УДК 517.5

А. П. АРТЕМЕНКО

ЭРМИТОВО-ПОЛОЖИТЕЛЬНЫЕ ФУНКЦИИ И ПОЗИТИВНЫЕ ФУНКЦИОНАЛЫ. 1

В статье рассматриваются некоторые вопросы, касающиеся связи между функциями, эрмитово-положительными (э. п.) на модулях или «отрезках» модулей вещественных чисел, и линейными позитивными функционалами в некоторых подпространствах пространства почти переодических функций Бора, и некоторые вопросы, касающиеся продолжения непрерывных э. п. функций из конечного интервала на всю вещественную ось.

Раздел 1 посвящен связи между э. п. функциями и позитивными функционалами. Первая теорема раздела была опубликована в 1939 г. [1] и перенесена Д. А. Райковым [2] и М. Г. Крейном [3] на случай функции э. п. на топологической группе. Теорема 4 является обобщением теоремы 1 работы [4].

В разделе 2 приводится доказательство теоремы С. Бохнера, являющееся упрощением доказательства более общей теоремы (также принадлежащей Бохнеру), опубликованного в [5]. Доказательство теоремы Бохнера приводится здесь потому, что некоторые его детали нужны для дальнейшего рассуждения. Метод доказательства может быть перенесен на случай э. п. функций в n-мерном пространстве.

Раздел 3 содержит вывод некоторых соотношений, относящихся к общей задаче Каратеодори.

В разделе 4 дается решение вопроса о единственности продолжения непрерывной э. п. функции из конечного интервала, причем здесь использован метод, во многом аналогичный методу М. Рисса [6] решения степенной проблемы моментов. Основная теорема этого раздела (теорема 11) является естественным дополнением леммы 1 работы М. Г. Крейна [4].

Задача о продолжении непрерывной э. п. функции из конечного интервала поставлена и решена М. Г. Крейном, и полученные результаты опубликованы в работе [4].

Характеристические функции. 1. Пусть A — произвольное множество вещественных чисел. Будем обозначать через $\boldsymbol{P_A}$ линейное нормированное пространство, элементами которого служат периодические функции Г. Бора, все показатели Фурье которых принадлежат A и где норма определена равенством

$$\| x \| = \sup_{-\infty < t < \infty} | x(t) |. \qquad (\ast)$$

Определенную на A функцию $\Psi(\lambda)$ будем называть эрмитово-положительной на A, если для любой конечной системы вещественных чисел $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$ $(n = 1, 2, \ldots)$, таких что $\lambda_i - \lambda_j \in A$ $(i, j = 1, \ldots, n)$, и для любых комплексных чисел $\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n$ имеет место неравенство

$$\sum_{i,\ j=1}^{n} \Psi(\lambda_i - \lambda_j)\, \xi_i \bar{\xi}_j \geqslant 0. \tag{1}$$

Как известно, условие (1) эквивалентно следующему: все главные миноры матрицы $\|\Psi(\lambda_i - \lambda_j)\|_{i,\ j=1}^{n}$ неотрицательны; коротко это запишем: $\|\Psi(\lambda_i - \lambda_j)\| \geqslant 0$ **(1′)**, в случае же, когда все главные миноры положительны, $\|\Psi(\lambda_i - \lambda_j)\| > 0$ **(1″)**.

Каждому линейному в $\mathbf{P_A}$ функционалу f отнесем функцию $\Psi(\lambda)$, определяемую равенством $\Psi(\lambda) = f(e^{i\lambda t})$ **(2)**, для всех $\lambda \in A$ эту функцию назовем характеристической функцией линейного функционала f.

Множество M вещественных чисел, содержащее вместе с каждыми двумя числами их разность, назовем модулем. Докажем следующую теорему.

Теорема 1. *Для того чтобы $\Psi(\lambda)$ $(\lambda \in M)$ была характеристической функцией позитивного в $\mathbf{P}_M$ функционала, необходимо и достаточно, чтобы она была э. п. на модуле M.*

Необходимость указанного условия очевидна: из позитивности функционала f следует, что для $\lambda_k \in M$ и любых ξ_k, $k = 1, 2, \ldots,$ $n = 1, 2 \ldots$ имеет место неравенство $f\left(\left|\sum_{1}^{n} \xi_k e^{i\lambda_k t}\right|^2\right) \geqslant 0,$ эквивалентное неравенству (1).

Доказательство достаточности. Пусть $x(t) = \sum a(\lambda)\, e^{i\lambda t}$, где $a(\lambda)$ отлично от нуля лишь для конечного множества значений λ из M, произвольный неотрицательный почти периодический полином.

Выберем элементы базиса $\Lambda_1, \Lambda_2, \ldots, \Lambda_N$ системы показателей Фурье полинома $x(t)$ так, чтобы все они принадлежали M, что, очевидно, всегда возможно.

Полином $x(t)$ можно теперь записать:

$$x(t) = \sum a\left(\sum_{k=1}^{N} n_k \Lambda_k\right) e^{i\, t \sum_{k=1}^{N} n_k \Lambda_k},$$

где суммирование производится по всем комбинациям целых чисел $n_1, n_2, \ldots, n_N$.

Введем в рассмотрение периодический полином от N переменных $x(\tau_1, \tau_2, \ldots, \tau_N) = \sum a\left(\sum n_k \Lambda_k\right) e^{i\Sigma n_k \tau_k}$.

Как легко следует из известной теоремы Кронекера о диофантовых приближениях, область изменения $X(\tau_1, \tau_2, \ldots, \tau_N)$ совпадает с замыканием области изменения $x(t)$, значит, $X(\tau_1, \tau_2, \ldots$

$\ldots, \tau_N) \geqslant 0$ (3), отсюда следует, что функция $Y(\tau_1, \tau_2, \ldots$ $\ldots, \tau_N) = \sqrt{X(\tau_1, \tau_2, \ldots, \tau_N) + \frac{\varepsilon}{2}}$, имеет частные производные всех порядков и поэтому разлагается в абсолютно сходящийся ряд Фурье: $Y(\tau_1, \tau_2, \ldots, \tau_N) = \sum b\left(\sum_{k=1}^{N} n_k \Lambda_k\right) e^{i\Sigma n_k \tau_k}$, $\sum |b(\lambda)| < \infty$.

Для произвольного $\varepsilon > 0$ можем найти такой конечный отрезок $\sum b_\varepsilon\left(\sum_k n_k \Lambda_k\right) e^{i\Sigma n_k \tau_k}$ ряда $\sum b\left(\sum_k n_k \Lambda_k\right) e^{i\Sigma n_k \tau_k}$ (здесь $b_\varepsilon(\lambda)$ для некоторого конечного множества значений равно $b(\lambda)$, а для остальных — равно нулю), что

$$\sum_\lambda |b(\lambda) - b_\varepsilon(\lambda)| < \frac{\varepsilon}{4 \sum |b(\lambda)|}.$$

Имеем $$\sum_\lambda \Big| a(\lambda) - \sum_{\mu - \nu = \lambda} b_\varepsilon(\mu) b_\varepsilon(\nu) \Big| \leqslant \sum_\lambda \Big| \sum_{\mu - \nu = \lambda} [b(\mu) \overline{b(\nu)} - b_\varepsilon(\mu) \overline{b_\varepsilon(\nu)}] \Big| + \frac{\varepsilon}{2} \leqslant \sum_\lambda \Big| \sum_{\mu - \nu = \lambda} b(\lambda) [\overline{b(\nu)} - \overline{b_\varepsilon(\nu)}] + \sum_\lambda \sum_{\mu - \nu = \lambda} b_\varepsilon \times$$
$$\times (\mu) [\overline{b(\nu)} - \overline{b_\varepsilon(\nu)}] \Big| + \frac{\varepsilon}{2} \leqslant 2 \sum_\mu |b(\mu)| \sum_\nu |b(\nu) - b_\varepsilon(\nu)| + \frac{\varepsilon}{2} < \varepsilon.$$

Полагая $\tau_k = \lambda_k t$, $k = 1, 2, \ldots, N$, получаем следующий результат

Лемма 1. *Для произвольного неотрицательного почти периодического полинома $x(t)$ из $\boldsymbol{P_M}$ и любого $\varepsilon > 0$ можно найти такой почти периодический полином $y_\varepsilon(t) \in \boldsymbol{P_M}$, что сумма модулей коэффициентов разности $x(t) - |y_\varepsilon(t)|^2$ не превосходит ε.*

Пусть функция $\Psi(\lambda)$ э. п. на $\boldsymbol{M}$; условие (1′) дает для любого $\lambda \in \boldsymbol{M}$

$$\begin{Vmatrix} \Psi(0) & \Psi(\lambda) \\ \Psi(-\lambda) & \Psi(0) \end{Vmatrix} \geqslant 0,$$

откуда следует $\Psi(0) \geqslant 0$, $\Psi(-\lambda) = \overline{\Psi(\lambda)}$ (4) и $|\Psi(\lambda)| \leqslant \Psi(0)$ (5). Определим теперь функционал f_0 на всех полиномах из $\boldsymbol{P_M}$ при помощи равенства: $f_0\left\{\sum a(\lambda) e^{i\lambda t}\right\} = \sum a(\lambda) \Psi(\lambda)$ (6). Функционал f_0, очевидно, дистрибутивен. Пусть $x(t)$ — произвольный неотрицательный почти периодический полином из $\boldsymbol{P_M}$ и ε — произвольное положительное число; пусть $y_\varepsilon(t)$ — отвечающий этим $x(t)$ и ε полином леммы 1; неравенство (4) дает $f_0(x) = f_0\{|y_\varepsilon(t)|^2\} + f_0\{x(t) - |y_\varepsilon(t)|^2\} > f_0\{|y_\varepsilon(t)|^2\} - \varepsilon\Psi(0)$. Но из (1) следует, что $f_0\{|y_\varepsilon(t)|^2\} \geqslant 0$, поэтому, в силу произвольности ε, имеем $f_0(x) \geqslant 0$ (7).

Таким образом, функционал f_0 позитивен в подпространстве пространства $\boldsymbol{P_M}$, состоящем из всех почти периодических полиномов. Но из позитивности следует ограниченность. В самом деле, для любого вещественного почти периодического полинома $x(t)$ имеем $\|x\| \pm x(t) \geqslant 0$, откуда $|f_0(x)| \leqslant \Psi(0)\|x\|$ **(8).**

Так как множество почти периодических полиномов плотно в $\boldsymbol{P}_M$, то существует один и только один линейный в $\boldsymbol{P}_M$ функционал f, совпадающий с f_0 на почти периодических полиномах, причем $\|f\| = \psi(0)$ **(9)** и из $x(t) \geqslant 0$, $x \in \boldsymbol{P}_M$ следует $f(x) \geqslant 0$.

Кроме того, в силу (6), имеем $f(e^{i\lambda t}) = \Psi(\lambda)$, $\lambda \in \boldsymbol{M}$.

Теорема 1 доказана.

2. Пусть $x(t) \sim \sum a(\lambda) e^{i\lambda t}$ — почти периодическая функция, принимающая только неотрицательные значения, а $y(t)$ — произвольная почти периодическая функция. Тогда среднее $\mathcal{M}\{y(t) \times \times x(-t)\}$ **(10)** определяет позитивный в $\boldsymbol{P}_M$ функционал с характеристической функцией $\Psi_x(\lambda) = \mathcal{M}\{e^{i\lambda t} x(-t)\} = a(\lambda)$.

Наоборот, если среднее (10) определяет позитивный в $\boldsymbol{P}_M$ функционал, где $\boldsymbol{M}$ — наименьший модуль, содержащий все показатели Фурье-функции $x(t)$, то $x(t) \geqslant 0$.

В самом деле, пусть $x(t) = x_1(t) - x_2(t) + ix_3(t) - ix_4(t)$, где $x_1(t)$, $x_2(t)$, $x_3(t)$, $x_4(t) \geqslant 0$ и $x_1(t)\,x_2(t) = x_3(t)\,x_4(t) = 0$. Тогда из неравенства $\mathcal{M}\{x_k(t)\,x(-t)\} \geqslant 0$, $k = 1, 2, 3, 4$, заключаем, что $\mathcal{M}\{x_k^2(t)\} = 0$, $k = 2, 3, 4$, т. е. $x_2(t) = x_3(t) = x_4(t) \equiv 0$.

Таким образом, приходим к теореме

Теорема 2. *Для того чтобы почти периодическая функция $x(t) \sim \sum a(\lambda) e^{i\lambda t}$ удовлетворяла неравенству $x(t) \geqslant 0$ $(-\infty < < t < \infty)$, необходимо, чтобы функция $a(\lambda)$ была э. п. на всей вещественной оси, и достаточно, чтобы $a(\lambda)$ была э. п. на наименьшем модуле, содержащем все показатели Фурье функции $x(t)$.*

3. Для дальнейшего нам понадобится следующее вспомогательное предложение из теории определителей.

Лемма 2. *Пусть все главные миноры эрмитовой матрицы,*

$$A(x) = \left\| \begin{matrix} c_{11}, & c_{12} & \ldots & c_{1,n} & x \\ c_{21}, & & & c_{2,n} & c_{2,n+1} \\ c_{n1}, & c_{n2} & \ldots & c_{n,n} & c_{n,n+1} \\ \bar{x}, & c_{n+1,2} & \ldots & & c_{n+1,n+1} \end{matrix} \right\|,$$

не содержащие элемента x, неотрицательны. Тогда существует по крайней мере, одно значение x, при котором $A(x) \geqslant 0$.

Допустим сперва, что все главные миноры матрицы $A(x)$, не содержащие элемента x, положительны. Тогда, применяя теорему о минорах взаимного определителя, получаем

$$\begin{vmatrix} c_{22} & \ldots & c_{2n} \\ c_{n2} & \ldots & c_{nn} \end{vmatrix} |A(x)| = \begin{vmatrix} c_{11} & \ldots & c_{1n} \\ c_{n1} & \ldots & c_{nn} \end{vmatrix} \begin{vmatrix} c_{22} & \ldots & c_{2,n+1} \\ c_{n+1,2} & & c_{n+1,n+1} \end{vmatrix} -$$

$$- \begin{vmatrix} c_{12} & \ldots & x \\ c_{n2} & \ldots & c_{n,n+1} \end{vmatrix} \begin{vmatrix} c_{21} & \ldots & c_{2n} \\ \bar{x} & \ldots & c_{n+1,n} \end{vmatrix}.$$

Таким образом, неравенство $A(x) \geqslant 0$ эквивалентно неравенству

$$\begin{vmatrix} c_{12} & \ldots & x \\ c_{n2} & \ldots & c_{n,\, n+1} \end{vmatrix} \leqslant \begin{vmatrix} c_{11} & \ldots & c_{1n} \\ c_{n1} & \ldots & c_{n,\, n} \end{vmatrix} \begin{vmatrix} c_{21} & \ldots & c_{2,\, n+1} \\ c_{n+1,\, 2} & \ldots & c_{n+1,\, n+1} \end{vmatrix}.$$

Отсюда следует, что решением неравенства $A(x) \geqslant 0$ являются все точки (и только они) круга радиуса

$$r = \frac{\begin{vmatrix} c_{11} & \ldots & c_{1,\, n} \\ c_{n1} & \ldots & c_{n,\, n} \end{vmatrix} \begin{vmatrix} c_{22} & \ldots & c_{2,\, n+1} \\ c_{n+1,\, 2} & \ldots & c_{n+1,\, n+1} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} c_{22} & \ldots & c_{2n} \\ c_{n2} & \ldots & c_{n,\, n} \end{vmatrix}} \tag{11}$$

и с центром в точке

$$C = (-1)^n \begin{vmatrix} c_{12} & \ldots & c_{1n} & 0 \\ c_{22} & \ldots & c_{2n} & c_{2,\, n+1} \\ c_{n2} & \ldots & c_{n,\, n} & c_{n,\, n+1} \end{vmatrix} : \begin{vmatrix} c_{22} & \ldots & c_{2n} \\ & & \\ c_{n2} & \ldots & c_{nn} \end{vmatrix}. \tag{11'}$$

В общем случае рассматриваем матрицу $A(x) + \varepsilon E$, где E — единичная матрица, и переходим к пределу при $\varepsilon \downarrow 0$.

Напомним еще одно предложение, принадлежащее Шуру.

Если эрмитовы формы

$$\sum_{i,\, j=1}^{n} a_{ij}\xi_i\bar{\xi}_j \quad \text{и} \quad \sum_{i,\, j=1}^{n} b_{ij}\xi_i\bar{\xi}_j$$

неотрицательны, то форма

$$\sum_{i,\, j=1}^{n} a_{ij}b_{ij}\xi_i\bar{\xi}_j$$

также неотрицательна.

4. Воспользуемся результатами предыдущего параграфа для доказательства следующей теоремы.

Теорема 3. *Для того чтобы функция* $\psi(\lambda)$, *определенная на пересечении* $\boldsymbol{ML}$ ($\boldsymbol{M\bar{L}}$) *модуля* $\boldsymbol{M}$ *и открытого (замкнутого) интервала* $L = (-l,\ l)$ ($\bar{L} = [-l,\ l]$) *была характеристической функцией некоторого позитивного на* $\boldsymbol{P_{ML}}$ ($\boldsymbol{P_{M\bar{L}}}$) *функционала, необходимо и достаточно, чтобы она была э. п. на* $\boldsymbol{ML}$ ($\boldsymbol{M\bar{L}}$).

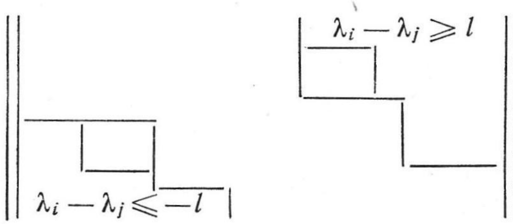
Ограничимся рассмотрением случая открытого интервала. Для замкнутого интервала рассуждения те же.

Очевидно, теорема будет доказана, если покажем, что для каждого неотрицательного полинома $x(t) = \sum a(\lambda)\, e^{i\lambda t}$ из $\boldsymbol{P_{ML}}$ имеет место неравенство $f(x) = \sum a(\lambda)\, \psi(\lambda) \geqslant 0$ **(12)**.

Пусть $0 < \lambda_0 < \lambda_1 <, \ldots, < \lambda_n$ **(13)** — произвольная система различных неотрицательных чисел, принадлежащих $\boldsymbol{M}$. Условимся обозначать через $\psi(\lambda;\ \mu)$ функцию, удовлетворяющую условию $\psi(\mu;\ \lambda) = \overline{\psi(\lambda;\ \mu)}$, совпадающую с $\psi(\lambda - \mu)$ для $\lambda - \mu \in$

$\in \boldsymbol{ML}$ и последующую еще определению для остальных значений λ и μ.

Запишем матрицу $\Psi = \| \psi(\lambda_i;\ \lambda_j) \|_{i,\ j=0}^{n}$. В этой матрице элементы, значения которых определены равенством $\Psi(\lambda_i;\ \lambda_j) = \psi(\lambda_i - \lambda_j)$, лежат между двумя ступенчатыми ломаными, симметричными относительно главной диагонали; значения же элементов, лежащих вне этой полосы, еще не определены:



(14).

Так как функция $\psi(\lambda)$ э. п. на $\boldsymbol{ML}$, то все главные миноры матрицы Ψ, составленные из элементов средней полосы, неотрицательны. Пользуясь леммой 2, можно определить значения $\psi(\lambda_i,\ \lambda_j)$ и $\psi(\lambda_j,\ \lambda_i)$, отвечающие паре симметричных угловых элементов, не принадлежащих средней полосе (например, для двух заштрихованных квадратов схемы (14)), так, чтобы все главные миноры, составленные из элементов расширенной средней полосы, были не отрицательны. Повторным применением этого приема можем определить все значения $\psi(\lambda_i,\ \lambda_j)$ $i,\ j = 0,\ 1,\ \ldots$ $\ldots,\ n$ так, чтобы матрица Ψ была неотрицательна. Из неотрицательности почти периодического полинома $x(t) = \sum a(\lambda)\, e^{i\lambda t}$ и теоремы 2 следует неотрицательность матрицы $A = \| a(\lambda_i - \lambda_j) \|_{i,\ j=1}^{n}$, а отсюда, в силу леммы Шура, следует неотрицательность матрицы $A_\psi = \| a(\lambda_i - \lambda_j)\, \psi(\lambda_i,\ \lambda_j) \|_{i,\ j=1}^{n}$.

Заметим, что матрица A_ψ не зависит от того, как мы определяли значения $\psi(\lambda_i,\ \lambda_j)$ для $\lambda_i - \lambda_j \bar{\in} \boldsymbol{ML}$, так как для этих значений $\lambda_i - \lambda_j$ имеем $a(\lambda_i - \lambda_j) = 0$.

Так как неравенство $A_\psi \geqslant 0$ имеем место для произвольной системы (13), то функция

$$a_\psi(\lambda) = \begin{cases} a(\lambda)\,\psi(\lambda) & \lambda \in \boldsymbol{ML} \\ 0 & \lambda \in \boldsymbol{M},\ \lambda \bar{\in} L \end{cases}$$

э. п. на $\boldsymbol{M}$. Функция $a_\psi(\lambda)$ отлична от нуля лишь для конечного множества значений λ, поэтому, в силу теоремы 2, получаем $\sum a_\psi(\lambda)\, e^{i\lambda t} = \sum\limits_{(-\infty < t < \infty)} \sum a(\lambda)\, \psi(\lambda)\, e^{i\lambda t} \geqslant 0$, откуда при $t = 0$ $\sum a(\lambda)\, \psi(\lambda) \geqslant 0$. Что и требовалось доказать.

Как очевидное следствие из только что доказанной теоремы и теоремы о продолжении позитивного функционала получаем

Теорема 4. *Каждую функцию $\psi(\lambda)$, э. п. на $\boldsymbol{ML}$ ($\boldsymbol{M\bar{L}}$) можно* *доопределить вне ML ($M\overline{L}$) так, чтобы полученная функция была э. п. на своей вещественной оси.*

Теорема Бохнера. 1. Пусть f — произвольный позитивный функционал в пространстве $\boldsymbol{P}_M$. По известной теореме о продолжении позитивного функционала функционал f можно продолжить с сохранением позитивности на пространство $\boldsymbol{L}$ всех ограниченных на всей вещественной оси I функций. (Норма в $\boldsymbol{L}$ определена равенством (⋇)).

Известно, что имеет место представление $f(x) = \int\limits_I x(t)\, d\Phi(E)$, $x \in \boldsymbol{L}$ **(15)**, где $\Phi(E)$ — неотрицательная ограниченная аддитивная функция, определенная на всех множествах точек вещественной оси, причем $\|f\| = \Phi(I)$ **(16)**. Введем теперь функции $\Phi_c(E) = \lim\limits_{n\to\infty} \Phi(EI_n)$ **(17)**, где $I_n = [-n, n]$ и $\Phi_d(E) = \Phi(E) - \Phi_c(E)$ **(18)**. Как следует из определения, $\Phi_c(E)$ и $\Phi_d(E)$ являются неотрицательными ограниченными аддитивными функциями множеств и поэтому определяют два позитивных в $\boldsymbol{L}$ функционала f_c и f_d ($f_c + f_d = f$): $f_c(x) = \int\limits_I x(t)\, d\Phi_c(E)$ и $f_d(x) = \int\limits_I x(t)\, d\Phi_d(E)$. Отметим следующих два факта, вытекающих непосредственно из определений:

а) значение $f(x)$ не зависит от значений функции $x(t)$ на любом ограниченном множестве точек, $f_d(x)$ — для любой функции $x(t)$, отличной от нуля лишь на ограниченном множестве точек;

б) для любой непрерывной функции $x(t)$ из $\boldsymbol{L}$, в частности, для любой $x(t)$ из $\boldsymbol{P}$, имеет место представление $f_c(x) = \int\limits_{-\infty}^{\infty} x \times \times (t)\, d\sigma(t)$ **(19)**, где $\sigma(t)$ — неубывающая непрерывная справа функция, совпадающая в точках непрерывности с $\Phi_c([-\infty, t])$.

2. Рассмотрим непрерывную функцию $H_{MN}(t)$ (N — натуральное число), имеющую период $2MN$ и определенную в интервале $(-MN, MN)$ равенствами

$$H_{MN}(t) = \begin{cases} 1 - \frac{|t|}{M} & |t| \leqslant M \\ 0 & |t| \geqslant M \end{cases}. \tag{20}$$

Эта функция разлагается в абсолютно и равномерно сходящийся ряд Фурье:

$$H_{MN}(t) = \frac{1}{2N} \sum \frac{4N}{\nu^2\pi^2} \sin^2 \frac{\pi\nu}{2N} \cos \frac{\pi\nu t}{NM}. \tag{21}$$

Сумму nN первых членов ряда (21) обозначим через $H_{MN}^{(n)}(t)$; имеем следующую оценку для остатка:

$$|H_{MN}(t) - H_{MN}^{(n)}(t)| \leqslant H_{MN}(0) - H_{MN}^{(n)}(0) = \sum_{v=nN}^{\infty} \frac{4N}{\nu^2\pi^2} \sin^2 \times$$

$$\times \frac{\pi\nu}{2N} < \sum_{v-nN}^{\infty} \frac{4N}{\pi^2 v^2} = \frac{4N}{\pi^2} \sum_{\mu=n}^{\infty} \sum_{l=0}^{N-1} \frac{1}{(N\mu + k)^2} <$$

$$< \frac{4N}{\pi^2} \sum_{\mu=n}^{\infty} \frac{1}{\mu^2} < \frac{4}{\pi^2 (n-1)}. \tag{22}$$

Неравенство (22) показывает, что для произвольного положительного числа ε можно найти такое натуральное число n_0, что будет иметь место неравенство $|H_{MN}(t) - H_{MN}^{(n)}(t)| < \varepsilon$ **(22′)** для любых M, N и t.

3. Пусть функция $\varphi(\lambda)$ эрмитово-положительна на модуле $\boldsymbol{M}$. Пользуясь (15) и неравенством Шварца, получим (сравни с [3]), что при любых λ, $\lambda + \delta \in \boldsymbol{M}$.

$$|\varphi(\lambda + \delta) - \varphi(\lambda)| = |\int_I e^{i\lambda t}(e^{i\delta t} - 1)\, d\Phi(E)| \leqslant \Big\{\int_I d\Phi(E) \times$$

$$\times \int_I |e^{i\delta t} - 1|^2 d\Phi(E)\Big\}^{1/2} = \Big\{2\varphi(0) \int_I \Big(1 - \cos\delta t\Big)\, d\Phi(t)\Big\}^{1/2} =$$

$$= \sqrt{2\varphi(0)\{\varphi(0) - \mathrm{Re}\,\varphi(\delta)\}},$$

так что $|\varphi(\lambda + \delta) - \varphi(\lambda)| \leqslant \sqrt{2\varphi(0)\{\varphi(0) - \mathrm{Re}\,\varphi(\delta)\}}$ **(23)**. Полученное неравенство показывает, что из непрерывности функции φ на $\boldsymbol{M}$ в точке O следует ее равномерная непрерывность на всем $\boldsymbol{M}$. Заметим, что оценку (23) можно получить непосредственно (минуя интегральное представление функции φ) из неравенства $|\varphi(\lambda_j - \lambda_k)|_{j,\,k=1}^{3} \geqslant 0$ при $\lambda_1 = 0$, $\lambda_2 = \delta$, $\lambda_3 = \lambda + \delta$.

4. Рассмотрим непрерывную функцию $\psi(\lambda)$, э. п. на I. Для простоты будем считать $\psi(0) = 1$.

Пусть ω_0 — сколь угодно малое положительное число. Выберем n_0 так, чтобы неравенство (22′) выполнялось для $\varepsilon = \frac{\omega_0}{3}$. Далее положим $M_0 = \pi n_0/\delta_0$ **(24)**, где положительное число δ_0 выбрано таким, что из неравенства $|\lambda| < \delta_0$ следует $\mathrm{Re}\,\psi(\lambda) > 1 - \frac{\omega_0}{8}$ **(24′)**. Тогда имеем для всех натуральных N,

$$f(H_{M_0 N}) = \frac{1}{2N} + \sum_{v=1}^{nN-1} \frac{4N}{\nu^2\pi^2} \sin^2 \frac{\pi\nu}{2N} \mathrm{Re}\,\psi\left(\frac{\pi\nu}{NM_0}\right) +$$

$$= \sum_{\nu-nN}^{\infty} \frac{4N}{\nu^2\pi^2} \sin^2 \frac{\pi\nu}{2N} \mathrm{Re}\,\psi\left(\frac{\pi\nu}{NM_0}\right) > \left(1 - \frac{\omega_0}{3}\right)^2 - \frac{\omega_0}{3} > 1 - \omega_0.$$

Таким образом, полагая $\inf\limits_{N} f(H_{M_0N}) = h(M_0)$, получаем $h(M_0) > > 1 - \omega_0$.

Обозначим теперь через $H_{M_0}(t)$ функцию, совпадающую с $H_{M_0N}(t)$ в интервале $[-M_0, M_0]$ и равную нулю вне этого интервала. Покажем, что, полагая $f(H_{M_0}) = h(M_0)$, получим позитивное продолжение функционала f на $\boldsymbol{P} + \{H_{M_0}\}$, а для этого, в свою очередь, достаточно доказать, что для любого почти периодического полинома $x(t)$, удовлетворяющего неравенству $x(t) \geqslant H_{M_0}(t)$ **(25)**, имеет место неравенство $f(x) \geqslant h(M_0)$ **(25′)**.

Пусть

$$x(t) = \sum_{\nu=1}^{n} a_\nu e^{it} \sum_{\mu=1}^{m} n_{\mu\nu}\Lambda_\mu,$$

где $n_{\mu\nu}$ — целые числа; Λ_μ — вещественные линейно независимые числа.

Для произвольного положительного числа ε, в силу непрерывности функции $\psi(\lambda)$, можем найти такое натуральное число N и также целые числа $N_1, \ldots, N_n$, что периодический полином

$$\tilde{x}(t) = \sum_{\nu=1}^{N} a_\nu e^{\frac{i\pi t}{\mu N}} \sum n_{\mu\nu} N_\mu,$$

имеющий период $2MN$, будет удовлетворять следующим условиям: 1) $\tilde{x}(t) > x(t) - \varepsilon$, $|t| \leqslant M$; 2) $f(x) > f(\tilde{x}) - \varepsilon$.

Кроме того, так как область изменения $\tilde{x}(t)$ является частью замыкания области изменения $x(t)$, то в силу (24) имеет место неравенство $\tilde{x}(t) \geqslant 0$, $(-\infty < t < \infty)$ **(26)**. Неравенства (25), (25′) и (26) дают $\tilde{x}(t) - \varepsilon > H_{MN}(t)$, $-\infty < t < \infty$, откуда $f(\tilde{x}) + \varepsilon > > f(H_{MN}) \geqslant h(M_0)$, или, в силу 2) $f(x) > h(M_0) - 2\varepsilon$. Так как ε произвольно, то из последнего неравенства следует неравенство (25′); этим позитивность произведенного расширения функционала f доказана.

Продолжим теперь с сохранением позитивности функционал f пространства $\boldsymbol{P} + \{H_M\}$ на $\boldsymbol{L}$; как было показано в § 1, функционал f можно представить в виде суммы двух позитивных функционалов f_c^1 и f_d^1, $(\|f_c^1\| + \|f_d^1\| = \|f\|)$, первый из которых на всех ограниченных непрерывных функциях выражается при помощи интеграла Стилтьеса: $f_c(x) = \int\limits_{-\infty}^{\infty} x(t)\, d\sigma_1(t)$, $\sigma_1(-\infty) = 0$, $\sigma_1(\infty) \leqslant \leqslant 1$, а второй обращается в нуль на всех функциях из $\boldsymbol{L}$, отличных от нуля лишь на ограниченном множестве точек. Поэтому имеем $h(M_0) = f_c^1(H_{M_0})$, откуда следует, что $\|f_d^{(1)}\| < \omega_0$. Э. п. функция $f_d^{(1)}(e^{i\lambda t}) = \psi(\lambda) - \int\limits_{-\infty}^{\infty} e^{i\lambda t} d\sigma_1(t)$, являющаяся разностью двух непрерывных функций, непрерывна, поэтому к ней применимы предыдущие рассуждения. Таким образом, получаем последовательно $f_d^{(1)}(e^{i\lambda t}) = \int\limits_{-\infty}^{\infty} e^{i\lambda t} d\sigma_2(t) + f_d^{(2)}(e^{i\lambda t})$; $\sigma_2(-\infty) = 0$, $\sigma_2 \times \times (\infty) < \omega_0$, $\| f_d^{(2)} \| < \omega_0^2$; $f_d^{(2)}(e^{i\lambda t}) = \int\limits_{-\infty}^{\infty} e^{i\lambda t} d\sigma_3(t) + f_d^{(3)}(e^{i\lambda t})$; $\sigma_3 \times \times (-\infty) = 0$, $\sigma_3(\infty) < \omega_0^2$, $\| f_d^{(3)} \| < \omega_0^3$ и т. д. Следовательно, $\psi(\lambda) = \int\limits_{-\infty}^{\infty} e^{i\lambda t} d\sigma(t)$ **(27)**, где $\sigma(t) = \sum\limits_{n=1}^{\infty} \sigma_n(t)$ **(27′)**.

Легко видеть, что существует только одна неубывающая непрерывная справа и удовлетворяющая условию $\sigma(-\infty) = 0$ функция, являющаяся решением уравнения (27), следовательно, $\sigma(t)$ в (27) не зависит от выбора ω_0.

Таким образом, доказали следующую теорему, принадлежащую С. Бохнеру.

Теорема 5. *Для каждой непрерывной э. п. функции* $\psi(\lambda)$ *существует одна и только одна неубывающая непрерывная справа функция* $\sigma(t)$ $(\sigma(-\infty) = 0)$, *такая, что имеет место равенство*

$$\psi(\lambda) = \int\limits_{-\infty}^{\infty} e^{i\lambda t} d\sigma(t).$$

5. Сделаем несколько замечаний, которые понадобятся в дальнейшем:

а) из (27′) следует, что при произвольном ω_0 имеет место неравенство $\sigma_1(t_2) - \sigma_1(t_1) \leqslant \sigma(t_2) - \sigma_1(t_1)$ для произвольных t_1, t_2, $t_1 < t_2$. Но так как $h(M_0) = \int\limits_{-\infty}^{\infty} H_{M_0}(t)\, d\sigma(t)$ является наибольшим возможным значением продолженного функционала f на $H_{M_0}(t)$, то $\sigma_1(t)$ и $\sigma_2(t)$ с точностью до аддитивной константы совпадают на интервале $[-M_0, M_0]$;

б) из а) и из неравенства $h(M_0) > 1 - \omega_0$ следует, что $\sigma(M_0) - \sigma(-M_0) > 1 - \omega_0$ **(28)**;

в) пусть $\{\psi(\lambda)\}$ — некоторое семейство э. п. функций, $\{\sigma(t)\}$ — семейство отвечающих им неубывающих функций. Если все $\psi(\lambda)$ равностепенно непрерывны в точке нуль и принимают в ней одно и то же значение, то, как следует из (22), (24), (24′), для каждого положительного ω можно найти такое M, что оценка (28) будет иметь место для всех функций семейства $\{\sigma(t)\}$,

6. Из теорем 4 и 5 непосредственно вытекает следующее предложение М. Г. Крейна.

Теорема 6. *Если непрерывная функция* $\psi(\lambda)$ *э. п. на интервале* $[-1, 1]$, *то существует, по крайней мере, одна неубывающая функция* $\sigma(t)$, *удовлетворяющая уравнению* $\int\limits_{-\infty}^{\infty} e^{i\lambda t} d\sigma(t) =$

$=\psi(\lambda)$ **(29).** Множество всех решений $\sigma(t)$ уравнения (29) будем обозначать $\sum_0$.

Из теоремы 6 следует, что функция $\psi(\lambda)$ является характеристической функцией некоторого функционала f, позитивного в пространстве $\boldsymbol{P}_1$ всех почти периодических функций, показатели Фурье которых принадлежат $[-1, 1]$.

Пусть теперь $y(t)$ — непрерывная ограниченная вещественная функция (можем считать, что $\|y\|=1$), не принадлежащая $\boldsymbol{P}_1$. Формула $f(x)=\int\limits_{-\infty}^{\infty} x(t)\,d\sigma(t)$, $\sigma\in\sum_0$, $x\in \boldsymbol{P}_1+\{y\}$ **(30)** определяет некоторое позитивное продолжение функционала f с $\boldsymbol{P}_1$ на $\boldsymbol{P}_1+\{y\}$.

Однако формула (30) не позволяет получить все позитивные продолжения функционала f с $\boldsymbol{P}_1$ на $\boldsymbol{P}_1+\{y\}$.

Как известно, любое позитивное продолжение функционала f с $\boldsymbol{P}_1$ на $\boldsymbol{P}_1+\{y\}$ может быть получено следующим образом. Полагаем $f(y)=\eta$, где η — произвольное число, удовлетворяющее неравенствам $\underline{\eta}\leqslant\eta\leqslant\overline{\eta}$,

где
$$\underline{\eta}=\sup_{x'(t)<y(t),\ x'\in \boldsymbol{P}_1} f(x')\ ;\quad \overline{\eta}=\inf_{x''\geqslant y,\ x''\in \boldsymbol{P}_1} f(x'')$$

(из позитивности функционала f на P_1 следует, что $\underline{\eta}\leqslant\overline{\eta}$).

Рассмотрим теперь следующий класс позитивных продолжений функционала f с P_1 на $P_1+\{y\}$ (назовем их B-продолжениями). Обозначим через $K(A;\ B)$ множество всех функций $x(t)$ из P_1 таких, что $\|x\|\leqslant B$ и $x(t)\geqslant y(t)$ для $|t|<A$. Аналогично обозначим через $\overline{k}(A;\ B)$ множество всех $x\in P_1$ таких, что $\|x\|\leqslant B$ и $x(t)\geqslant y(t)$ для $|t|<A$.

Далее положим $\sup\limits_{x\in \boldsymbol{K}(A;\ B)} f(x)=\boldsymbol{k}(A;\ B)$ и $\inf\limits_{x\in\overline{k}(A;\ B)} f(x)=\overline{k}(A;\ B)$.

Очевидно, с ростом A, $\boldsymbol{k}(A;\ B)$ не возрастают, а $\overline{k}(A;\ B)$ — не убывают; поэтому существуют пределы $\boldsymbol{k}(B)=\lim\limits_{A\to\infty}\boldsymbol{k}(A;\ B)$ и $\overline{k}(B)=\lim\limits_{A\to\infty}\overline{k}(A;\ B)$. С ростом B $\boldsymbol{k}(B)$ не убывают, а $\overline{k}(B)$ — не возрастают. Кроме того, из замечания в) предыдущего параграфа следует, что для любого B $\boldsymbol{k}(B)\leqslant\overline{k}(B)$. Следовательно, существуют пределы $\boldsymbol{k}=\lim\limits_{B\to\infty}\boldsymbol{k}(B)$ и $\overline{k}=\lim\limits_{B\to\infty}\overline{k}(B)$, причем $\eta\leqslant\boldsymbol{k}\leqslant\overline{k}\leqslant\overline{\eta}$.

Под B-продолжением функционала f на $\boldsymbol{P}_1+\{y\}$ будем понимать такое продолжение, при котором $\boldsymbol{k}\leqslant f(y)\leqslant\overline{k}$.

Докажем, что каждое B-продолжение совпадает с некоторым продолжением, определяемым при помощи формулы (30). Так как обратное утверждение (каждое продолжение при помощи формулы (30) является B-продолжением) очевидно, то в доказательстве нуждается только тот случай, когда $\boldsymbol{k} < \bar{k}$. Допустим сперва, что $\boldsymbol{k} < f(y) < \bar{k}$. Введем функцию $\theta_A(t)$, определяемую равенствами

$$\theta_A(t) = \begin{cases} 1, & t \leqslant A \\ 0, & -A < t < A \\ 1, & t > A, \end{cases}$$

и покажем, что для достаточно большого A существует такое позитивное продолжение функционала f с $P_1 + \{y\}$, при котором $f(\theta_A)$ меньше любого наперед заданного положительного числа.

Пусть ε — произвольное положительное число. Возьмем произвольное число b, $b > 1$ и положим B_0 равным наибольшему из чисел $\frac{\varepsilon}{3}$, $\sup \frac{3}{\varepsilon} \| x \|$, $\inf \| ay + x \| \leqslant b$, $x \in \boldsymbol{P}_1$, $-\infty < a < \infty$.

Выберем далее положительное число A_0 так, чтобы выполнялись неравенства $\boldsymbol{k}(A_0;\ B_0) < f(y) < \bar{k}(A_0;\ B_0)$ и $(B_0 + \varepsilon)\{\sigma \times \times (-A_0) - \sigma(-\infty) + \sigma(\infty) - \sigma(A_0)\} < \frac{\varepsilon}{3}$, $\sigma \in \sum_0$.

Чтобы продолжение функционала f с $P_1 + \{y\}$ на $P_1 + \{y\} + \{\theta_A\}$ было позитивным, необходимо и достаточно, чтобы имели место неравенства $\underline{\theta}_A \leqslant f(\theta_A) \leqslant \bar{\theta}_A$, где $\theta_A = \sup\limits_{x(t)+ay(t)<\theta_A(t)} f(x + ay)$; $\bar{\theta}_A = \inf\limits_{x(t)+ay(t)\geqslant\theta_A(t)} f(x + ay)$ $(x \in P_1)$. Очевидно, $\bar{\theta}_{A_0} \geqslant 0$. С другой стороны, $\theta_{A_0} \leqslant \theta^*_{A_0}$, где $\theta^*_{A_0} = \sup f(x + ay)\,(x(t) + ay(t) \leqslant \theta_{A_0}(t))$ для $|t| < A_0$ и $\| x + ay \| \leqslant b$. Оценим θ^*_A сверху. Для чего рассмотрим отдельно три случая.

1. $|a| < \frac{\varepsilon}{3}$, тогда $f(x + ay) < \frac{\varepsilon}{3} + (B_0 + \varepsilon).\ \{1 - [\sigma(A_0) - \sigma \times \times (-A_0)]\} + \frac{\varepsilon}{3} \cdot \| y \| < \varepsilon$. 2. $a > \frac{\varepsilon}{3}$, в этом случае имеем $x(t) + ay(t) \leqslant 0$, $|t| < A_0$, т. е. $y(t) \leqslant -\frac{1}{a} x(t)$, $|t| < A_0$ и $\left\| \frac{1}{a} x \right\| \leqslant B_0$. Следовательно, $f(x + ay) \leqslant 0$. 3. $a < -\frac{\varepsilon}{3}$; аналогично 2 получаем $f(x + ay) \leqslant 0$.

Таким образом, $\theta^*_{A_0} < \varepsilon$ и тем более $\theta_{A_0} < \varepsilon$.

Следовательно, существует такое позитивное продолжение функционала f с $\boldsymbol{P}_1 + \{y\}$ на $\boldsymbol{P}_1 + \{y\} + \{\theta_{A_0}\}$, что $0 \leqslant f(\theta_{A_0}) < \varepsilon$.

Распространим теперь f на $\boldsymbol{L}$. Тогда $\| f_d^{(0)} \| < \varepsilon$, $\| f_c^{(0)} \| > 1 - \varepsilon$, где $f_c^{(0)}(x) = \int\limits_{-\infty}^{\infty} x(t)\, d\sigma_0(t)$, $x \in \boldsymbol{P}_1 + \{y\}$.

Возьмем сходящуюся к нулю последовательность ε_n, построим отвечающие ей последовательности $\{f_d^{(n)}\}$, $\{f_c^{(n)}\}$, $\sigma_n(t)$ и положим

$\psi^{(n)}(\lambda) = \int\limits_{-\infty}^{\infty} e^{i\lambda t}\, d\sigma_n(t)$. Так как $|\psi(\lambda) - \psi^{(n)}(\lambda)| < \varepsilon_n$, а $\psi(\lambda)$ — непрерывна, то для любого $\varepsilon > 0$ существуют такие $\delta(\varepsilon)$ и $n(\varepsilon)$, что $|\psi^{(n)}(\lambda) - 1| < \varepsilon$, $|\lambda| < \delta(\varepsilon)$ и $n > n(\varepsilon)$. Отсюда следует, что для любого $\omega > 0$ найдутся такие $n(\omega)$ и $M(\omega)$, что оценка (28) будет иметь место для всех $n > n(\omega)$ и, следовательно, из $\{\sigma_n(t)\}$ можно выбрать последовательность, сходящуюся в основном к неубывающей функции $\sigma(t)$, что $f(x) = \int\limits_{-\infty}^{\infty} x(t)\, d\sigma(t)$, $x \in \boldsymbol{P}_1 + \{y\}$.

До сих пор предполагали, что значение $f(y)$ удовлетворяет неравенствам $\boldsymbol{k} < f(y) < \bar{k}$. Если же имеет место равенство $f(y) = \boldsymbol{k}$ $(f(y) = \bar{k})$, то для доказательства нашего утверждения достаточно рассмотреть последовательность продолжений $\{f(y_n) = \eta_n\}$, где все значения η_n лежат между $\boldsymbol{k}$ и $\bar{k}$ и стремятся к $\boldsymbol{k}$ $(\bar{k})$, и снова воспользоваться теоремами Гелли.

7. В предыдущем параграфе числа $\boldsymbol{k}$ и $\bar{k}$ были определены при помощи двух множеств $\boldsymbol{K}(A;\ B)$ и $\overline{K}(A;\ B)$, состоящих из всех функций из $\boldsymbol{P}_1$, удовлетворяющих некоторым неравенствам. Однако из непрерывности $\psi(\lambda)$ следует, что придем к тем же числам $\boldsymbol{K}(A;\ B)$ и $\overline{K}(A;\ B)$, если будем исходить не из $\boldsymbol{K}(A;\ B)$ и $\overline{K}(A;\ B)$, а из подмножеств $\boldsymbol{K}^*(A;\ B)$ и $\overline{K}^*(A;\ B)$, состоящих из всех полиномов с рациональными показателями Фурье, содержащихся соответственно в $\boldsymbol{K}(A;\ B)$ и $\overline{K}(A;\ B)$.

Выберем далее сходящуюся к нулю последовательность положительных чисел ε_n и неограниченно возрастающую последовательность $\{B_\nu\}$; выберем натуральное число h_ν и кратное π положительное число M_ν так, чтобы было $\frac{\pi h_\nu}{M_\nu} < 1$ и $f(1 - H^{(h_\nu)}_{M_\nu N}) < \frac{\varepsilon_\nu}{B_\nu} N = 1,\ 2,\ \ldots$

Возьмем из $\boldsymbol{K}^*(M_\nu;\ B_\nu)$ функцию $x'_\nu(t)$ а из $\overline{K}^*(M_\nu;\ B_\nu)$ — функцию $x''_\nu(t)$ так, чтобы выполнялись неравенства $|f(x'_\nu) - \boldsymbol{k}(B_\nu)| < \varepsilon_\nu u\, |f(x''_\nu) - \bar{k}(B_\nu)| < \varepsilon_\nu$.

Наконец, выберем N_ν так, чтобы $2M_\nu N_\nu$ было кратным периодам функций $x'_\nu(t)$ и $x''_\nu(t)$.

Тогда периодические полиномы $x'^*_\nu(t) = x'_\nu(t) - B_\nu\{1 - H^{(h_\nu)}_{M_\nu N_\nu}(t)\}$ и $x''^*_\nu(t) = x''_\nu(t) + B_\nu\{1 - H^{(h_\nu)}_{M_\nu N_\nu}(t)\}$, как легко видеть, обладают следующими свойствами: 1. $x'^*_\nu(t) \leqslant x''^*_\nu(t)$, $-\infty < t < \infty$; $\nu = 1,\ 2,\ \ldots$; 2. $x'^*_\nu(t) \leqslant y(t) \leqslant x''^*_\nu(t)$, $|t| < M_\nu\,(\lim\limits_{\nu\to\infty} \times$

$\times M_\nu = \infty$); 3. $x_\nu^{\prime *}(t) \leqslant \sup \underline{y}(t)$; $x_\nu^{\prime\prime *}(t) \geqslant \inf y(t)$; $\nu = 1, 2, \ldots$; 4. $\lim\limits_{\nu \to \infty} f(x_\nu^{\prime *}) = \boldsymbol{k}$, $\lim\limits_{\nu \to \infty} f(x_\nu^{\prime *}) = \overline{k}$. Они будут использованы во второй части работы.

Список литературы; 1. *Артеменко А. П.* О позитивных линейных функционалах в пространстве почти периодических функций. — Зап. НИИ математики и механики Харьк. гос. ун-та, 1940, **16**, с. 111—114. 2. *Райков Д. А.* О положительно-определенных функциях. — Докл. АН СССР, 1940, **26**, № 9, с. 857—862. 3. *Крейн М. Г.* Об одном кольце функции, определенных на топологической группе. — Докл. АН СССР, 1940, **26**, № 1, с. 275—280. 4. *Крейн М. Г.* О проблеме продолжения непрерывных эрмитово-положительных функций. — Докл. АН СССР, 1940, **26**, 1, с. 17—21. 5. *Артеменко А. П.* Новое доказательство двух теорем С. Бохнера. — Тр. Омского гос. ун-та, 1941, 3. с. 123—134. 6. Riesz M, Sur le probleme des moments. III. — Arkiv for matematik, astronomi och fysik, 1923, 17, p. 15—189.

Поступила в редколлегию 24.11.82.