два утверждения.

Теорема 9.1. *Равенство в одном из неравенств* (9.1) *влечет равенство и в другом. При этом для любой пары неотрицательных чисел* (p, q), $p+q>0$ *существует вполне неунитарное сжатие* T, *такое что* $n=\delta_T=p$, $m=\delta_{T^*}=q$.

Доказательство. Прежде всего заметим, что случай равенства нулю одного из дефектных чисел приводит нас к рассмотрению операторов одностороннего сдвига или сопряженных к ним. Ясно, что в этом случае доказательство утверждений теоремы не представляет труда.

Пусть теперь T — вполне неунитарное сжатие, дефектные числа которого больше нуля. Не нарушая общности, предположим, что знак равенства достигается в первом из неравенств (9.1), т. е. $n=\delta_T$. Докажем, что в этом случае $m=\delta_{T^*}$. Включим для этого T в минимальный узел и рассмотрим соответствующую х. ф. $\theta(\zeta)$. Из минимальности узла следует $\theta(\zeta) \in S_{p,q}$, где $p = \delta_T$, $q=\delta_{T^*}$. Учитывая, что $n=p$, из формулы (8.4) видно, что в рассматриваемом случае все информационные блоки положительны: $A_n>0$, $n=0, 1, 2, \ldots$. Поэтому для функции $\theta(\zeta)$ можно рассмотреть дефектные числа δ_θ и δ_{θ^*}, при этом в силу следствия к теоремам 8.1 и 8.2 $m=\delta_\theta$, $n=\delta_{\theta^*}$. Но тогда $\delta_{\theta^*} = n=\delta_T=p$ и, значит, $r_{g,\infty}(\zeta)$ имеет полный ранг. Из теоремы 6.3 следует, что в этом случае $\rho_{d,\infty}(\zeta)$ также имеет полный ранг, т. е. $\delta_\theta=q$. Значит, $m=\delta_\theta=q=\delta_{T^*}$ и первое утверждение теоремы доказано.

Для доказательства второй части теоремы рассмотрим для пары целых положительных чисел (p, q) класс $S_{p,q}$. Как показано в § 6 класс $S_{p,q}$ содержит функцию $\theta(\zeta)$ (и не одну), такую что $\delta_\theta=q$, $\delta_{\theta^*}=p$. Тогда вполне неунитарное сжатие T, для которого $\theta(\zeta)$ является х. ф., удовлетворяет условиям $n=\delta_{\theta^*} = p \geqslant \delta_T$, $m=\delta_\theta=q\geqslant\delta_{T^*}$. Учитывая теперь неравенства (9.1), получаем $n=\delta_T=p$, $m=\delta_{T^*}=q$, и теорема полностью доказана.

Теорема 9.2. *Пусть* (p, q) — *произвольная пара целых положительных чисел. Тогда для любой пары целых чисел* (α, β), *удовлетворяющей условиям* $0\leqslant\alpha\leqslant p-1$; $0\leqslant\beta\leqslant q-1$, *существует вполне неунитарное сжатие* T, *для которого* $\delta_T=p$, $\delta_{T^*}=q$, $n=\alpha$, $m=\beta$.

Для доказательства достаточно воспользоваться теоремой 6.9 и повторить рассуждения, проведенные при доказательстве второй части предыдущей теоремы.

Список литературы: 1. *Дубовой В. К.* Индефинитная метрика в интерполяционной проблеме Шура для аналитических функций. 1. — Теория функций, функцион. анализ и их прил., 1982, вып. 37, с. 14—26. 2. *Дубовой В. К.*

Индефинитная метрика в интерполяционной проблеме Шура для аналитических функций. 2. — Теория функций, функцион. анализ и их прил., 1982, вып. 38, с. 32—40. 3. *Бродский М. С.* Унитарные операторные узлы и их характеристические функции.— Усп. мат. наук, 1978, **33**, вып. 4 (202), с. 144—168. 4. *Аров Д. З.* Пассивные линейные стационарные динамические системы.— Сиб. мат. журн., 1979, 20, № 2, с. 211—228. 5. *Секефальви-Надь Б.*, *Фояш Ч*, Гармонический анализ операторов в гильбертовом пространстве.— М.: Мир, 1970. — 325 с.

Поступила в редколлегию 16.09.81.