УДК 517.535.2

*С. Д. БРОНЗА, В. Г. ТАИРОВА*

# КОНСТРУИРОВАНИЕ РИМАНОВЫХ ПОВЕРХНОСТЕЙ КЛАССА $F_g^*$. 2

**3. Классы римановых поверхностей заданной разветвленности. Теорема единственности в классе Драпе.** Следуя обозначениям, принятым в [1, с. 469], обозначим через $F_\rho(t) = F_\rho(t;\ a_1,\ \lambda_1^1,\ \dots,\ \lambda_1^{m_1};\dots,a_q,\lambda_q^1,\ \dots,\ \lambda_q^{m_q})$ класс замкнутых $t$-листных римановых поверхностей рода $\rho$ с базисными точками $a_1,\ a_2,\ \dots,\ a_q$, причем в базисную точку $a_i,\ i=1,\ \dots,\ q$, проектируется $m_i$ точек ветвления, имеющих порядки $\lambda_i^1,\ \lambda_i^2,\ \dots,\ \lambda_i^{m_i},\ \sum_{j=1}^{m_1}\lambda_i^j \leqslant t - m_i$, а род $\rho$ определяется из соотношения Римана — Гурвица $\sum_{i=1}^{q}\sum_{j=1}^{m_j}\lambda_i^j = 2(t-1)+2\rho$. Этот класс назовем классом римановых поверхностей заданной разветвленности. Выделим класс римановых поверхностей, обладающих свойством: в каждую базисную точку проектируется одна точка ветвления, т. е. класс $F_\rho(t;\ a_1,\ \lambda_1^1;\ a_2,\ \lambda_2^1;\ \dots;\ a_q\lambda_q^1)$, и назовем его классом Драпе, кратко обозначая символом $D_\rho(t)$. Для обозначения класса Драпе, римановы поверхности которого имеют точки ветвления только первого порядка, будем употреблять символ $D_\rho(t,\ 1)$.

В работе [2] доказана теорема Драпе, утверждающая, что класс $D_0(t)$ обладает свойством единственности, т. е. содержит одну риманову поверхность. Драпе [3] дала ошибочное доказательство этого утверждения. В общем случае класс римановых поверхностей заданной разветвленности $F_0(t)$ свойством единственности не обладает. Он может содержать не одну риманову поверхность [2] или оказаться пустым [5, с. 468].

В классе Драпе $D_\rho(t)$ при $\rho > 0$ свойство единственности уже не имеет места*, однако оно сохраняется в $D_\rho(t,\ 1)$, т. е. имеет место следующая теорема типа Драпе.

---

* На рис. 1 изображены профили П′ и П″ римановых поверхностей из класса $F_4$ $(3;\ a_1 2;\ a_2 2;\ a_3 2;\ a_4 2;\ a_5 2;\ a_6 2)$. Нетрудно видеть, что любая суперпозиция обменов сохранит равенство подстановок всех атомарных псевдопрофи-

**Теорема Д.** *Класс* $D_\rho(t, 1) = F_\rho(t;\ a_1,\ 1;\ \ldots,\ a_q;\ 1)$ *состоит из одной римановой поверхности.*

Введем следующие обозначения. Через $\boldsymbol{F}_\rho(t) = \boldsymbol{F}_\rho(t;\ a_1\lambda_1^1,\ \ldots,\ \lambda_1^{m_1};\ \ldots;\ a_q,\ \lambda_q^1,\ \ldots,\ \lambda_q^{m_q})$ обозначим совокупность профилей римановых поверхностей из класса римановых поверхностей заданной разветвленности $F_\rho(t) = F_\rho(t;\ a_1,\ \lambda_1^1,\ \ldots,\ \lambda_1^{m_1},\ \ldots;\ a_q,\ \lambda_q^1,\ \ldots,\ \lambda_q^{m_q})$. Эту совокупность профилей будем называть классом профилей заданной разветвленности. Совокупность профилей римановых поверхностей из класса Драпе $D_\rho(t)\ (D_\rho(t, 1))$ будем обозначать через $\boldsymbol{D}_\rho(t)\ (\boldsymbol{D}_\rho(t, 1))$, называя ее классом профилей Драпе. Очевидно, сформулированная выше теорема Д равносильна утверждению: класс профилей $D_\rho(t, 1)$ состоит из одного класса эквивалентности профилей.

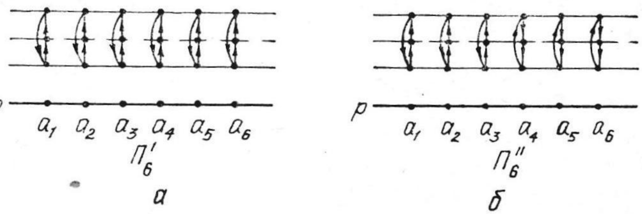


Рис. 1

При доказательстве теоремы Д нами неоднократно будет использоваться

***Лемма.*** *Любой профиль* $\prod = \operatorname{clos} \sum_{i=1}^{q} G_1^{i}$** *из класса* $D_\rho(t, 1)$ *преобразованиями из группы* $\langle\tau\rangle$ *может быть преобразован в профиль* $'\prod = \operatorname{clos} \sum_{i=1}^{q}{}' G_1^i$, *такой, что* $S('G_1^1) = S('G_1^2) = S(G_1^1)$.

Действительно, пусть $S(G_1^i) = (i,\ l),\ 1 \leqslant i < l \leqslant t$. Очевидно, найдется $k,\ 1 \leqslant k \leqslant q$, такое, что псевдопрофиль $G_1^k$ обладает свойством: в $i$-й путь профиля $\prod$ входит слабая дуга (не петля) $G_1^k$, в то время как в $i$-й путь входят лишь петли псевдопрофилей $G_i^P$ при $P > k$. (При $k = q$, очевидно, псевдопрофили $G_1^l$ вовсе не появятся).

Рассмотрим преобразование

$$r_i = \prod_{j=1}^{k-2} \tau_{k-j}^{\sigma},$$

лей профиля П′, в то время как профиль П″ содержит атомарные псевдопрофили с различными подстановками. Это свидетельствует о том, что профили П′ и П″ изображают различные римановы поверхности из класса $F_4(3;\ a_1 2;\ a_2 2;\ a_3 2;\ a_3 2;\ a_4 2;\ a_5 2;\ a_6 2)$.

** Наряду с символом $\overline{G}$ употребляем символ clos $G$.

где $\tau^{\sigma}_{k-j}=\tau^{-1}_{k-j}$, если в $i$-й путь профиля $\prod$ входит слабая дуга (не петля) псевдопрофиля $G_1^{k-j}$ и $\tau^{\sigma}_{k-j}=\tau_{k-j}$, если в $i$-й путь профиля $\prod$ входит петля псевдопрофиля $G_1^{k-n}$*. Нетрудно видеть, что последовательное применение преобразований группы $\langle\tau\rangle$, входящих в $r_i$, удерживает одну из вершин слабого контура псевдопрофиля $G_1^k$ на $i$-м сильном контуре, а вторую — на $i$-м пути профиля $\prod$. В результате чего слабый контур псевдопрофиля $G_1^k$ профиля $\prod$ преобразуется в слабый контур псевдопрофиля $'G_1^2$ профиля $'\prod=r_i\prod$, одна из вершин которого принадлежит $i$-му сильному контуру, а вторая — $i$-му пути профиля $'\prod$, при этом слабый контур псевдопрофиля $G_1^1$ преобразованием $r_i$ не затрагивается. Таким образом, получаем $'G_1=G_1^1, S('G_1^2)=S(G_1)$, что и утверждает лемма. Рис. 2 иллюстрирует преобразование $r_2$.

*Замечание.* Не уменьшая общности, можно считать, что $S(G_1^1)=(1,\ l)$, где $l$ — некоторое число, $1<l\leqslant t$. Действительно, в силу связности профиля, найдется атомарный псевдопрофиль $G_1^k$ профиля $\prod$ такой, что $S(G_1^k)=(1,\ l')$, $1<l'\leqslant t$, но тогда профиль $\left(\prod\limits_{j=1}^{k-1}\tau_{k-j}\right)\prod$ уже такой, что подстановка его первого атомарного псевдопрофиля есть транспозиция, содержащая единицу.

Доказательство теоремы Д.

1. Покажем, что любой профиль $\prod_q=\operatorname{clos}\sum\limits_{i=1}^{q}G_1^i$ из класса $\boldsymbol{D}_\rho(t,\ 1)$ преобразованиями из группы $\langle\tau\rangle$ может быть приведен к профилю $^1\prod_q=\operatorname{clos}\sum\limits_{i=1}^{q}{}^1G_1^i$ из того же класса, атомарные псевдопрофили которого удовлетворяют условиям:

1°. $S(^1G_1^{2m-1})=S(^1G_1^{2m})$, $m=1,\ \ldots,\ q/2$**).

2°. Подстановки всех атомарных псевдопрофилей профиля $^1\prod_q$ являются транспозициями, содержащими единицу.

Применим к профилю $\prod_q$ лемму. В результате получим профиль, первые два атомарные псевдопрофили которого удовлетворяют условиям 1° и 2°. Будем считать, что исходный профиль именно такой и $S(G_1^1)=S(G_1^2)=(1,\ l_1)$.

Рассмотрим псевдопрофиль $G_{q-2}=\sum\limits_{i=3}^{q}G_1^i$. Легко видеть, что псевдопрофиль $G_{q-2}$ имеет тождественную подстановку. Действи-

---

* В дальнейшем преобразование $r_i$ будем называть движением слабого контура псевдопрофиля $G_1^k$ по $i$-му пути профиля П, или просто — движением $r_i$.

** Из условия $\Pi_q\in\boldsymbol{D}_\rho(t,\ 1)$ согласно формуле Римана — Гурвица получаем, что $q$ — четное.

тельно, $S(G_{q-2}) = S\left(\sum_{i=3}^{q} G_1^i\right) = \prod_{i=3}^{q} S(G_1^i) = S(G_1^1)\, S^{-1}(G_1^1)$; $\prod_{i=3}^{q} S(G_1^i) =$ $= S(G_1^1)\, S(G_1^2) \prod S(G_1^i) = E$, где $E$ — тождественная подстановка.

Псевдопрофиль $G_{q-2}$ может оказаться и не связным, но тогда будет иметь две компоненты связности, одна из которых сильный

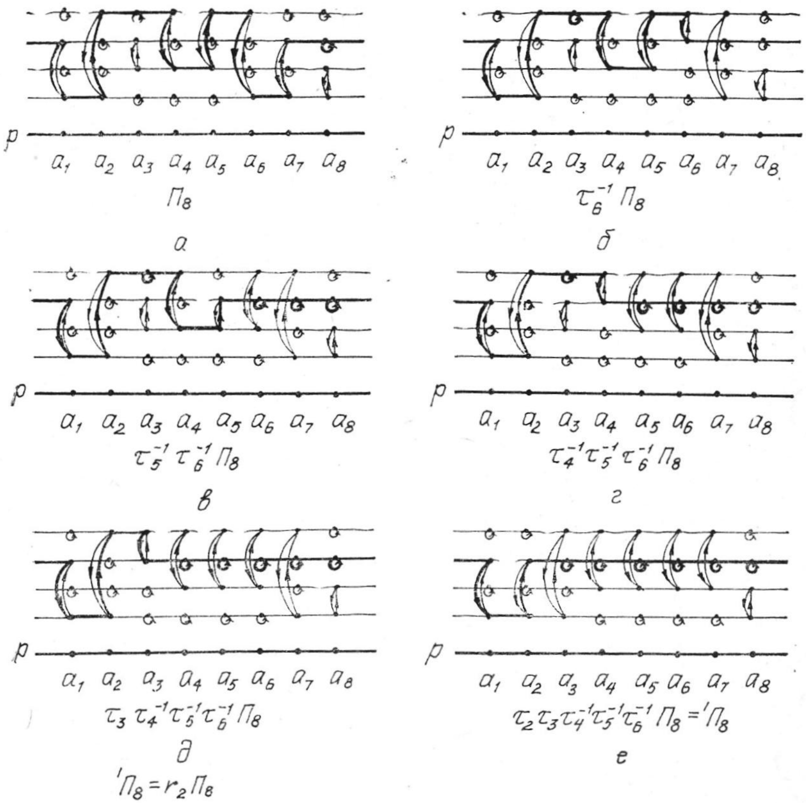


Рис. 2

контур — первый или $l_1$-й. Последнее утверждение следует из свойства связности профиля $\prod_q$ и принадлежности его классу $D_\rho(t, 1)$ — в профиле $\prod_q$ сильные контуры связаны слабыми дугами попарно. Поэтому псевдопрофиль $G_{q-2}$ может перестать быть связным только за счет выделения сильных контуров первого или $l_1$-го в качестве одной из компонент связности псевдопрофиля $G_{q-2}$.

В случае, когда псевдопрофиль $G_{q-2}$ связен, его замыкание $\overline{G}_{q-2}$ будет профилем, ибо $S(G_{q-2}) = E$. Тогда, повторяя предыдущие рассуждения, получим профиль, у которого первые четыре атомарные псевдопрофили удовлетворяют условиям 1° и 2°.

Рассмотрим теперь случай, когда псевдопрофиль $G_{q-2}$ не связен:

а) пусть одна из компонент связности псевдопрофиля $G_{q-2}$ — $l_1$-й сильный контур. Вторая компонента связности — псевдопрофиль толщины $t-1$, замыкание которого будет уже профилем. Поскольку первый сильный контур этого профиля — часть 1-го сильного контура профиля $\prod_q$, то, применяя к полученному профилю лемму (а тем самым преобразования, используемые в лемме, применяются и к исходному профилю $\prod_q$ не задевая первых двух атомарных псевдопрофилей), получим профиль, у которого первые четыре атомарных псевдопрофиля удовлетворяют условиям 1° и 2°;

б) пусть одна из компонент связности псевдопрофиля $G_{q-2}$ — 1-ый сильный контур. Тогда замыкание второй компоненты связности (профиль толщины $t-1$) содержит атомарный псевдопрофиль с подстановкой $(l_1, l_2)$, $1 < l_1 < l_2 \leqslant t$. Воспользовавшись леммой*, получаем профиль, у которого первых два атомарных псевдопрофиля удовлетворяют условиям 1° и 2°, а два следующих имеют подстановку $(l_1, l_2)$.

Рассмотрим преобразование $\tau_2^{-1}(\tau_3^{-1})^2\tau_2^{-1}$. В силу того что первых два атомарных псевдопрофиля и вторых два имеют вершины, принадлежащие одному и тому же сильному контуру, указанная комбинация обменов приводит к профилю, первых четыре атомарных псевдопрофиля которого удовлетворяют условиям 1° и 2°.

Описанный процесс продолжаем до исчерпания всех атомарных псевдопрофилей профиля $\prod_q$. Однако следует сделать одно замечание. Может оказаться, что при выделении псевдопрофиля $G_{q-2m}$ слабые дуги $2m-1$-го и $2m$-го атомарных псевдопрофилей и слабые дуги последующих атомарных псевдопрофилей инцидентны вершинам, принадлежащим различным сильным контурам, (см. рис. 3, *г*) в силу чего описанный процесс непосредственно провести нельзя. Однако среди построенных атомарных псевдопрофилей, удовлетворяющих условиям 1° и 2°, найдется, по крайней мере, одна пара атомарных псевдопрофилей, слабые дуги которых инцидентны вершинам, принадлежащим тому же сильному контуру, что и дуги одного из атомарных псевдопрофилей псевдопрофиля $G_{q-2m}$. Не уменьшая общности, можно считать, что этим атомарным псевдопрофилем является псевдопрофиль $G_1^{2m+1}$.

Укажем преобразование, меняющее местами пары атомарных псевдопрофилей, удовлетворяющих условиям 1° и 2°, и не меняющее подстановки этих атомарных псевдопрофилей.

---

* В этом случае применяем движение $r_{l_1}$ лишь до второго атомарного псевдопрофиля $G_1^2$.

Пусть атомарные псевдопрофили $G_1^{2k-1}$, $G_1^{2k}$, $G_1^{2k+1}$ и $G_1^{2k+2}$ профиля $\prod$ удовлетворяют условиям 1° и 2°. Нетрудно убедиться, что искомым преобразованием будет, например, следующее произведение преобразований группы $\langle\tau\rangle$ — $\tau_{2k}\tau_{2k-1}\tau_{2k+1}\tau_{2k}$.

Таким образом, совершив необходимые перестановки пар атомарных псевдопрофилей, удовлетворяющих условиям 1° и 2°, при-

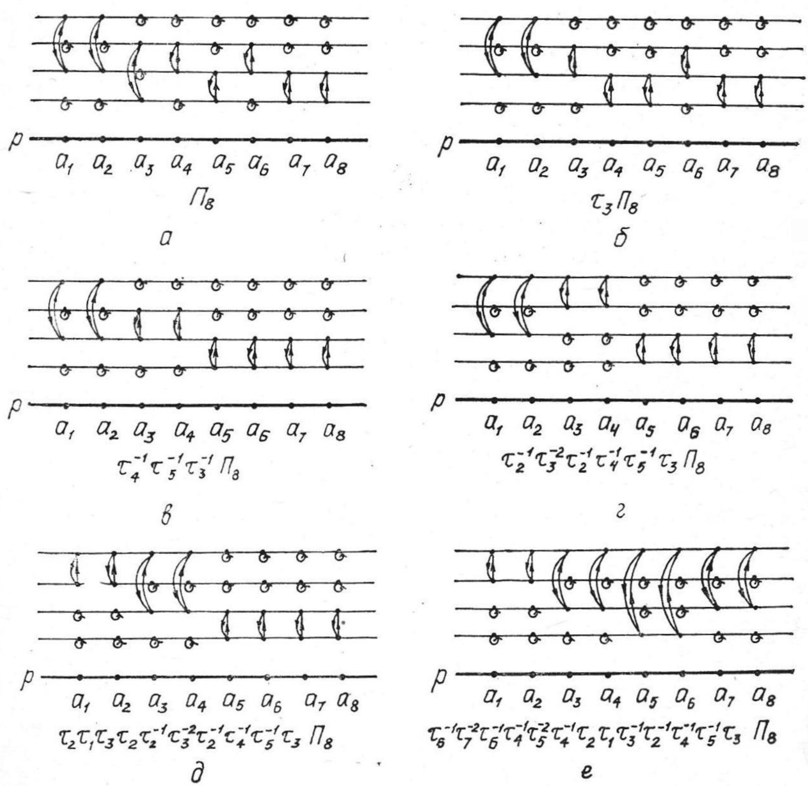


Рис. 3

ходим к псевдопрофилю, к которому применима лемма. Итак, получен псевдопрофиль ${}^1\prod_q$, атомарные псевдопрофили которого удовлетворяют условиям 1° и 2°.

На рис. 3 приведен пример преобразования профиля к виду ${}^1\prod_q$. Не уменьшая общности, можно считать, что в профиле ${}^1\prod_q$ атомарные псевдопрофили располагаются в таком порядке, что вторые индексы транспозиций, являющихся подстановками атомарных псевдопрофилей, образуют неубывающую последовательность, как на рис. 4, *а*.

2. Зафиксируем профиль ${}^N\prod_q = \operatorname{clos}\sum_{i=1}^{q} {}^N G_1^i$, принадлежащий классу $D_\rho(t, 1)$, атомарные псевдопрофили которого удовлетворяют условиям $S({}^N G_1^i) = S({}^N G_1^{q-i}) = (i, i+1)$, $i = 1, 2, \dots, t-2$; $S({}^N G_1^i) = (t-1, t)$, $i = t-1, t, \dots, t+2\rho$.

Профиль ${}^N\prod_q$ будем называть нормальной формой профилей класса $D_\rho(t, 1)$. Пример нормальной формы см. на рис. 4, *г*.

Покажем, что любой профиль $\prod_q \in D_\rho(t, 1)$ преобразованиями из группы $\langle\tau\rangle$ может быть приведен к нормальной форме ${}^N\prod_q$.

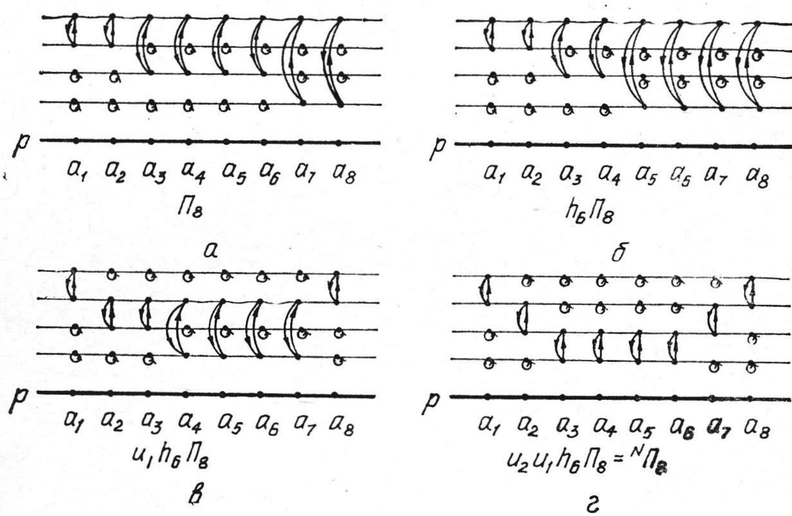


Рис. 4

Очевидно, нам достаточно показать, что этими преобразованиями к нормальной форме сводится профиль, слабые контуры которого уже удовлетворяют условиям 1° и 2°.

Рассмотрим преобразование $h_{2k} = \tau_{2k-2}\overset{-1}{\tau}_{2k-1}\tau_{2k-2}\overset{-1}{\tau}_{2k}\tau_{2k-1}\overset{-1}{\tau}_{2k}$. Если профиль $\prod_q$ таков, что его атомарные псевдопрофили ${}^1G_1^{2k-3}$, ${}^1G_1^{2k-2}$, ${}^1G_1^{2k-1}$, ${}^1G_1^{2k}$, ${}^1G_1^{2k+1}$, ${}^1G_1^{2k+2}$ имеют подстановки $S({}^1G_1^{2k-3}) =$

$$= S({}^1G_1^{2k-2}) = S({}^1G_1^{2k-1}) = S({}^1G_1^{2k}) = (1, l). \quad S({}^1G_1^{2k+1}) =$$
$$= S({}^1G_1^{2k+2}) = (1, l+1),$$

то у профиля $h_{2R}\,{}^1\prod_q$ подстановки атомарных псевдопрофилей, соответствующих его базисным точкам $a_{2k-3}$, $a_{2k-2}$, — транспозиции $(1, l)$, а подстановки атомарных псевдопрофилей, соответствующих базисным точкам $a_{2k-1}$, $a_{2k}$, $a_{2k+1}$, $a_{2k+2}$, — транспозиции $(1, l+1)$. (На рис. 4 приведен пример преобразования $h_6$). Применяя к профилю ${}^1\prod_q$ необходимые преобразования вида $h_{2k}$, приходим к профилю ${}^{2}\prod_{q}=\sum_{i=1}^{q}{}^{2}G_{1}^{i}$, у которого подстановки первых $t-1$-ой пары атомарных псевдопрофилей имеют вид $S({}^{2}G_{2k-1})=S({}^{2}G_{2k})=(1,\ k+1),\ k=1,\ 2,\ \ldots,\ t-1$, а остальные $2_{\rho}$ атомарных псевдопрофиля профиля ${}^{2}\prod_{q}$ в качестве подстановок имеют транспозиции $(1,\ t)$*.

Рассмотрим преобразование $u_{1}=\prod_{i=2}^{q-1}\tau_{i}$. В результате такого преобразования получим профиль $u_{1}\,{}^{2}\prod_{q}$, первый и последний псевдопрофили которого имеют подстановку (1, 2), и все остальные псевдопрофили в качестве первого символа транспозиции будут иметь цифру 2.

Преобразование $u_{2}=\prod_{i=3}^{q-2}\tau_{i}$, примененное к профилю $u_{1}\,{}^{2}\prod_{q}$, приведет нас к профилю $u_{2}u_{1}\,{}^{2}\prod_{q}$, у которого первых два и последних два атомарных псевдопрофиля такие, как и у ${}^{N}\prod_{q}$, а все остальные в качестве первого символа транспозиции имеют цифру 3.

Очевидно, что профиль $\left(\prod_{j=1}^{t-2}u_{j}\right){}^{2}\prod_{q}$, где $u_{j}=\prod_{i=1+j}^{q-j}\tau_{i}$, и есть искомая нормальная форма ${}^{N}\prod_{q}$ профилей класса $\boldsymbol{D}_{\rho}(t,\ 1)$.

Теорема Д доказана.

*Замечания.* Из доказанной теоремы следует, что группа автоморфизмов $\operatorname{Aut}\boldsymbol{D}_{\rho}(t,\ 1)$ совпадает с группой $\langle\tau\rangle$, т. е. любых два профиля $\prod',\ \prod''\in\boldsymbol{D}_{\rho}(t,\ 1)$ могут быть приведены друг к другу некоторой суперпозицией обменов.

2. В § 2 мы доказали, что группа автоморфизмов $\operatorname{Aut}F_{R}$ есть произведение двух групп — $\langle\tau\rangle$ и $A_{S}$.

Когда $F_{R}\in D_{\rho}(t,\ 1)$ — группа $A_{S}\in\langle\tau\rangle$, что в общем случае не так (см. пример 2.1).

**4. Алгоритм построения класса профилей заданной разветвленности.** Отмечалось, что профили класса профилей заданной разветвленности $\boldsymbol{F}_{\rho}(t)=\boldsymbol{F}_{\rho}(t;\ a_{1},\ \lambda_{1}^{1},\ \ldots\ ,\lambda_{1}^{m_{1}};\ a_{q},\ \lambda_{q}^{1},\ \ldots,\ \lambda_{q}^{m_{q}})$ могут изображать различные римановы поверхности класса $F_{q}^{*}$. Напомним, что профили класса $\boldsymbol{F}_{\rho}(t;\ a_{1},\ \lambda_{2}^{1},\ \ldots,\ \lambda_{1}^{m_{1}};\ \ldots;\ a_{q},\ \lambda_{q}^{1},\ \ldots,\lambda_{q}^{m_{q}})$, изображающие одну и ту же риманову поверхность $R,\ R\in F_{q}^{*}$, называем эквивалентными, а все множество профилей, описывающих эту риманову поверхность,— классом эквивалентности профилей римановой поверхности $R$, обозначая его через $\boldsymbol{F}_{R}$.

В настоящем параграфе строим алгоритм, позволяющий класс профилей заданной разветвленности $\boldsymbol{F}_{\rho}(t;\ a_{1},\ \lambda_{1}^{1},\ \ldots,\ \lambda_{1}^{m_{1}};\ \ldots;$

---

* Отметим, что в случае, когда $\Pi_{q}\in\boldsymbol{D}_{\rho}(t)$, профиль ${}^{2}\Pi_{q}$ содержит только первые $2t-2$ атомарные псевдопрофили.

$a_q, \lambda_q^1, \ldots, \lambda_q^{m_q})$ представить как объединение классов эквивалентности профилей. Тем самым не только описываем все многообразие профилей заданной разветвленности, но и все различные римановы поверхности класса $F_q^*$, имеющие заданную разветвленность.

Предваритемьно выясним, что собой представляет автоморфизмы группы $\operatorname{Aut} \boldsymbol{F}_\rho(t)$.

Пусть $\Pi_q = \operatorname{clos} \sum\limits_{l=1}^{q} G_1^i$, $\Pi_q \in F_q(t;\ q_1,\ \lambda_1^1,\ \ldots,\ \lambda_1^{m_1};\ \ldots;\ a_q,\ \lambda_q^1,\ \ldots,\ \lambda_q^{m_q})$. Согласно теореме § 1 профиль можно единственным образом представить в виде суммы произведений $h$-транспозиционных псевдопрофилей, т. е.

$\Pi_q = \operatorname{clos} \sum\limits_{i=1}^{q} \prod\limits_{k=1}^{\Lambda_\tau} G_1^i(k)$, где $\Lambda_i = \sum\limits_{j=1}^{m_i} \lambda_i^j$, а $G_1^i(k)$, $k = 1, \ldots, \Lambda_i$, $h$-транспозиционные псевдопрофили, определенные соответственно соглашениям, принятым в § 1 и обеспечивающие однозначное представление атомарного псевдопрофиля $G_1^i$ в виде произведения транспозиционных псевдопрофилей. Отсюда следует, что профилю $\Pi_q$ можно поставить в однозначное соответствие профиль $\operatorname{clos} \sum\limits_{i=1}^{q} \sum\limits_{k=1}^{\Lambda_i} G_1^i(k)$, принадлежащий, очевидно, классу $D_\rho(t,\ 1)$. Это соответствие определяет биективное отображение класса профилей заданной разветвленности $\boldsymbol{F}_\rho(t)$ в класс $D_\rho(t,\ 1)$. Обозначим это отображение через $d$, профиль $\operatorname{clos} \sum\limits_{i=1}^{q} \sum\limits_{k=1}^{\Lambda_i} G_1^i(k)$ — через $d\Pi$, а образ множества профилей из класса $\boldsymbol{F}_\rho(t)$ при отображении $d$ — через $\{D_\rho(t,\ 1)\}_F$.

Введем отображение $\varphi_F$ и установим его связь с вышеопределенным отображением $d$.

Пусть профиль $\Pi \in D_\rho(t,\ 1)$ и $\Pi = \operatorname{clos} \sum\limits_{i=1}^{2t-2+2\rho} G_1^i$, а $\boldsymbol{F}_\rho(t) = \boldsymbol{F}_\rho(t;\ a_1\ \lambda_1^1,\ \ldots,\ \lambda_1^{m_1};\ \ldots;\ a_q,\ \lambda_q^1,\ \ldots,\ \lambda_q^{m_q})$ — класс профилей заданной разветвленности. Обозначим через $\psi_F$ отображение, ставящее в соответствие профилю $\Pi$ замыкание псевдопрофиля

$$G_q = \varphi\Big(\sum_{i=1}^{\Lambda_1} G_1^i\Big) + \varphi\Big(\sum_{i=\Lambda_1+1}^{\Lambda_1+\Lambda_2} G_1^i\Big) + \cdots + \varphi\Big(\sum_{i=\Lambda_1+\cdots+\Lambda_{q-1}}^{\Lambda_1+\cdots+\Lambda_q} G_1^i\Big),$$

где $\Lambda_i = \sum\limits_{j=1}^{m_i} \lambda_i^j$; $\{\overline{G}_q\}_F$ — множество замыканий образов профилей из класса $D_\rho(t)$ при отображении $\varphi_F$, а отображение $\varphi$ определено в § 1.

Из определения операций $d$ и $\varphi_F$ следует, что операция $d^{-1}$ есть не что иное, как сужение отображения $\varphi_F$ на множество $\{D_\rho(t, 1)\}_F$.

Если профили $\Pi', \Pi'' \in \boldsymbol{F}_\rho(t)$, то, согласно определению операции $d$, профили $d\Pi', d\Pi'' \in \{D_\rho(t, 1)\}_F$ и в силу теоремы Д имеем $d\Pi' = f(\tau)\, d\Pi''$, где $f(\tau)$ — некоторая комбинация преобразований группы $\langle\tau\rangle$. Отсюда $\Pi' = d^{-1}f(\tau)\, d\Pi''$, т. е. любой автоморфизм группы $\operatorname{Aut}\boldsymbol{F}_\rho(t)$ есть не что иное, как отображение вида $d^{-1}f(\tau)\, d$.

Имеет место следующая

**Теорема.** *Класс профилей $\boldsymbol{F}_\rho(t)$ заданной разветвленности содержится во множестве замкнутых псевдопрофилей $\{\bar{G}_q\}_F$.*

Доказательство. В случае, когда класс $\boldsymbol{F}_\rho(t)$ пуст, утверждение теоремы тривиально. Пусть класс $\boldsymbol{F}_\rho(t)$ непуст. Зафиксируем профиль $\Pi_q = \operatorname{clos}\sum_{i=1}^{q} G_1^i$ из класса $\boldsymbol{F}_\rho(t)$. Атомарные псевдопрофили $G_1^i$, $i = 1, \ldots, q$, представим в виде произведения $\Lambda_i$, $\Lambda_i = \sum_{j=1}^{m_i} \lambda_i^j$, транспозиционных псевдопрофилей $G_1^i(k)$, $k = 1, \ldots, \Lambda_i$. Рассмотрим псевдопрофиль $\operatorname{clos}\sum_{i=1}^{q}\sum_{k=1}^{\Lambda_i} G_1^i(k)$. Нетрудно видеть, что замыкание этого псевдопрофиля есть профиль из класса $D_\rho(t, 1)$ и, следовательно,

$$\varphi_F\Big(\sum_{i=}^{q}\sum_{k=1}^{\Lambda_i} G_1^i(k)\Big) \in \{\bar{G}_q\}_F,$$

заметив, что, с другой стороны, $\varphi_F\Big(\sum_{i=1}^{q}\sum_{k=1}^{\Lambda_i} G_1^i(k)\Big) = \Pi_q$, получаем утверждение теоремы $\boldsymbol{F}_\rho(t) \subset \{\bar{G}_q\}_F$.

Доказанная теорема позволяет построить алгоритм, решающий задачу об описании всего многообразия профилей заданной разветвленности, т. е. многообразий профилей класса $\boldsymbol{F}_\rho(t;\, a_1,\, \lambda_1^1; \ldots, \lambda_1^{m_1}; \ldots; a_q,\, \lambda_q^1, \ldots, \lambda_q^{m_q})$.

Алгоритм I описания многообразия профилей класса $\boldsymbol{F}_\rho(t;\, a_1, \lambda_1^1, \ldots, \lambda_1^{m}; \ldots; a_q, \lambda_q^1, \ldots, \lambda_q^{m_q})$.

1°. Строим профиль ${}^N\Pi$ — нормальную форму профилей класса $\boldsymbol{D}_\rho(t, 1)$. Построим весь класс $\boldsymbol{D}_\rho(t, 1)$, который согласно теореме Д есть множество $\{\tau\, {}^N\Pi\}_{\tau\in\langle\tau\rangle}$.

2°. Построим множество замкнутых псевдопрофилей

$$\{\varphi_F(\tau\, {}^N\Pi)\}_{\tau\in\langle\tau\rangle} = \{\bar{G}_q\}_F.$$

Согласно доказанной выше теореме имеем $\boldsymbol{F}_\rho(t) \subset \{\varphi_F(\tau\, {}^N\Pi)\}$.

Каждый замкнутый псевдопрофиль множества $\{\overline{G}_q\}_F$ непосредственно проверим на принадлежность классу $F_\rho(t)$, чем и определим весь класс $F_\rho(t)$.

Алгоритм II разбиения класса профилей заданной разветвленности $F_\rho(t;\ a_1,\ \lambda_1^1,\ \ldots,\ \lambda_1^{m_1};\ \ldots;\ a_q,\ \lambda_p^1,\ \ldots,\ \lambda_q^{m_q})$ на классы эквивалентности.

1°. Используя алгоритм I, строим все профили класса $F_\rho(t;\ a_1,\ \lambda_1^1;\ \ldots;\ \lambda_1^{m_1};\ \ldots;\ a_q,\ \lambda_q^1,\ \ldots,\ \lambda_q^{m_q})$.

2°. Рассмотрим профиль

$$\Pi_q \in F_\rho(t;\ a_1,\ \lambda_1^1,\ \ldots,\ \lambda_1^{m_1};\ \ldots;\ a_q,\ \lambda_q^1,\ \ldots,\ \lambda_q^{m_q}).$$

Построим множество $\theta_\Pi = \{f(\tau)\rho\Pi\colon f(\tau) \in \langle\tau\rangle,\ \rho \in A_s\}$, являющееся, очевидно, классом эквивалентности профилей римановой поверхности $R \in F_q^*$, один из профилей которой есть профиль $\Pi$.

3°. Рассмотрим профиль $\Pi' \in F_\rho(t) \setminus \Theta_\Pi$. Так же, как и в пункте 2°, строим множество $\Theta_{\Pi'}$.

4°. Описанный в п. 2°, 3° процесс продолжаем до исчерпания профилей класса $F_\rho(t)$.

**Список литературы:** 1. *Гольберг А. А., Островский И. В.* Распределение значений мероморфных функций.— М.: Наука, 1970.— 592 с.
2. *Таирова В. Г.* О комплексах отрезков некоторого класса замкнутых римановых поверхностей.— Сиб. мат. журн., 1964, **5**, № 4, с. 929—951.
3. *Drape E.* Über die Darstellung Riemannscher Flächen durch Streckencomplexe.— Deutsche Math., 1936, № 1, S. 805—824. 4. *Habsch H.* Die Theorie der Grundkurven und das Äqvivalenzproblem bei der Darstellung Riemannscher Flächen.— Mitt Math. Semin Giessen, 1952, № 2, S. 1—51.
5. *Бронза С. Д., Таирова В. Г.* Профили римановых поверхностей.— Теория функций, функцион. анализ и их прил., 1980, вып. 33, с. 12—18.

*Поступила в редколлегию 06.09.82.*