УДК 517.9

Е. И. ТАРАПОВА

N-СОЛИТОННЫЕ РЕШЕНИЯ ОДНОЙ НЕЛИНЕЙНОЙ СИСТЕМЫ УРАВНЕНИЙ

Рассмотрим нелинейную систему дифференциальных уравнений $\frac{\partial^2}{\partial x\,\partial t}U_s = \exp(U_s - U_{s-1}) - \exp(U_{s+1} - U_s)$, $U_s = U_s(x, t) = U_{s+M}(x, t)$, $s = 0, 1, \ldots, M-1$, являющуюся, с одной стороны, обобщением уравнения Sine-Gordon [1] и с другой — обобщением уравнений для цепочки Тодда [2, 3]. Цель настоящей работы — отыскать N-солитонные решения этой системы уравнений.

Обозначим через $Б$ банахову алгебру над полем вещественных чисел, элементы которой в дальнейшем называются операторами. Рассмотрим гладкое отображение Γ двумерного евклидова пространства R^2 в алгебру $Б$. Точки пространства R^2 обозначим через (x, t), а образ точки $(x, t) \in R^2$ при отображении Γ через $\Gamma(x, t)$. Зафиксируем некоторый автоморфизм β алгебры $Б$, т. е. такое отображение $Б$ на себя, что $\beta(AC) = \beta(A)\beta(C)$, $\beta(xA + yC) = x\beta(A) + y\beta(C)$, $\|\beta(A)\| \leqslant |\beta|\,\|A\|$, $\|\beta^{-1}(C)\| \leqslant |\beta|^{-1}\|C\|$, где A, C — произвольные операторы из $Б$; x, y — произвольные вещественные числа и $|\beta| < \infty$, $|\beta|^{-1} < \infty$.

Лемма. *Пусть отображение* $\Gamma : R^2 \to Б$ *удовлетворяет следующим условиям:*

1) $\frac{\partial\Gamma(x, t)}{\partial x} = A\beta(\Gamma(x, t))$; $\frac{\partial\Gamma(x, t)}{\partial t} = \beta^{-1}(A^{-1}\Gamma(x, t))$, где A — *произвольный обратимый оператор из алгебры* $Б$; 2) *существует открытое множество* $G \subset R^2$ такое, что *при всех* $x, t \in G$ *операторы* $\Gamma(x, t)$ обратимы. Определим операторнозначную функцию $X = X(x, t)$ равенством

$$X = (\Gamma(x, t))^{-1}\left(\frac{\partial}{\partial x}\Gamma(x, t)\right), \ (x, t) \in G. \tag{1}$$

Тогда при всех $(x, t) \in G$ операторы $X = X(x, t)$ обратимы и удовлетворяют уравнению

$$\frac{\partial}{\partial t}\left(X^{-1}\frac{\partial}{\partial x}X\right) = \beta^{-1}(X^{-1})X - X^{-1}\beta(X). \tag{2}$$

Доказательство. Согласно (1) и свойствам 1), 2) $X = \Gamma^{-1}A\beta(\Gamma)$ **(3)**, откуда следует, что при $(x, t) \in G$ операторы $X = X(x, t)$ обратимы и $X^{-1} = \{\beta(\Gamma)\}^{-1}A^{-1}\Gamma$ **(4)**.

Дифференцируя равенство (3) по переменным x, t, получим, согласно 1), 2) и (1): $X' = -\Gamma^{-1}\Gamma'\Gamma^{-1}A\beta(\Gamma) + \Gamma^{-1}A\beta(\Gamma') = -X^2 + \Gamma^{-1}A\beta(\Gamma X) = -X^2 + \Gamma^{-1}A\beta(\Gamma)\beta(X) = X(-X + \beta(X))$; $\dot{X} = -\Gamma^{-1}\dot{\Gamma}\Gamma^{-1}A\beta(\Gamma) + \Gamma^{-1}A\beta(\dot{\Gamma}) = -\Gamma^{-1}\beta^{-1}(A^{-1}\Gamma)\Gamma^{-1}A\beta(\Gamma) + \Gamma^{-1}A\beta \times (\beta^{-1}(A^{-1}\Gamma)) = -\Gamma^{-1}\beta^{-1}(A^{-1}\Gamma)X + I$, где штрихом и точкой обозначены соответственно производные по x, t, а $I \in Б$ единичный оператор. Поэтому $X^{-1}X' = -X + \beta(X)$, $\frac{\partial}{\partial t}(X^{-1}X') = -\dot{X} + \beta(\dot{X}) = \Gamma^{-1}\beta^{-1}(A^{-1}\Gamma)X - I + I - \beta(\Gamma^{-1}\beta^{-1}(A^{-1}\Gamma)X) = \Gamma^{-1}\beta^{-1} \times (\beta(\Gamma)X^{-1})X - \{\beta(\Gamma)\}^{-1}A^{-1}\Gamma\beta(X) = \Gamma^{-1}\Gamma\beta^{-1}(X^{-1})X - X^{-1}\beta(X)$, т. е. $\frac{\partial}{\partial t}(X^{-1}X') = \beta^{-1}(X^{-1})X - X^{-1}\beta(X)$, что и требовалось доказать.

Замечание. Поскольку уравнение (2) не зависит от выбора оператора A, то формула (1) дает семейство решений этого уравнения, зависящее от одного операторного параметра A.

Рассмотрим теперь случай, когда $Б$ алгебра квадратных матриц порядка NM и автоморфизм β задается равенствами $\beta(X) = B^{-1}XB$; $\beta^{-1}(X) = BXB^{-1}$, где B — блочно-диагональная матрица вида $B = (\underbrace{b, b, \ldots, b}_{N})$; $b = (b_{nm})_{n, m=1}^{M}$. Здесь и далее диагональная матрица с элементами $d_1, d_2, \ldots, d_l$ на главной диагонали для краткости обозначается через $(d_1, d_2, \ldots, d_l)$. Пусть

$$\Gamma = \begin{pmatrix} \gamma_1^{(N-1)} & \gamma_1^{(N-2)} & \cdots & \gamma_1 \\ \gamma_2^{(N-1)} & \gamma_2^{(N-2)} & \cdots & \gamma_2 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \gamma_N^{(N-1)} & \gamma_N^{(N-2)} & \cdots & \gamma_N \end{pmatrix}, \tag{5}$$

где $\gamma_r = \gamma_r(x, t)$ — квадратные матрицы порядка M и $\gamma_r^{(p)} = \frac{\partial^p}{\partial x^p}\gamma_r(x, t)$. Если в условии 1) матрицу A выбрать диагональной, т. е. $A = (a^{(1)}, a^{(2)}, \ldots, a^{(N)})$, $a^{(r)} = (a_{ls}^{(r)})_{l, s=1}^{M}$, то для того, чтобы операторнозначная функция $\Gamma(x, t)$ удовлетворяла условию 1), необходимо и достаточно, чтобы матрицы $\gamma_r(x, t)$ удовлетворяли равенствам

$$1')\ \gamma_r' = a^{(r)}b^{-1}\gamma_r b;\ \dot{\gamma}_r = b(a^{(r)})^{-1}\gamma_r b^{-1}. \tag{6}$$

Заметим теперь, что матрица $\Gamma(x, t)$ вида (5) удовлетворяет равенству

$$\Gamma'(I - P) = \Gamma Q, \tag{7}$$

где

$$P = \begin{pmatrix} I_M & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \dots & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & \dots & \dots & 0 \end{pmatrix} \quad Q = \begin{pmatrix} 0 & I_M & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & I_M & 0 \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & \dots & \dots & \dots & I_M \\ 0 & \dots & \dots & \dots & 0 \end{pmatrix}$$

и I_M — единичная матрица порядка M.

Поэтому в рассматриваемом случае $X = \Gamma^{-1}\Gamma' = \Gamma^{-1}\Gamma'(I - P) + \Gamma^{-1}\Gamma' P = XP + Q$, и следовательно, матрица X имеет такой вид:

$$X = \begin{pmatrix} X_1 & I_M & 0 & \dots & \dots & 0 \\ X_2 & 0 & I_M & 0 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ X_N & 0 & \dots & \dots & \dots & 0 \end{pmatrix}, \tag{8}$$

а X^{-1} (если она существует) такой:

$$X^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \dots & 0 & X_N^{-1} \\ I_M & 0 & \dots & 0 & -X_1 X_N^{-1} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & \dots & \dots & I_M & -X_{N-1} X_N^{-1} \end{pmatrix}. \tag{9}$$

Поэтому

$$PX^{-1}X'P = \begin{pmatrix} X_N^{-1} X_N' & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \dots & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & \dots & \dots & 0 \end{pmatrix}$$

и $P\beta^{-1}(X^{-1}) XP - PX^{-1}\beta(X) P = PBX^{-1}B^{-1}XP - PX^{-1}B^{-1}XBP =$

$$= \begin{pmatrix} bX_N^{-1} b^{-1} X_N - X_N^{-1} b^{-1} X_N b & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \dots & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & \dots & \dots & 0 \end{pmatrix}.$$

Следовательно, умножая уравнение (2) слева и справа на P находим, что матрица M-го порядка X_N удовлетворяет аналогичному уравнению:

$$\frac{\partial}{\partial t}(X_N^{-1} X_N') = bX_N^{-1} b^{-1} X_N - X_N^{-1} b^{-1} X_N b. \tag{10}$$

Заметим, что при таком выборе матриц A, B, Γ мы из уравнения (2), справедливого для полной матрицы порядка NM, пришли к аналогичному уравнению для матрицы M-го порядка. Наконец, если положить

$$a^{(r)} = \lambda_r I_M; \quad b = \begin{pmatrix} 0 & \dots & \dots & 0 & 1 \\ 1 & 0 & \dots & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & \dots & \dots & 1 & 0 \end{pmatrix}; \quad b^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & \dots & \dots & \dots & 1 \\ 1 & 0 & \dots & \dots & 0 \end{pmatrix}, \tag{11}$$

то равенствам (6) будут удовлетворять диагональные матрицы $\gamma_r(x, t) = (f_0(\lambda_r, x, t), \ldots, f_{M-1}(\lambda_r, x, t))$, где

$$f_s(\lambda_r, x, t) = \sum_{k=0}^{M-1} \varepsilon_k^s \exp(\lambda_r \varepsilon_k x + \lambda_r^{-1} \varepsilon_k^{-1} t + c_k(r)) \qquad (12)$$

и $\varepsilon_k = \exp \frac{2\pi i}{M} k$ — корни M-й степени из единицы. При этом матрицы X_l тоже будут диагональными:

$$X_l = (y_0^{(l)}(x, t), y_1^{(l)}(x, t), \ldots, y_{M-1}^{(l)}(x, t)). \qquad (13)$$

В частности, полагая

$$U_s = U_s(x, t) = \ln y_s^{(N)}(x, t), \ s = 0, 1, \ldots, M-1, \qquad (14)$$

находим, что

$$\begin{aligned} X_N &= (\exp U_0, \exp U_1, \ \ldots, \exp U_{M-1}); \\ X_N^{-1} &= (\exp(-U_0), \ \exp(-U_1), \ \ldots, \exp(-U_{M-1})). \end{aligned} \qquad (15)$$

Из (11) и (14) следует, что $bX_N^{-1}b^{-1} = (\exp(-U_{M-1}), \ \exp(-U_0), \ldots, \exp(-U_{M-2}))$; $b^{-1}X_N b = (\exp(+U_1), \ \exp(+U_2), \ldots, \exp(+U_{M-1}), \exp(+U_0))$. Таким образом, уравнение (10) примет вид

$$\frac{\partial^2}{\partial t\, \partial x}(U_0, U_1, \ldots, U_{M-1}) = -(\exp(-U_0 + U_1), \exp(-U_1 + U_2), \ldots, \exp(-U_{M-1} + U_0)) - (\exp(-U_{M-1} + U_0), \quad \exp(-U_0 + U_1), \ \ldots, \exp(-U_{M-2} + U_{M-1}))$$

или

$$\frac{\partial^2}{\partial x\, \partial t} U_s(x, t) = \exp(U_s - U_{s-1}) - \exp(U_{s+1} - U_s), \qquad (16)$$

где положено $U_{s+M}(x, t) = U_s(x, t)$. Семейство решений системы (16) зависит от N параметров λ_r и $N(M-1)$ параметров $[c_k(r) - c_0(r)]$ ($r = 1, \ldots, N$; $k = 1, \ldots, M-1$), т. е. в общей сложности от NM параметров. Из (1), (5), (8) следует, что в рассматриваемом случае матрицы $X_k(x, t)$ находятся из системы уравнений $\sum_{k=1}^{N} \gamma_s^{(N-k)}(x, t) X_k(x, t) = \gamma_s^{(N)}(x, t)$ ($s = 1, 2, \ldots, N$).

Так как матрицы $\gamma_s^{(N-k)}$ диагональны, то диагональные элементы $y_s^{(k)}(x, t)$ матриц $X_k(x, t)$ находятся из таких систем линейных уравнений:

$$f_s^{(N)}(\lambda_r, x, t) = \sum_{k=1}^{N} f_s^{(N-k)}(\lambda_r, x, t)\, y_s^{(k)}(x, t) \ r = 1, 2, \ldots, N; s = 0, 1, \ldots, M-1. \qquad (17)$$

Обозначим через $F_s = F_s(x, t)$ матрицу s-й системы, т. е.

$$F_s = \begin{pmatrix} f_s^{(N-1)}(\lambda_1, x, t) & f_s^{(N-2)}(\lambda_1, x, t), & \ldots, & f_s(\lambda_1, x, t) \\ f_s^{(N-1)}(\lambda_2, x, t) & f_s^{(N-2)}(\lambda_2, x, t), & \ldots, & f_s(\lambda_2, x, t) \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ f_s^{(N-1)}(\lambda_N, x, t) & f_s^{(N-2)}(\lambda_N, x, t), & \ldots & f_s(\lambda_N, x, t) \end{pmatrix} \qquad (18)$$

и заметим, что $F'_s(I-p)=F_s q$, где матрицы N-го порядка p и q имеют такой вид:

$$p=\begin{pmatrix}1 & 0 & \dots & 0\\ 0 & & \dots & 0\\ \dots & \dots & \dots & \dots\\ 0 & \dots & \dots & 0\end{pmatrix}\quad q=\begin{pmatrix}0 & 1 & 0 & \dots & \dots & 0\\ 0 & 0 & 1 & 0 & \dots & 0\\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots\\ 0 & \dots & \dots & \dots & \dots & 1\\ 0 & \dots & \dots & \dots & \dots & 0\end{pmatrix}.$$

Тогда $F_s^{-1}F'_s=q+F_s^{-1}F'_s p$ и согласно (17)

$$F_s^{-1}F'_s=\begin{pmatrix}y_s^{(1)}(x,t) & 1 & 0 & \dots & \dots & 0\\ y_s^{(2)}(x,t) & 0 & 1 & 0 & \dots & 0\\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots\\ y_s^{(N)}(x,t) & 0 & \dots & \dots & \dots & 0\end{pmatrix}. \tag{19}$$

Отсюда

$$y_s^{(N)}(x,t)=(-1)^{N+1}\det(F_s^{-1}F'_s). \tag{20}$$

С другой стороны, так как функции $f_s(\lambda_r, x, t)$, определенные соотношениями (17) связаны между собой так, что

$$f_{s+1}(\lambda_r, x, t)=\lambda_r^{-1}f'_s(\lambda_r, x, t), \tag{21}$$

то

$$F_{s+1}(x,t)=(\lambda_1^{-1}, \dots, \lambda_N^{-1})\,F'_s(x,t) \tag{22}$$

и формула (20) принимает вид

$$y_s^{(N)}(x,t)=(-1)^{N+1}\{\det[F_0^{(s)}]\}^{-1}\det[F_0^{(s+1)}], \tag{23}$$

$$U_s(x,t)=\ln\left[(-1)^{N+1}\frac{\det F_0^{(s+1)}}{\det F_0^{(s)}}\right]. \tag{24}$$

Для того чтобы системы (17) имели единственное решение при всех x и t, надо выбрать параметры $c_l(r)$ в формуле (12) так, то бы $\det[F_0^{(s)}(x,t)]\neq 0$ $(s=0, 1, \dots, M-1)$.

Мы рассмотрим здесь случай вещественных λ_r $(0<\lambda_1<\dots<\lambda_N)$ и четного $M=2L$. Выделяя в сумме (12) слагаемые, имеющие наибольший рост при $x\to\pm\infty$ получим:

$$f_s(\lambda_r, x, t)=2\exp\left(\frac{c_0(r)+c_L(r)}{2}\right)\times \operatorname{ch}\left[V(\lambda_r, x, t)+\frac{c_0(r)-c_L(r)}{2}\right]+$$
$$+\Phi_s(\lambda_r, x, t)\quad (s=2m);$$

$$f_s(\lambda_r, x, t)=2\exp\left(\frac{c_0(r)+c_L(r)}{2}\right)\times \operatorname{sh}\left[V(\lambda_r, x, t)+\frac{c_0(r)-c_L(r)}{2}\right]+$$
$$+\Phi_s(\lambda_r, x, t)\quad (s=2m+1).$$

Здесь $V(\lambda_r, x, t)=\lambda_r x+\lambda_r^{-1}t$ и $\Phi_s(\lambda_r, x, t)=\sum_{k\neq 0,\, L}\varepsilon_k^s\exp(\lambda_r\varepsilon_k x+$ $+\lambda_r^{-1}\varepsilon_k^{-1}t+c_k(r))$. Обозначим $1/2\,(c_0(r)-c_L(r))=\alpha_r+i\beta_r$ $(r=$ $=1, \dots, N)$ и пусть

$$\operatorname{Im}\frac{1}{2}[c_0(r)-c_L(r)]=\beta_r\neq\frac{\pi k}{2}\ (k=0, \pm 1, \dots). \tag{25}$$

Тогда при четных s

$$f_s(\lambda_r, x, t) = 2\exp\left(\frac{c_0(r)+c_L(r)}{2}\right) \times \operatorname{ch}[V(\lambda_r, x, t)+\alpha_r+i\beta_r] \times \times [1+\hat{\Phi}_s(\lambda_r, x, t)], \tag{26}$$

а при нечетных s

$$f_s(\lambda_r, x, t) = 2\exp\left(\frac{c_0(r)+c_L(r)}{2}\right) \times \operatorname{sh}[V(\lambda_r, x, t)+\alpha_r+i\beta_r] \times \times [1+\hat{\Phi}_s(\lambda_r, x, t)]. \tag{26'}$$

Здесь

$$|\hat{\Phi}_s(\lambda_r, x, t)| \leqslant \left|\exp - \left(\frac{c_0(r)+c_L(r)}{2}\right)\right| \times \sum_{k\neq 0,\, L} |\exp c_k(r)| \cdot C(r),$$

где

$$C(r) = \sup \frac{|\exp(\lambda_r x + \lambda_r^{-1} t)|}{|\operatorname{ch}[V(\lambda_r, x, t)+\alpha_r+i\beta_r]|} < \infty,$$

так как $\beta_r \neq \frac{\pi k}{2}$.

Отсюда, полагая для определенности $N = 2K+1$ находим, что

$$F_0 = 2^{2K+1} \times \exp \sum_{r=1}^{2K+1} \frac{c_0(r)+c_L(r)}{2} \times \times \left\{\prod_{r=1}^{2K+1} \operatorname{ch}[V(\lambda_r, x, t)+\alpha_r+i\beta_r]\right\} \times \times \left[\begin{pmatrix} \lambda_1^{2K} & \lambda_1^{2K-1} t_1 & \ldots & 1 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ \lambda_{2K+1}^{2K} & \lambda_{2K+1}^{2K-1} t_{2K+1} & \ldots & 1 \end{pmatrix} + \Phi\right]; \tag{27}$$

$$F_0' = 2^{2K+1} \times \exp \sum_{r=1}^{2K+1} \frac{c_0(r)+c_L(r)}{2} \times \times \left\{\prod_{r=1}^{2K+1} \operatorname{sh}[V(\lambda_r, x, t)+\alpha_r+i\beta_r]\right\} (\lambda_1, \ldots, \lambda_{2K+1}) \times \times \left[\begin{pmatrix} \lambda_1^{2K} & \lambda_1^{2K-1} \tilde{t}_1 & \ldots & 1 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ \lambda_{2K+1}^{2K} & \lambda_{2K+1}^{2K-1} \tilde{t}_{2K+1} & \ldots & 1 \end{pmatrix} + \psi\right], \tag{27'}$$

где $t_r = \operatorname{th}[V(\lambda_r, x, t)+\alpha_r+i\beta_r]$; $\tilde{t}_r = \operatorname{cth}[V(\lambda_r, x, t)+\alpha_r+i\beta_r]$, а Φ, ψ — матрицы-функции, норму которых мы можем сделать сколь угодно малой, выбирая постоянные $c_l(r)$ так, чтобы суммы $\left|\exp\left(-\frac{c_0(r)+c_L(r)}{2}\right)\right| \sum_{k\neq 0,\, L} |\exp c_k(r)|\, C(r)$ были малы.

Для того чтобы доказать обратимость матриц F_0, F_0', достаточно доказать, что $\prod_{r=1}^{2K+1} \operatorname{ch}[V(\lambda_r, x, t) + \alpha_r + i\beta_r]$ и $\prod_{r=1}^{2K+1} \operatorname{sh}[V(\lambda_r, x, t) + \alpha_r + i\beta_r]$ не имеют нулей (а это следует из условия (25)) и матрицы

$$\tilde{F}_0 = \begin{pmatrix} \lambda_1^{2K} & \lambda_1^{2K-1} t_1 & \ldots\ldots & 1 \\ \ldots & \ldots & \ldots\ldots & \ldots \\ \lambda_{2K+1}^{2K} & \lambda_{2K+1}^{2K-1} t_{2K+1} & \ldots & 1 \end{pmatrix},$$

$$\tilde{F}_0' = \begin{pmatrix} \lambda_1^{2K} & \gamma_1^{2K-1} \tilde{t}_1 & \ldots\ldots & 1 \\ \ldots & \ldots & \ldots\ldots & \ldots \\ \lambda_{2K+1}^{2K} & \lambda_{2K+1}^{2K-1} \tilde{t}_{2K+1} & \ldots & 1 \end{pmatrix}$$

обратимы.

Докажем, что если

$$\beta_r \neq \frac{\pi k}{2}\ (k = 0, \pm 1, \ldots),\ \sin 2\beta_r \times \sin 2\beta_{r+1} < 0 \tag{28}$$

то определители матриц $\tilde{F}_0$, $\tilde{F}_0'$ нигде не обращаются в нуль.

Займемся определителем матрицы $\tilde{F}_0$. Пусть в некоторой точке он имеет нуль, тогда существуют такие (не все равные нулю) константы $a_1, a_2, \ldots, a_{2K+1}$, что

$$\begin{gathered} a_1\lambda_1^{2K} + a_2\lambda_1^{2K-1} t_1 + \cdots + a_{2K+1} = 0 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_1\lambda_{2K+1}^{2K} + a_2\lambda_{2K+1}^{2K-1} t_{2K+1} + \cdots + a_{2K+1} = 0 \end{gathered} \tag{29}$$

или $(Q_1(\lambda_r) + iQ_2(\lambda_r))(t_{r1} + it_{r2}) + P_1(\lambda_r) + iP_2(\lambda_r) = 0$ $(1 \leqslant r \leqslant 2K+1)$. Здесь Q_1, Q_2 — вещественные нечетные полиномы $2K-1$ степени, P_1, P_2 — четные вещественные полиномы степени $2K$, $t_{r1} = \operatorname{Re}\operatorname{th} \times [V(\lambda_r, x, t) + \alpha_r + i\beta_r]$; $t_{r2} = \operatorname{Im}\operatorname{th}[V(\lambda_r, x, t) + \alpha_r + i\beta_r]$. Разделяя действительные и мнимые части в этих уравнениях, получим систему из $4K+2$ уравнений:

$$\begin{gathered} Q_1(\lambda_r)\, t_{r1} - Q_2(\lambda_r)\, t_{r2} + P_1(\lambda_r) = 0, \\ Q_1(\lambda_r)\, t_{r2} + Q_2(\lambda_r)\, t_{r1} + P_2(\lambda_r) = 0. \end{gathered} \tag{30}$$

Исключая здесь t_{r1} получим $t_{r2}(Q_1^2(\lambda_r) + Q_2^2(\lambda_r)) = P_1(\lambda_r) Q_2(\lambda_r) - Q_1(\lambda_r) P_2(\lambda_r)$, т. е. $t_{r2} Q(\lambda_r) = P(\lambda_r)$, где $Q(\lambda) = Q_1^2(\lambda) + Q_2^2(\lambda)$; $P(\lambda) = P_1(\lambda) Q_2(\lambda) - P_2(\lambda) Q_1(\lambda)$. Но

$$\begin{aligned} t_{r2} &= \operatorname{Im}\operatorname{th}[V(\lambda_r, x, t) + \alpha_r + i\beta_r] = \\ &= \frac{1}{2} \frac{\sin 2\beta_r}{\operatorname{ch}^2[V(\lambda_r, x, t) + \alpha_r] - \sin^2\beta_r}, \end{aligned}$$

и следовательно, если мы выберем β_r так, чтобы $\sin 2\beta_r \cdot \sin 2\beta_{r+1} < 0$, то полином $P(\lambda)$ будет менять знак в каждом сегменте $[\lambda_1, \lambda_2], \ldots, [\lambda_{2K}, \lambda_{2K+1}]$, т. е. будет иметь на полуоси $[\lambda_1, +\infty)$ по крайней мере $2K$ нулей. Поскольку полином $P(\lambda)$ нечетный, то всего он будет иметь по крайней мере $4K+1$ вещественных нулей, откуда следует, что $P(\lambda)\equiv 0$, так как степень полинома $P(\lambda)$ равна $4K-1$. Следовательно, $t_{r2}Q(\lambda_r)=0$ и значит, $Q(\lambda_r)=0$ $(r=1, 2, \ldots, 2K+1)$. Но так как полином $Q(\lambda)$ четный, то $Q(-\lambda_r)=0$, т. е. он имеет не менее, чем $4K+2$ вещественных нулей. Поскольку степень полинома $Q(\lambda)$ равна $4K-2$, то $Q(\lambda)\equiv 0$, а значит и $Q_1(\lambda)\equiv Q_2(\lambda)\equiv 0$. Из (30) получаем, что $P_1(\lambda_r)=P_2(\lambda_r)=0$, или полиномы $2K$ степени имеют не менее, чем по $2K+1$ корню, что противоречит предположению.

Итак, мы доказали, что если

$$\beta_r \neq \pi k/2 \ (k=0, \pm 1, \ldots), \ \sin 2\beta_r \sin 2\beta_{r+1} < 0$$

и параметры $c_l(r)$ выбраны так, что суммы $C(r)\times \times \left|\exp\left(-\frac{c_0(r)+c_L(r)}{2}\right)\right| \sum\limits_{k\neq 0,\ L} |\exp c_k(r)|$ достаточно малы, то матрица $\tilde{F}_0$ а следовательно и матрица $F_0=\tilde{F}_0[I+\tilde{F}_0^{-1}\Phi]\times \times \exp\left(\frac{c_0(r)+c_L(r)}{2}\right)\prod\limits_{r=1}^{2K+1} \operatorname{ch}[V(\lambda_r, x, t)+\alpha_r+i\beta_r]$ обратимы.

Аналогично доказывается, что при тех же условиях обратимы матрицы $F_0^{(s)}$ $(s=1, \ldots, M-1)$. Таким образом, мы приходим к следующей теореме.

Теорема. *Система уравнений*

$$\frac{\partial^2}{\partial x \partial t} U_s = \exp(U_s - U_{s-1}) - \exp(U_{s+1} - U_s);$$

$$U_s = U_s(x, t) = U_{s+M}(x, t), \ s=0, 1, \ldots, M-1$$

имеет решения вида

$$U_s(x, t) = \ln\left[(-1)^{N+1}\frac{\det F_0^{(s+1)}}{\det F_0^{(s)}}\right],$$

где $F_0=F_0(x,t)=(F_{rp})_{r,\ p=1}^{N}$; $F_{rp}=\left(\frac{\partial}{\partial x}\right)^{(N-p)} f_0(\lambda_r, x, t)$; $f_0(\lambda_r, x, t) = \sum\limits_{k=0}^{M-1}\exp(\lambda_r\varepsilon_k x+\lambda_r^{-1}\varepsilon_k^{-1}t+c_k(r))$; $\varepsilon_k=\exp\left(\frac{2\pi i}{M}k\right)$. При этом, если числа λ_r $(r=1, \ldots, N)$ положительны, $M=2L$ и $\operatorname{Im} 1/2\,(c_0(r)+c_L(r))=\beta_r\neq\pi k/2$; $\sin 2\beta_r \sin 2\beta_{r+1}<0$, то при достаточно малых значениях $\left|\exp\left(-\frac{c_0(r)+c_L(r)}{2}\right)\right| \sum\limits_{k\neq 0,\ L}|\exp c_k(r)|\, c(r)$ это решение бесконечно дифференцируемо при всех вещественных значениях x и t.

Полученные в этой теореме решения называются N-солитонными. Нетрудно проверить, что при $t \to \pm\infty$ они распадаются на суперпозиции односолитонных решений. Можно также обычным путем изучить эффект взаимодействия этих солитонов, когда t меняется от $-\infty$ до $+\infty$.

Список литературы; 1. *Захаров В. Е., Тахтаджян Л. А., Фадеев Л. Д.* Полное описание решений уравнения Sine—London.— Докл. АН СССР, 1974, **219**, № 6, с. 1334—1337. 2. *Манаков С. В.* О полной интегрируемости и стохастизации в дискретных динамических системах.— ЖЭТФ, 1974, **67**, № 2, с. 543—565.

Поступила 30 декабря 1979 г.