УДК 519.21.5

Н. М. БЛАНК

О РАСПРЕДЕЛЕНИЯХ, СВЕРТКИ КОТОРЫХ СОВПАДАЮТ НА ПОЛУОСИ

1. Формулировки результатов (ф. р.). Обозначим через Θ_n, $n=2, 3, \ldots$, множество всех функций распределения (ф. р.) $G(x)$, представимых в виде $G=F^{*n}$ ($*n$ — обозначает n-кратную свертку), где ф. р. F удовлетворяет следующим условиям: для любого $r>0$ $\inf\{x: F(x)\neq 0\}=-\infty$; $F(-x)=O(e^{-rx})$, $x\to +\infty$ **(1)**.

Заметим, что класс $\Theta_\infty=\bigcap\limits_{n=2}^{\infty}\Theta_n$ совпадает с классом всех безгранично делимых распределений, удовлетворяющих условиям (1).

Через $\varphi(t; F)$ будем обозначать характеристическую функцию (х. ф), отвечающую ф. р. F. Из условия (1) следует, что х. ф. $\varphi(t; F)$ аналитически продолжается в полуплоскости $\operatorname{Im} t>0$.

В работе [1] было доказано, что функции класса Θ_∞ однозначно определяются значениями на полуоси; другими словами, если $G_1, G_2\in\Theta_\infty$, то из равенства $G_1(x)=G_2(x)$, $x\leqslant a$ **(2)**, где a — некоторое действительное число, следует, что $G_1(x)\equiv G_2(x)$ **(3)**.

В работе [2] был рассмотрен вопрос об однозначной определенности значениями на полуоси функций классов Θ_n, и в этом направлении получен следующий результат.

Теорема А [2]. *Пусть G_1 — либо нормальная ф. р., либо $G\in\Theta_n$ и $x^2=0(\ln(1/G_1(-x)))$, $x\to+\infty$* **(4)**. *Тогда функция G_1 однозначно определяется в классе Θ_n значениями на полуоси, т. е. из того, что $G_2\in\Theta_n$ и выполнено* (2), *следует* (3).

В настоящей статье будет показано, что при $n\geqslant 3$ утверждение этой теоремы останется в силе без ограничения (4). В случае $n=2$ некоторое ограничение, более слабое, чем (4), оказывается существенным.

Теорема 1. *При $n\geqslant 3$ функции класса Θ_n однозначно определяются своими значениями на полуоси.*

Теорема 2. *Пусть $G_1\in\Theta_2$ и пусть $x\ln x=o(\ln(1/G_1(-x)))$, $x\to+\infty$* **(5)**. *Тогда функция G_1 однозначно определяется в Θ_2*

своими значениями на полуоси. Это утверждение перестает быть верным, если в правой части (5) *заменить* o *на* O.

Последнее утверждение теоремы 2 сообщено А. М. Улановским и публикуется здесь с его согласия.

2. Доказательство теоремы 1. Напомним некоторые стандартные обозначения теории мероморфных функций (см. [3]). Пусть функция $f(z)$ мероморфна в круге $|z|<1$; $N(r, f)=\int\limits_0^r \frac{n(t, f)}{t}\,dt$, $r<1$, где $n(r, f)$ — число полюсов (с учетом кратности) функции $f(z)$ в круге $|z|\leqslant r$; $\bar{N}(r, f)=\int\limits_0^r \frac{\bar{n}(t, f)}{t}\,dt$, $r<1$, где $\bar{n}(r, f)$ — число полюсов (без учета кратности) функции $f(z)$ в круге $|z|\leqslant r$;

$$m(r, f)=\frac{1}{2\pi}\int\limits_0^{2\pi}\ln^+|f(re^{i\varphi})|\,d\varphi;\ T(r, f)=m(r, f)+N(r, f).$$

Справедливы соотношения $m\left(r, \frac{1}{f-a}\right)+N\left(r, \frac{1}{f-a}\right)=T(r, f)+O(1)$ **(6)**; $T(r, f_1f_2)\leqslant T(r, f_1)+T(r, f_2)$ **(7).**

Пусть $G_1\in\Theta_n$, $G_2\in\Theta_n$, $n\geqslant 3$, и выполнено (2). Будем дополнительно предполагать, что

$$\varlimsup_{y\to+\infty}\frac{\ln\varphi(iy;\ G_1)}{y\ln y}=+\infty, \tag{8}$$

так как, если (8) не выполняется, утверждение теоремы 1 содержится в теореме A. В силу определения класса Θ_n, $G_1=F_1^{*n}$, $G_2=F_2^{*n}$, где F_1, F_2 — ф. р., удовлетворяющие условиям (1). Положим $h(z)=\varphi_1^n(z)-\varphi_2^n(z)$ **(9)**, где $\varphi_j(z)=\varphi\left(i\frac{1+z}{1-z};\ F_j\right)$, $j=1, 2$.

Так как, не уменьшая общности, можно считать, что в (2) имеем $a=0$, то функция $h(z)$ ограничена в круге $|z|<1$. Если, вопреки утверждению теоремы, $G_1(x)\not\equiv G_2(x)$, то $h(z)\not\equiv 0$, и равенство (9) можно записать в виде

$$1=\frac{\varphi_1^n(z)}{h(z)}-\frac{\varphi_2^n(z)}{h(z)}. \tag{10}$$

Воспользуемся следующим результатом [3, с. 74], который является простым следствием второй основной теоремы Р. Неванлинны. *Если*

$$\varlimsup_{r\to1}\frac{T(r, f)}{\ln(1/(1-r))}=+\infty, \tag{11}$$

то найдется последовательность значений $r = r_k \uparrow 1$, на которой справедливо неравенство

$$(1 + 0(1))\, T(r, f) \leqslant \overline{N}(r, 1/f) + \overline{N}(r, 1/(f-1)) + \overline{N}(r, f). \tag{12}$$

Применим этот результат к функции $f = \varphi_1^n/h$. Так как [3, с. 40] $T\left(\frac{1+r}{2}, \varphi_1\right) \geqslant \frac{1}{4}(1-r) \max_{|z|=r} \ln|\varphi_1(z)| \geqslant \frac{1}{4}(1-r) \ln \varphi\left(i \times \times \frac{1+r}{1-r}; F_1\right)$, а в силу (7) и ограниченности функции h $T(r, \varphi_1^n/h) \geqslant nT(r, \varphi_1) - T(r, h) = nT(r, \varphi_1) + O(1)$, то из (8) следует, что для $f = \varphi_1^n/h$ выполнено условие (11). Используя (6), (7), имеем $\overline{N}(r, \varphi_1^n/h) \leqslant N(r, 1/h) \leqslant T(r, h) + O(1) = O(1)$ **(13)**; $\overline{N}(r, h/\varphi_1^n) \leqslant \overline{N}(r, 1/\varphi_1^n) \leqslant \frac{1}{n} N(r, 1/\varphi_1^n) \leqslant \frac{1}{n}\{T(r, \varphi_1^n) + O(1)\} \leqslant \frac{1}{n}\{T(r, \varphi_1^n/h) + T(r, h) + O(1)\} \leqslant \frac{1}{n} T(r, \varphi_1^n/h) + O(1)$ **(14)**; $\overline{N}(r, h/\varphi_2^n) \leqslant \leqslant T(r, \varphi_2^n/h) + O(1)$ **(15)**.

Из равенства (10) следует, что $\overline{N}(r, 1/(1-\varphi_1^n/h)) = \overline{N}(r, h/\varphi_2^n)$ **(16)**. Поэтому, учитывая (6), (7), (10) и (15), будем иметь

$$\overline{N}(r, 1/(1-\varphi_1^n/h)) \leqslant \frac{1}{n} T(r, \varphi_2^n/h) = \frac{1}{n} T(r, \varphi_1^n/h - 1) \leqslant$$
$$\leqslant \frac{1}{n} T(r, \varphi_1^n/h) + O(1).$$

Подставляя в (12), получим $(1 + o(1))\, T(r, \varphi_1^n/h) \leqslant \frac{2}{n} T(r, \varphi_1^n/h) + O(1)$, где r пробегает некоторую последовательность $r_k \uparrow 1$. Так как $n \geqslant 3$, то отсюда следует, что на последовательности значений $r = r_k \uparrow 1$ имеем $T(r, \varphi_1^n/h) = O(1)$. Поскольку $T(r, \varphi_1^n/h)$ — неубывающая функция от r [3, с. 26], то $T(r, \varphi_1^n/h) \equiv \equiv O(1)$, что противоречит (11). Следовательно, $G_1(x) \equiv G_2(x)$ и теорема доказана.

Замечание. Если $G_1 \in \Theta_n$, $G_2 \in \Theta_m$, $\frac{1}{m} + \frac{1}{n} < 1$, и $\lim_{y \to +\infty} \times \frac{\ln \varphi(iy; G_1)}{y \ln y} = +\infty$, то, как видно из приведенного доказательства, из (2) следует (3).

3. Доказательство теоремы 2. Нам понадобятся следующие результаты.

Теорема В. Пусть х. ф. $f(t)$ *аналитична в полуплоскости* $\operatorname{Im} t > 0$ *и* $\ln \ln f(iy) = 0(y)$, $y \to +\infty$ **(17)**. *Предположим, что ее нули* $\{a_k\}$, *лежащие в полуплоскости* $\operatorname{Im} t > 0$, *удовлетворяют условию* $\sum_k (1 + |a_k|^2)^{-1} \operatorname{Im} a_k < \infty$ **(18)**. *Тогда*

$$\varlimsup_{y \to +\infty} \frac{\ln f(iy)}{y^3} < \infty. \tag{19}$$

Эта теорема была доказана И. В. Островским [4] при более жестком условии: $\ln\ln f(iy) = O(\ln y)$, $y \to +\infty$, она была доказана ранее И. П. Камыниным [5].

Теорема С. *Пусть функция* $f(t)$ *аналитична в верхней полуплоскости и непрерывна на вещественной оси, а* L — *какая-либо кривая, идущая из точки* $t=0$ *в бесконечность, оставаясь в верхней полуплоскости. Если выполнены условия*

$$|f(t)| \leqslant M, \ \operatorname{Im} t \geqslant 0, \quad \lim_{\substack{|t|\to\infty \\ t\in L}} \frac{\ln|f(t)|}{|t|} = -\infty,$$

то $f(t) \equiv 0$.

Доказательство этой теоремы можно найти в [6].

Лемма 1. *Пусть х. ф.* $f(t)$ *аналитична в полуплоскости* $\operatorname{Im} t > 0$ *и выполняются* (17) *и* (18). *Тогда для функции* $f(t)$ *справедливо представление* ($t = re^{i\varphi}$, $0 < \varphi < \pi$; a_n — *нули функции* $f(t)$):

$$\ln|f(t)| = \sum_{k=1}^{3} c_k r^k \sin k\varphi + \frac{2}{\pi}\int_1^\infty \ln\frac{1}{|f(x)|} \times$$

$$\times \operatorname{Im}\frac{t^3}{x^2(t^2-x^2)}\,dx + \ln|\pi_0^+(t)| + O(1), \quad |t| \to \infty, \tag{20}$$

где

$$\pi_0^+(t) \prod_{\{|a_n|<1,\ \operatorname{Im} a_n>0\}} \left(1-\frac{t}{a_n}\right)\Big/\left(1-\frac{t}{\bar a_n}\right), \tag{21}$$

c_k — *постоянные, не зависящие от* t.

Доказательство. Напомним некоторые обозначения теории распределения значений в полуплоскости, которые можно найти в [7]. Пусть $f(t)$ — аналитическая функция в полуплоскости $\operatorname{Im} t > 0$; $A(r, f = \frac{1}{\pi}\int_1^r \left(\frac{1}{x^2} - \frac{1}{r^2}\right)(\ln^+|f(x)| + \ln^+|f(-x)|)$; $B(r, f) = \frac{2}{\pi r}\int_0^\pi \ln^+|f(re^{i\varphi})|\sin\varphi\,d\varphi$; $\quad S(r, f) = A(r, f) + B(r, f)$.

Доказательство леммы 1 будет получено из теоремы Р. Неванлинны [8, с. 34] о представлении функций, мероморфных в полуплоскости, которая в применении к функциям, аналитическим в полуплоскости, формулируется так:

Пусть $f(t)$ — *функция, аналитическая в полуплоскости* $\operatorname{Im} t > 0$. *Если при некотором натуральном* q

$$\int_1^\infty S(r, f)\, r^{-q-1}\,dr < \infty, \tag{22}$$

то имеет место представление

$$\ln|f(t)| = \sum_{k=1}^{\infty} d_k r^k \sin k\varphi + \frac{1}{\pi} \int\limits_{|x|\geqslant 1} \ln|f(x)| \times$$

$$\times \operatorname{Im} \frac{t^{q+1}}{x^{q+1}(x-t)}\, dx + \ln|\pi_q^+(t)| + O(1), \quad |t| \to \infty, \qquad (23)$$

где $\pi_q^+(t) = \prod\limits_{\{|a_n|>1,\ \operatorname{Im} a_n>0\}} E(t/a_n,\ q)/E(t/\overline{a}_n,\ q), \quad E(u,\ q) = (1 -$ $- u)\exp\{u + u^2/2 + \ldots + u^q/q\}$, $\{a_n\}$ — *нули функции* $f(t)$; d_k — *постоянные, не зависящие от* t.

Так как х. ф. обладают свойством хребта $|f(t)| \leqslant f(i \operatorname{Im} t)$, то из (19) и определения $S(r,\ f)$ следует, что при $q = 3$ справедливо (21) и, следовательно, (23).

Заметим, что $(a_n = |a_n| e^{i\alpha_n})$ $\ln|\pi_3^+(t)| = \ln|\pi_0^+(t)| - \sum\limits_{k=1}^{3} b_k r^k \sin k\varphi$ **(24)**, где $b_k = \dfrac{2}{k} \sum\limits_{|a_n|>1} \dfrac{\sin k\alpha_n}{|a_n|^k}$, сходимость ряда следует из (18).

Далее, поскольку из (19) следует [5, с. 99]

$$\int\limits_1^{\infty} x^{-4} \ln \frac{1}{|f(x)|}\, dx < \infty, \qquad (25)$$

то, учитывая, что $f(x) = f(-x)$, $-\infty < x < \infty$, будем иметь

$$\frac{1}{\pi} \int\limits_{|x|>1} \ln|f(x)| \operatorname{Im}\left\{\frac{t^4}{x^4(x-t)}\right\} dx = \frac{2}{\pi} \int\limits_1^{\infty} \ln|f(x)| \operatorname{Im}\left\{\frac{t^5}{x^4(x^2-t^2)}\right\} dx =$$

$$= br^3 \sin 3\varphi + \frac{2}{\pi} \int\limits_1^{\infty} \ln \frac{1}{|f(x)|} \operatorname{Im}\left\{\frac{t^3}{x^2(t^2-x^2)}\right\} dx, \qquad (26)$$

где $b = \dfrac{2}{\pi} \displaystyle\int\limits_1^{\infty} x^{-4} \ln \frac{1}{|f(x)|}\, dx.$

Таким образом, учитывая (24), (25), из представления (23) получаем (20).

Лемма 2. *Если для х. ф.* $f(t)$, *аналитической в полуплоскости* $\operatorname{Im} t > 0$, *выполняется* (18) *и* (19), *то для любого фиксированного* φ, $0 < \varphi < \pi$, *верна оценка*

$$\int\limits_1^{\infty} \ln \frac{1}{|f(x)|} \operatorname{Im}\left\{\frac{t^3}{x^2(t^2-x^2)}\right\} dx = o(|t|^3). \qquad (27)$$

Если дополнительно предположить, что $\int\limits_1^\infty x^2 \ln \frac{1}{|f(x)|}\,dx < \infty$, *то в правой части* (27) *для любого* $0 < \varphi < \pi$ *вместо* $o(|t|^3)$ *можно записать* $O(|t|)$.

Утверждение леммы 2 следует из (20), (25) и теоремы Лебега о мажорированной сходимости.

Лемма 3. *Пусть* D — *угол раствора* $\pi/3$ *с вершиной в начале координат, а* $f(z)$ — *функция, аналитическая внутри и на границе* D. *Предположим, что на границе* D *выполняется* $|f(z)| \leqslant M$ **(28)**, *а всюду в* D *выполняется* $|f(z)| \leqslant \exp\{O(y^3)\}$. *Тогда неравенство* (28) *выполняется всюду в* D.

Доказательство этого утверждения без существенных изменений повторяет доказательство леммы 5.2.1, приведенное в [9].

Пусть теперь $G_1,\ G_2 \in \Theta_2$ и выполнено (5), (2). В силу определения класса Θ_2, $G_1 = F_1^{*2}$, $G_2 = F_2^{*2}$, где F_1, F_2 — ф. р., удовлетворяющие условиям (1). Положим $h(t) = \varphi^2(t;\ F_1) - \varphi^2(t;\ F_2)$ **(29)**; $f(t) = \frac{1}{2}\{\varphi(t;\ F_1) + \varphi(t;\ F_2)\}$ **(30)**.

Считая, что в (2) имеем $a = 0$, заключаем, что функция $h(t)$ ограничена в полуплоскости $\operatorname{Im} t > 0$. Поэтому ([3], с. 260) нули функции $h(t)$ удовлетворяют условию (18). Так как в силу (29), (30) функция $h(t)/f(t)$ аналитична, то нули f также удовлетворяют условию (18). Поскольку, в силу (5), следует, что $\ln\ln\varphi(iy;\ G_1) = o(y)$, $y \to +\infty$, то для функции $f(t)$ справедливо (17). Поэтому заключаем, что х. ф. $f(t)$ удовлетворяет (19) (см. теорему В) и, значит, допускает представление (20) (см. лемму 1). Поскольку функция $h(t)/\pi_0^+(t)$, где $\pi_0^+(t)$ определяется по нулям функции $f(t)$ формулой (21), ограничена в полуплоскости $\operatorname{Im} t > 0$, то, учитывая (29) и представление (20), имеем

$$|\varphi(t;\ F_1) - \varphi(t;\ F_2)| = |h(t)/(2f(t))| = \exp\Big\{-\Big(\sum_{k=1}^{3} c_k r^k \sin k\varphi + \frac{2}{\pi} \times$$

$$\times \int\limits_1^\infty \ln\frac{1}{|f(x)|} \operatorname{Im}\left\{\frac{t^3}{x^2(t^2 - x^2)}\right\} dx + O(1)\Big)\Big\} \quad \textbf{(31)}.$$

Рассмотрим случаи:

а) $c_2 = c_3 = 0$; б) $c_3 = 0$, $c_2 \neq 0$; в) $c_3 \neq 0$.

а) В полуплоскости $\operatorname{Im} t > 0$ имеет место следующая оценка (см. лемму 1):

$$\ln|f(t)| \leqslant \frac{2}{\pi}\left|\int\limits_1^\infty \ln\frac{1}{|f(x)|} \operatorname{Im}\left\{\frac{t^3}{x^2(t^2 - x^2)}\right\} dx\right| + O(|t|).$$

Из леммы 2 следует, что $\int\limits_1^\infty x^{-2} \ln \frac{1}{|f(x)|}\, dx = \infty$. Значит, поскольку $|f(x)| \leqslant 1$, $-\infty < x < \infty$, получаем, что при $\left|\arg t - \frac{\pi}{2}\right| \leqslant \pi/6$ справедлива оценка ($t = re^{i\varphi}$):

$$\int\limits_1^\infty \ln \frac{1}{|f(x)|} \operatorname{Im}\left\{\frac{t^3}{x^2(t^2 - x^2)}\right\} dx \geqslant \int\limits_1^\infty \frac{r^5 \sin\varphi}{x^2(r^2 + x^2)^2} \times$$

$$\times \ln \frac{1}{|f(x)|}\, dx \geqslant \frac{\sqrt{3}}{8} r \int\limits_1^r x^{-2} \ln \frac{1}{|f(x)|}\, dx = r\omega(r),$$

где $\lim\limits_{r\to\infty} \omega(r) = +\infty$.

Отсюда, в силу (30), заключаем, что при $\left|\arg t - \frac{\pi}{2}\right| \leqslant \pi/6$ $|\varphi(t;\ F_1) - \varphi(t;\ F_2)| \leqslant \exp\{-|t|\,\omega_1(|t|)\}$ **(32)**, где $\lim\limits_{|t|\to\infty} \omega_1(|t|) = +\infty$.

Далее, учитывая, что $|\varphi(t;\ F_1) - \varphi(t;\ F_2)| = \exp\{O(y^3)\}$, $\operatorname{Im} t > 0$, и то, что функция $\varphi(t;\ F_1) - \varphi(t;\ F_2)$ ограничена на вещественной оси и лучах $\left|\arg t - \frac{\pi}{2}\right| = \pi/6$, применим лемму 3. Получим, что функция $\varphi(t;\ F_1) - \varphi(t;\ F_2)$ ограничена в углах $0 \leqslant \arg t \leqslant \pi/3$ и $\pi \leqslant \arg t \leqslant \frac{2}{3}\pi$ и, следовательно, ограничена в полуплоскости $\operatorname{Im} t > 0$. В силу теоремы С заключаем, что $\varphi(t;\ F_1) - \varphi(t;\ F_2) \equiv 0$, откуда, в силу теоремы единственности для х. ф., вытекает, что $F_1 \equiv F_2$;

б) поскольку при $\left|\arg t - \frac{\pi}{2}\right| \leqslant \pi/6$ имеем $\operatorname{Im}\left\{\frac{t^3}{x^2(t^2 - x^2)}\right\} \geqslant 0$, то из (31) следует $|\varphi(t;\ F_1) - \varphi(t;\ F_2)| \leqslant \exp\{-c_2 r^2 \sin 2\varphi + O(r)\}$ **(33)**.

Так как в силу (1) $f(iy) \geqslant \exp\{y\omega_3(y)\}$, где $\lim\limits_{y\to+\infty} \omega_3(y) = +\infty$, то из (29) получим $|\varphi(iy;\ F_1) - \varphi(iy;\ F_2)| = O(\exp(-y\omega_3(y)))$, $y \to +\infty$ **(34)**.

Поэтому, если $c_2 < 0$ ($c_2 > 0$), то из (33), (34) следует, что функция $\varphi(t;\ F_1) - \varphi(t;\ F_2)$ ограничена в угле $\frac{\pi}{2} + \varepsilon \leqslant \arg t \leqslant \frac{2}{3}\pi$ $\left(\frac{\pi}{3} \leqslant \arg t \leqslant \frac{\pi}{2} - \varepsilon,\ \varepsilon > 0\right)$. Следовательно, поскольку $|\varphi(t;\ F_1) - \varphi(t;\ F_2)| = |\varphi(-\bar{t};\ F_1) - \varphi(-\bar{t};\ F_2)|$, заключаем, что функция $\varphi(t;\ F_1) - \varphi(t;\ F_2)$ ограничена в угле $\frac{\pi}{3} \leqslant \arg t \leqslant \frac{\pi}{2} - \varepsilon$ $\left(\frac{\pi}{2} + \varepsilon \leqslant \arg t \leqslant \frac{2}{3}\pi\right)$. Таким образом, в силу принципа

Фрагмена — Линделефа функция $\varphi(t; F_1) - \varphi(t; F_2)$ ограничена во всем угле $\left|\arg t - \frac{\pi}{2}\right| \leqslant \pi/6$. Далее, аналогично случаю а), заключаем, что $F_1 \equiv F_2$;

в) из (29) следует, что $\varphi(t; F_1) = f(t) + \frac{h(t)}{4f(t)}$. Отсюда, в силу того, что $|\varphi(t; F_1)| \leqslant \varphi(iy; F_1) = f(iy) + O(1)$, $y \to \infty$, имеем $(t = x + iy)$ $|h(t)| \leqslant 4(|f(t)| + |\varphi(t; F_1)|)|f(t)| \leqslant 4(2f(iy) + O(1))|f(t)|$. Учитывая представление (20) для $|f(t)|$ и (27), будем иметь $(t = re^{i\varphi})$ $|h(t)| \leqslant \exp\{-c_3 y^3 + c_3 r^3 \sin 3\varphi + o(r^3)\}$. Значит, на луче $t = re^{i\pi/6}$ выполняется $|h(re^{i\pi/6})| \leqslant \exp\left\{\frac{7}{8} c_3 r^3 + o(r^3)\right\}$ **(35)**.

Поскольку, в силу (1), $f(iy) \geqslant \exp\{y\omega(y)\}$, $\lim\limits_{y \to +\infty} \omega(y) = +\infty$, то из представления (20) и (27) легко видеть, что $c_3 < 0$. Поэтому, учитывая, что $h(t)$ — ограниченная функция в верхней полуплоскости и на луче $t = re^{i\pi/6}$ допускает оценку (35), в силу теоремы С заключаем, что $h(t) \equiv 0$. Следовательно, $F_1 \equiv F_2$. Таким образом, первая часть утверждения теоремы 2 доказана.

Приведем принадлежащее А. М. Улановскому доказательство второго утверждения теоремы 2. Пусть $Q(x)$ — ф. р., сосредоточенная на полуоси $(0, \infty)$, и $1 - Q(x) = O(e^{-rx})$, $r > 0$, $x \to +\infty$, а $\psi(t)$ — соответствующая ей х. ф. Заметим, что $\psi(t)$ является целой функцией, ограниченной в полуплоскости $\operatorname{Im} t > 0$. Положим

$$\varphi_1(t) = \frac{2e\,\mathrm{ch}\,(\psi(t) + \psi(-t)) + 2\,\mathrm{sh}\,(\psi(-t)) + e^{\psi(-t)}(e^{\psi(t)} - 1)}{(1+e)\,e^2};$$

$$\varphi_2(t) = \frac{2e\,\mathrm{sh}\,(\psi(t) + \psi(-t)) + 2\,\mathrm{ch}\,(\psi(-t)) + e^{\psi(-t)}(e^{\psi(t)} - 1)}{(1+e)\,e^2}.$$

Легко видеть, что $\psi_j(t)$ — х. ф. $(j = 1, 2)$. Обозначим через $F_j(x)$ — ф. р., отвечающие х. ф. $\varphi_j(t)$. Очевидно, что $F_j^{*2} \in \Theta_2$ и что условие (5) не выполняется. Поскольку $\varphi_1^2(t) - \varphi_2^2(t) = \frac{2}{e(1+e)}(1 - e^{\psi(t)-1}) = O(1)$, $\operatorname{Im} t \geqslant 0$, то выполнено условие (2) с $n = 2$, однако, так как функция $\varphi_1(t) - \varphi_2(t)$ является неограниченной в $\operatorname{Im} t > 0$, то (3) не имеет места.

Список литературы: 1. *Ибрагимов И. А.* Об определении безгранично делимой функции распределения по ее значениям на полупрямой.— Теория вероятностей и ее применение, 1977, **22**, № 2, с. 393—399. 2. *Титов А. Н.* Об определении свертки одинаковых функций распределения по значениям на полупрямой.— Теория вероятностей и ее применение, 1981, **26**, № 3, с. 610—611. 3. *Хейман У.* Мероморфные функции.— М.: Мир, 1966.—287 с. 4. *Островский И. В.* О росте целых и аналитических в полуплоскости хребтовых функций.— Мат. сб., 1982, 119(161), № 1 (9), с. 150—159. 5. *Камынин И. П.* Обобщение теоремы Марцинкевича о целых характеристических функциях вероятностных распределений.— Зап. науч. семинаров ЛОМИ, 1979, **85**, с. 94—103. 6. *Евграфов М. И.* Асимптотические оценки и целые функции.— М.: Наука, 1979.— 320 с. 7. *Гольдберг А. А., Островский И. В.* Распределение значений мероморфных функций.— М.: Наука, 1970.— 592 с. 8. *Nevanlinna R.* Über die Eigenschaften meromorpher Funktionen in einen Winkelraum.— Acta Soc. Sci. Fenn., 1925, **50**, N 12, S. 1—15. 9. *Линник Ю. В., Островский И. В.* Разложение случайных величин и векторов.— М.: Наука, 1972.— 480 с.

Поступила в редколлегию 23.06.82.