УДК 517.9

А. Г. ЧЕРНЯВСКИЙ

# ОБ ОДНОЙ ЛИНЕАРИЗОВАННОЙ ОБРАТНОЙ ЗАДАЧЕ ДЛЯ УРАВНЕНИЯ ГЕЛЬМГОЛЬЦА

1. Рассмотрим уравнение $\Delta u(x) + k^2 (1 + q(x))\, u(x) = \delta(x - x_0)$; $x,\ x_0 \in R^N$ (1). Пусть $S_r = \{x = (x_1, \ldots, x_N) : |x|^2 = x_1^2 + \cdots + x_N^2 \leqslant r^2\}$, $N > 1$. Предположим, что $q(x)$ — непрерывная комплексная функция с носителем в некотором шаре $G = S_{r_0}$, $0 < r_0 < \infty$.

Допустим, что решение $u(x, x_0)$ уравнения (1), удовлетворяющее условию излучения, известно при $(x, x_0) \in G_1 \times G_2$, где $G_1$, $G_2$ — произвольные односвязные области, не пересекающиеся с областью $G$. Обратная задача для уравнения (1) состоит в отыскании по этим данным функции $q(x)$ в шаре $G$.

Вопрос о единственности решения этой обратной задачи был рассмотрен в работе М. М. Лаврентьева [1] в связи с соответствующим вопросом для нестационарного волнового уравнения. Поскольку для нестационарного уравнения данные о решении предполагались известными в любое время $t > 0$, то для уравнения (1), которое получалось из нестационарного после косинус-преобразования Фурье по $t$, решение $u = u(x, x_0, k)$ было известным в области $G_1 \times G_2$ при всех вещественных $k$.

В работе [1] (см. также [2]) было показано, что, если решение $u(x, x_0, k)$ известно в области $G_1 \times G_2$ при всех $k$ из произвольной стремящейся к нулю последовательности $\{k_i\}$, то функция $q(x)$ определяется единственным образом.

Докажем единственность решения линеаризованной обратной задачи для уравнения (1) с данными, известными при произвольном фиксированном $k > 0$. В случае $N = 2$ получена одна формула обращения для функции $q(x)$.

2. Пусть $\Phi(|x - x_0|)$ — фундаментальное решение уравнения Гельмгольца, удовлетворяющее условию излучения. В линеаризованной обратной задаче функция $q$ и решение $u(x, x_0)$ связаны линейным интегральным уравнением первого рода (см. [2]):

$$k^2 \int_G q(\xi) \Phi(|\xi - x|) \Phi(|\xi - x_0|) d\xi = -u(x, x_0) + \Phi(|x - x_0|), \quad (2)$$

в котором $u(x, x_0)$ известно при $(x, x_0) \in G_1 \times G_2$.

Эта обратная задача соответствует приближению однократного рассеяния для $u$ и представляет самостоятельный интерес (см. монографию [2], где исследован ряд линеаризованных обратных задач математической физики, и работу [3], где на физическом уровне строгости получен ряд теоретических и экспериментальных критериев применимости такого приближения в обратной задаче для уравнения Гельмгольца).

**Теорема 1.** *Пусть решение $u(x, x_0)$ уравнения* (1) *изввестно при $(x, x_0) \in G_1 \times G_2$. Тогда интегральное уравнение* (2) *линеаризованной обратной задачи для уравнения* (1) *имеет единственное решение $q(x)$.*

Доказательство. В силу единственности аналитического продолжения функция $u(x, x_0)$ известна всюду вне области $G \times G$. Установим единственность решения интегрального уравнения $\int_G q(\xi) \Phi(|\xi - x|) \Phi(|\xi - x_0|) d\xi = 0, \quad (x, x_0) \bar{\in} G \times G$ (3). Предположим для определенности, что $N = 3$. Воспользуемся представлением [4]:

$$\frac{e^{ik|y|}}{|y|} = \frac{i}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\exp\left(i\left(\lambda_1 y_1 + \lambda_2 y_2 + |y_3| \sqrt{k^2 - \lambda_1^2 - \lambda_2^2}\right)\right)}{\sqrt{k^2 - \lambda_1^2 - \lambda_2^2}} d\lambda, \quad (4)$$

в котором $\operatorname{Im} \sqrt{k^2 - \lambda_1^2 - \lambda_2^2} \geqslant 0$. Это представление следует понимать следующим образом (см. [5]). Пусть $F_{\lambda_1, \lambda_2}$ есть оператор Фурье в пространстве обобщенных функций медленного роста от двух переменных. Тогда

$$\frac{e^{ik|y|}}{|y|} = \operatorname{const} F_{\lambda_1, \lambda_2} \left[ \frac{\exp\left(i\left(\lambda_1 y_1 + \lambda_2 y_2 + |y_3| \sqrt{k^2 - \lambda_1^2 - \lambda_2^2}\right)\right)}{\sqrt{k^2 - \lambda_1^2 - \lambda_2^2}} \right].$$

Пользуясь этим представлением, получим из (3)

$$F_{\lambda_1, \lambda_2} F_{\mu_1, \mu_2} \int_G q(\xi) \left( \sqrt{(k^2 - \lambda_1^2 - \lambda_2^2)(k^2 - \mu_1^2 - \mu_2^2)} \right)^{-1} \times$$
$$\times \exp [- i (\xi_1 (\lambda_1 + \mu_1) + \xi_2 (\lambda_2 + \mu_2) + (\xi_3 - x_3) \times$$
$$\times \sqrt{k^2 - \lambda_1^2 - \lambda_2^2} + (\xi_3 - x_{03}) \sqrt{k^2 - \mu_1^2 - \mu_2^2} \Big] \times$$
$$\times d\xi = 0; \ (x_1, x_2), \ (x_{01}, x_{02}) \in R^2; \ |x_3|, \ |x_{03}| > r_0.$$

Применяя преобразование Фурье по переменным $(x_1, x_2)$ и $(x_{01}, x_{02})$ и обозначив $\tilde{q}(p_1, p_2, p_3)$ преобразование Фурье от $q(\xi)$, получим

$$\tilde{q} \left( \lambda_1 + \mu_1, \lambda_2 + \mu_2, \ \sqrt{k^2 - \lambda_1^2 - \lambda_2^2} + \sqrt{k^2 - \mu_1^2 - \mu_2^2} \right) = 0. \quad (5)$$

Пусть $p_1, \ p_2$ — произвольные фиксированные вещественные числа, $\mu_2 = 0$; $|\mu_1| \leqslant \varepsilon$; $\varepsilon > 0$. Тогда из (5) получим, что $\tilde{q}(p_1, p_2, p_3) = 0$ на некоторой кривой в комплексной плоскости $p_3$. Поэтому $\tilde{q} \equiv 0$ и $q(\xi) \equiv 0$. Теорема доказана.

В качестве следствия из рассуждений при доказательстве теоремы легко получить единственность линеаризованной обратной задачи для уравнения $\Delta u + k^2 u + k^2 q u = 0$, $u = u_1 + \exp(ik(\tau_1 x_1 + \dots + \tau_N x_N))$, $|\tau| = 1$ (6), где $u_1$ удовлетворяет условию излучения. При этом приходим к уравнению

$$k^2 \int_G q(\xi) \Phi(|\xi - x|) \exp(ik < \tau, \xi > d\xi) = - u_1(x, \tau). \quad (7)$$

**Теорема 2.** *Пусть решение* $u_1(x, \tau)$ *уравнения* (6) *известно при* $x \in G_1$, $|\tau| = 1$, $|\tau_1| \leqslant \varepsilon_0$, $\varepsilon_0 > 0$; $\tau_i = 0$, $1 < i < N$. *Тогда уравнение* (7) *линеаризованной обратной задачи имеет единственное решение* $q(\xi)$.

3. В том случае, когда в уравнении (2) функция $u(x, x_0)$ известна при $N = 2$ на прямом произведении множеств $|x| = R$ и $|x_0| = R_0$; $R, \ R_0 > r_0$, $R \neq R_0$, существуют явные формулы обращения для функции $q(\xi)$.

Пусть $N = 2$, $\Phi(|x|) = -(i/4) H_0^{(1)}(k|x|)$, где $H_\nu^{(1)}$ — функция Ханкеля, будем считать векторы $x$ точками комплексной плоскости с аргументом $\varphi_x$. Справедливо разложение в ряд Фурье:

$$u(x, x_0) + \frac{i}{4} H_0^{(1)}(k|x - x_0|) = \sum_{n, m = -\infty}^{\infty} \alpha_{nm} H_n^{(1)}(k|x|) \times$$
$$\times H_m^{(1)}(k|x_0|) e^{-i(n\varphi_x + m\varphi_{x_0})}, \ |x| = R, \ |x_0| = R_0. \quad (8)$$

**Теорема 3.** *Пусть для функции* $u(x, x_0)$ *в уравнении* (2) *при* $N = 2$ *известны коэффициенты* $\alpha_{nm}$, $n$, $m = 0, \pm 1, \dots$ *разложения* (8). *Тогда для преобразования Фурье от решения урав-*

*нения* (2) $\tilde{q}(\mu_1, \mu_2) = \int\limits_G q(\xi) \exp(i\mu_1\xi_1 + i\mu_2\xi_2)\, d\xi$ *справедливо представление в виде сходящегося ряда*

$$\tilde{q}(\mu_1, \mu_2) = \frac{16}{k^2} \sum_{n,\, m=-\infty}^{\infty} \alpha_{nm} [z(\mu_1, \mu_2)]^n [w(\mu_1, \mu_2)]^m, \ \mu_1 \neq \pm i\mu_2, \quad (9)$$

*в котором функции* $z(\mu)$, $w(\mu)$, $\mu_1 \neq \pm i\mu_2$ *являются корнями квадратного уравнения* $x^2 - (i\mu_1 + \mu_2)x - (\mu_1 - i\mu_2)/(\mu_1 + i\mu_2) = 0$.

Доказательство. Пользуясь формулой [6]

$$H_0^{(1)}(k|x-y|) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} I_n(k|x|) H_n^{(1)}(k|y|) e^{in(\varphi_x - \varphi_y)}, \quad |x| < |y|,$$

и представлением (8), получим из уравнения (2) при $N = 2$

$$\int\limits_G q(\xi) I_n(kr) I_m(kr) e^{i(n+m)\varphi} d\xi = 16\alpha_{nm}/k^2, \quad m, n = 0, \ \pm 1, \ \ldots, \quad (10)$$

где $r = |\xi|$, $\varphi = \varphi_\xi$. Пусть $z$ и $w$ — произвольные отличные от нуля комплексные числа. Из равенств (10) получаем, пользуясь свойствами [6] функций Бесселя;

$$\int\limits_G q(\xi) \Big[ \sum_{n,\, m=-\infty}^{\infty} z^n w^m I_n(kr) I_m(kr) e^{i(n+m)\varphi} \Big] d\xi =$$

$$= \int\limits_G q(\xi) \exp[(r/2)(ze^{i\varphi} - (ze^{i\varphi})^{-1} + we^{i\varphi} - (we^{i\varphi})^{-1})]\, d\xi.$$

Положим $z + w = u$, $zw = v$. Имеем

$$\int\limits_G q(\xi) \exp[(r/2)(ze^{i\varphi} - (ze^{i\varphi})^{-1} + we^{i\varphi} - (we^{i\varphi})^{-1})]\, d\xi =$$

$$= \int\limits_G q(\xi) \exp\left[x\left(\frac{u}{2} - \frac{u}{2v}\right) + iy\left(\frac{u}{2} + \frac{u}{2v}\right)\right] d\xi. \quad (11)$$

Обозначим $\mu_1 = u(1 - v^{-1})/2i$, $\mu_2 = u(1 + v^{-1})/2$. Тогда $z + w = u = i\mu_1 + \mu_2$, $zw = v = -(\mu_1 - i\mu_2)/(\mu_1 + i\mu_2)$. Таким образом, для любых комплексных $\mu_1 \neq \pm i\mu_2$ из равенств (11) получаем формулу (9). Теорема доказана.

4. В работе М. М. Лаврентьева [1] показано, что исследуемая в [1] обратная задача эквивалентна вопросу о единственности решения интегрального уравнения:

$$\int\limits_G q(\xi) \Phi_0(|x - \xi|) \Phi_0(|x_0 - \xi|)\, d\xi = 0, \ (x, x_0) \bar{\in} G \times G, \quad (12)$$

где $\Phi_0$ — фундаментальное решение оператора Лапласа. Вопрос о единственности решения уравнения (12) в свою очередь решался в [1] сведением к некоторой обратной задаче ньютоновского потенциала в $(2N)$-мерном пространстве. Уравнение (12) является естественным аналогом уравнений вида (3) при $k = 0$. В настоящей статье при доказательстве единственности решения уравнения (3) для $k \neq 0$ не удалось применить метод, который был использован в работе [1] для уравнения (12). Отметим, что для фундаментального решения $\Phi_0(|x|)$ нетрудно получить представление, аналогичное (4). Поэтому единственность решения уравнения (12) может быть установлена по схеме, предложенной при доказательстве теоремы 1 данной статьи.

**Список литературы:** 1. *Лаврентьев М. М.* Об одной обратной задаче для волнового уравнения.— Докл. АН СССР, 1964, **157**, № 3, с. 520—521. 2. *Лаврентьев М. М., Романов В. Г., Шишатский С. П.* Некорректные задачи математической физики и анализа.— М.: Наука, 1980.— 286 с. 3. *Mueller R., Kaveh M., Wade G.* Reconstructive tomography and application.— Proc. IEEE, 1979, **67**, № 4, р. 146—169. 4. *Бреховских Л. М.* Волны в слоистых средах.— М.: Изд-во АН СССР, 1957.— 431 с. 5. *Владимиров В. С.* Уравнения математической физики.— М.: Наука, 1976.— 527 с. 6. *Бейтмен Г., Эрдейн А.* Высшие трансцендентные функции.— М.: Наука, 1974.— 295 с.

*Поступила в редколлегию 13.11.82.*