УДК 517.55

Л. И. РОНКИН

О ПРОДОЛЖЕНИИ С ОЦЕНКАМИ ФУНКЦИЙ, ГОЛОМОРФНЫХ НА НУЛЕВОМ МНОЖЕСТВЕ ПОЛИНОМА

1. Постановка задачи и формулировка результатов. Пусть $P(z)$, $z \in \boldsymbol{C}^n$ — полином, и $\Lambda_P = \{z \in \boldsymbol{C}^n,\ P(z) = 0\}$. Известно, что любая функция $f(z)$, голоморфная* на Λ_P (или на произвольном аналитическом множестве в $\boldsymbol{C}^n$) может быть продолжена на все $\boldsymbol{C}^n$ как целая функция. Одно из доказательств этого факта,

* Функция $f(z)$, определенная на аналитическом множестве Λ, называется голоморфной на Λ, если для каждой точки $z^0 \in \Lambda$ существует окрестность этой точки ω_{z^0} и голоморфная в ней функция $f_{z^0}(z)$ такие, что $f_{z^0}(z) = f(z)$, $\forall z \in \omega_{z^0} \cap \Lambda$.

основанное на использовании теорем об операторе $\bar{\partial}$, близко изложенному в работе [1] доказательству разрешимости первой проблемы Кузена.

Как и в случае одного переменного, где соответствующие задачи трактуются как задачи интерполяции, естественно рассматривать задачу о продолжении не в классе всех голоморфных функций, а в классах функций, задаваемых теми или иными ограничениями роста. И в этой ситуации можно следовать схеме упомянутого выше доказательства продолжаемости функций с Λ_P, однако при этом следует иметь в виду, что проведение необходимых оценок, как правило, наталкивается на существенные трудности. Некоторые задачи подобного рода рассматривались в работах [1—4].

Получены две теоремы о продолжении с оценками. Обозначим $M_f(r;\ \Lambda_P) = \max_{z \in \Lambda_P,\ |z|=r} |f(z)|$; $M_F(r) = \max_{|z|=r} |F(z)|$.

Теорема 1. *Пусть $f(z)$ — функция, голоморфная на нулевом множестве Λ_P полинома $P(z)$ степени m от переменных $z_1, \ldots, z_n$. Пусть $\alpha(t)$, $0 \leqslant t < \infty$ — какая-либо функция, выпуклая относительно $\ln t$, монотонно растущая и удовлетворяющая условию*

$$\ln M_f(r;\ \Lambda_P) \leqslant \alpha(t),\ \forall t \geqslant 0.$$

Тогда при каждом $\varepsilon > 0$ существует такая целая функция $F\varepsilon(z)$, что

1) $F_\varepsilon(z) = f(z)$, $\forall z \in \Lambda_P$;

2) $\ln M_{F_\varepsilon}(r) \leqslant C_\varepsilon + N_\varepsilon \ln(1 + r^2) + \alpha((1+\varepsilon)r), \forall r > 0$,

где C_ε и N_ε — константы, зависящие от ε и заданного полинома $P(z)$.

В случае $n = 2$ при априорном предположении о конечности порядка функции $f(z)$ ранее [4] мы доказали возможность продолжения таких функций без увеличения типа. Существенно использовалась ограниченность дискриминантного множества полинома от двух переменных, и поэтому результат не был распространен на случай произвольного n. Здесь мы получаем соответствующий результат для функций любого числа переменных.

Обозначим через $\sigma(f;\ \Lambda_P)$ тип функции $f(z)$ (голоморфной на Λ_P) при уточненном порядке*) $\rho(t)$, т. е. положим

$$\sigma(f;\ \Lambda_P) = \overline{\lim_{r \to \infty}} \frac{\ln M_f(r;\ \Lambda_P)}{r^{\rho(r)}}.$$

Через $\sigma(F)$ обозначим тип целой функции $F(z)$ при том же уточненном порядке $\rho(t)$, т. е. положим

$$\sigma(F) = \overline{\lim_{r \to \infty}} \frac{\ln M_F(r)}{r^{\rho(r)}}.$$

---

* Определение и свойства уточненного порядка см. [5, 6].

Теорема 2. *Пусть $f(z)$ — функция, голоморфная на нулевом множестве Λ_P полинома P_z. Пусть далее функция $f(z)$ имеет конечный тип $\sigma(f;\ \Lambda_P)$ при уточненном порядке $\rho(t)$, $\lim\limits_{t\to\infty}\rho(t) = \rho > 0$. Тогда существует такая целая функция $F(z)$, что*

1) $F(z) = f(z),\ \forall z \in \Lambda_P$;

2) $\sigma(F) = \sigma(f;\ \Lambda_P)$.

Прежде чем перейти к доказательству теорем 1 и 2, отметим вытекающее из теоремы 1

Следствие. Если голоморфная на Λ_P функция $f(z)$ такова, что

$$\varlimsup_{r\to\infty}\frac{\ln M_f(r;\ \Lambda_P)}{\ln r} \leqslant k < \infty,$$

то $f(z)$ может быть продолжена с Λ_P на все C^n как полином степени $\leqslant k+N$, где N зависит лишь от выбора полинома $P(z)$.

Это утверждение содержится в одной теореме Бьорка, рассматривавшего более общий случай продолжения функций степенного роста, голоморфных на произвольном алгебраическом многообразии в $\boldsymbol{C}^n$.

2. Доказательство теоремы 1. Упоминавшаяся в п. 1 схема построения искомого продолжения функции f состоит в том, что вначале строятся ее локальные продолжения, удовлетворяющие некоторым оценкам, а потом производится их «склейка», сохраняющая или не слишком «портящая» эти оценки.

Обозначим через $H(G)$, где G — область в $\boldsymbol{C}^n$ множество функций, голоморфных в G. Через $H(\Lambda_P)$, где P — полином, а Λ_P — его нулевое множество, обозначим множество всех функций, голоморфных на Λ_P.

Если $P = P(z,\ w)$, $z \in \boldsymbol{C}^n, w \in \boldsymbol{C}$, и $\varphi(z,\ w) \in H(\Lambda_P)$, то полагаем $M_\varphi(r;\ R;\ \Lambda_P) = \max_{|z|\leqslant r,\ |w|\leqslant R,\ (z,\ w)\in P}|\varphi(z,\ w)|$.

Если $\Phi(z,\ w) \in H(G)$, где $G = \{(z,\ w): |z| < r,\ |w| > R_0\}$, то обозначим

$$M_\Phi(r,\ R) = \sup_{|z|<r,\ |w|=R,\ (z,\ w)\in G}|\Phi(z,\ w)|.$$

Построение упомянутых локальных продолжений функции опирается на следующую лемму.

Лемма 1. *Пусть*

$$P(z,\ w) = \sum_{l=0}^{m} a_l(z)\, w^{m-l},$$

где $z \in \boldsymbol{C}^n$, $w \in \boldsymbol{C}$, все коэффициенты $a_l(z)$ — полиномы. Тогда для любого достаточно малого $\varepsilon_1 > 0$ найдутся такие зависящие от ε_1 числа $\varepsilon_2 \in (0,\ \varepsilon_1)$ и $R_0 > 0$, что в определяемой ими области $G = \{(z,\ w);\ \ |z| < \varepsilon_2,\ \ |w| > R_0$ каждая функция $\varphi \in H(\Lambda_P)$

продолжается с $\Lambda_P \cap G$ до функции $\Phi(z, w)$, голоморфной в G и удовлетворяющей условию

$$M_\Phi(\varepsilon_2, R) \leqslant C(1 + R^2)^N M_\varphi(\varepsilon_1, R; \Lambda_P),\ \forall R > R_0,$$

где величины C и N зависят лишь от ε_1 и выбора полинома P.

Доказательство. Случай $a_0(0) \neq 0$ тривиален и мы на нем не останавливаемся. Пусть $a_0(0) = 0$. Не нарушая общности, можно считать, что $a_0(z_1, 0, \ldots, 0) \not\equiv 0$. Выберем $\delta \in \left(0, \frac{1}{2}\right)$ так, чтобы функция $a_0(Z_1, 0, \ldots 0)$ не обращалась в ноль при $0 < |z_1| \leqslant \delta$. Далее выберем $\varepsilon \in (0, \delta)$ так, чтобы $a_0(z_1, 'z)$, где $'z = (z_2, \ldots, z_n)$, не обращалось в ноль при $\delta - \varepsilon \leqslant |z_1| \leqslant \delta + \varepsilon$, $|z| < \varepsilon$. Обозначим $\mu = \min_{\delta-\varepsilon \leqslant |z_1| \leqslant \delta+\varepsilon,\ |'z| \leqslant \varepsilon} |a_0(z)|$; $\nu_j = \max_{\delta-\varepsilon \leqslant |z_1| \leqslant \delta+\varepsilon,\ |'z| \leqslant \varepsilon} |a_j(z)|$; $R_0' = \frac{1}{\mu} \sum_{j=1}^{m} \nu_j$.

Тогда $|\boldsymbol{P}(z, w)| > 0$ при $\delta - \varepsilon \leqslant |z_1| \leqslant \delta + \varepsilon$, $|'z| \leqslant \varepsilon$ и $|w| \geqslant R_0'$. Следовательно, при любых фиксированных $'z$, $|'z| \leqslant \varepsilon$ и w, $|w| \geqslant R_0'$ функция $\boldsymbol{P}(z_1, 'zw)$, рассматриваемая как функция от z_1, имеет одно и то же число корней в круге $|z_1| < \delta + \varepsilon$. Обозначим это число через m', а сами корни через $z_1^{(j)} = z_1^{(j)}('z, w)$, $j = 1, \ldots, m'$. Построим полином $P^*(z_1, 'z, w) = z_1^{m'} + \sum_{j=1}^{m'} a_j^* z_1^{m'-j}$ с корнями в точках $z_1^{(j)}$. Очевидно, что коэффициенты этого полинома $a_j^* = a_j^*('z, w)$ голоморфны в области $G^* = \{('z, w) : |'z| < \varepsilon,\ |w| > R_0'$. Кроме того легко видеть, что при не нарушающем общности предположении об отсутствии у полинома $\boldsymbol{P}(z, w)$ кратных делителей дискриминант $D_{P^*}(z, w)$ полинома P^* не равен тождественно нулю. Обозначим множество тех $('z, w)$, $|'z| < \varepsilon$, $|w| > R_0'$, в которых $D_{P^*}('z, w) = 0$ через E.

Пусть теперь $\Phi_1(z, w)$ — какое-нибудь голоморфное продолжение функции $\varphi(z, w)$ на все $\boldsymbol{C}^{n+1}$. Оно существует согласно соответствующей теореме А. Картана. По $\Phi_1(z, w)$ построим функцию

$$\Phi(z, w) = \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{|\zeta| = \delta + \frac{\varepsilon}{2}} \Phi_1(\zeta', z, w) \frac{P^*(\zeta, 'z, w) - P^*(z_1, 'z, w)}{(\zeta - z_1) P^*(\zeta', z, w)}. \quad (1)$$

Покажем, что эта функция является искомой.

При $('z, w) \notin E$ функция $\Phi(z, w)$ по переменной z_1 является интерполяционным полиномом Лагранжа для функции $\Phi_1(z_1, 'z, w)$ с узлами интерполяции в точках $z_1^{(j)}$, $j = 1, \ldots, m'$. Таким образом, $\Phi(z, w) = \varphi(z, w)$ при $(z, w) \in G$, $|z_1| < \delta + \varepsilon$, $('z, w) \notin E$. Далее заметим, что, как и $P(z, w)$, псевдополином $P^*(z, 'w)$ не обращается в ноль при $('z, w) \in G^*$, $|z_1| = \delta + \frac{\varepsilon}{2}$. Поэтому функция $\Phi(z, w)$ голоморфна при $('z, w) \in G^*$, $|z_1| < \infty$ и, следовательно, равенство $\Phi(z, w) = \varphi(z, w)$ имеет место и в тех точках (z, w), $|z_1| < \delta + \varepsilon$, $('z, w) \in G^*$, для которых $('z, w) \in E$.

Оценим функцию $\Phi(z, w)$. При $|z_1| = \delta$, $|'z| = \frac{\varepsilon}{2}$ ввиду плюрисубгармоничности функции $\ln|\Phi(z, w)|$ справедливо неравенство

$$\ln|\Phi(z, w)| \leqslant \frac{2^{2-2n}}{\pi\varepsilon^{2n}\omega_{n-1}} \int\limits_{\substack{|z_1-\lambda_1|<\varepsilon \\ |'z-'\lambda|<\varepsilon/2}} \ln^+|\Phi(\lambda, w)|\, dV_{(\lambda)}, \tag{2}$$

где ω_{n-1} — объем единичного шара в пространстве C^{n-1}, а $dV_{(\lambda)}$ — элемент объема в пространстве $C^n_{(\lambda)}$.

Далее, так как $\Phi(z_1, 'z, w)$ при $('z, w) \notin E$ по переменной z_1 является интерполяционным полиномом Лагранжа, то наряду с (1) для $\Phi(z, w)$ при $('z, w) \notin E$ справедливо представление

$$\Phi(z, w) = \sum_{l=1}^{m'} \varphi(z_1^{(l)}, 'z, w) \prod_{j \neq l} \frac{z_1 - z_1^{(j)}}{z_1^{(l)} - z_1^{(j)}}.$$

Поскольку множество E имеет в C^n нулевую лебегову меру, то из этого представления следует, что

$$\int\limits_{\substack{|z_1-\lambda_1|<\varepsilon \\ |'z-'\lambda|<\varepsilon/2}} \ln^+|\Phi(\lambda, w)|\, dV_{(\lambda)} \leqslant \int\limits_{\substack{|z_1-\lambda_1|<\varepsilon \\ |'z-'\lambda|<\delta/2}} \sum_{l=1}^{m'} \times$$

$$\times \ln^+\left|\prod_{j \neq l} \frac{\lambda_1 - z_1^{(j)}('\lambda, w)}{z_1^{(l)}('\lambda, w) - z_1^{(j)}('\lambda, w)}\right| dV_{(\lambda)} +$$

$$+ \pi\omega_{n-1}\frac{\varepsilon^{2n}}{4^{n-1}}\{\ln^+ M_\varphi(\delta, |w|; \Lambda_P) + \ln m'\}. \tag{3}$$

До сих пор через $z_1^{(j)}$, $j = 1, \ldots, m'$, обозначались корни z_1 полинома $P(z_1, 'z, w)$, удовлетворяющие условию: $|z_1| < \delta - \varepsilon$. Обозначим через $z_1^{(m'+1)}, \ldots, z_1^{(m_1)}$ остальные корни этого многочлена. Тогда

$$\int\limits_{\substack{|z_1-\lambda_1|<\varepsilon \\ |'z-'\lambda|<\varepsilon/2}} \ln^+\left|\prod_{j;\, j \neq l,\, j \leqslant m'} \frac{\lambda_1 - z_1^{(j)}}{z_1^{(l)} - z_1^{(j)}}\right| dV_{(\lambda)} \leqslant \int\limits_{\substack{|\lambda_1|<\delta+\varepsilon \\ |'\lambda|<\varepsilon}} \ln^+ \times$$

$$\times \left| b_0^{2m_1-2} \frac{\prod\limits_{(i,j)\in \mathrm{I}_l} (z_1^{(i)} - z_1^{(j)})}{b_0^{2m_1-2} \prod\limits_{(i,j)\in \mathrm{I}} (z_1^{(i)} - z_1^{(j)})} \prod_{j;\, j \neq l,\, j \leqslant m'} (\lambda_1 - z_1^{(j)}) \right| dV_{(\lambda)}, \tag{4}$$

где $b_0 = b_0('\lambda, w)$ — старший коэффициент в разложении полинома $P(\lambda, w)$ по степеням λ_1, I — множество всех пар (i, j)

таких, что $i \neq j$, $j \leqslant m_1$, $i \leqslant m_1$, а I_l — множество всех пар $(i, j) \in \mathrm{I}$ таких, что $(i, j) \neq (l, j')$, $1 \leqslant j \leqslant m'$.

Из (2)—(4) немедленно следует, что при $|z_1| = \delta$, $|'z| = \varepsilon/2$, $|w| > R_0$,

$$\ln|\Phi(z, w)| \leqslant \sum_{l=1}^{m'} \frac{4^{n-1}}{\pi\omega_{n-1}\varepsilon^{2n}} \int\limits_{\substack{|\lambda_1|<\delta+\varepsilon \\ |'\lambda|<\varepsilon}} \ln^+ \left| b_0^{2m_1-2} \prod_{\substack{j\neq l \\ j\leqslant m'}} (\lambda_1 - z_1^{(j)}) \times \right.$$

$$\left. \times \prod_{(i,\, j)\in \mathrm{I}_l} (z_1^{(i)} - z_1^{(j)}) \right| dV_{(\lambda)} + \frac{(\delta+\varepsilon)^2 m' 4^{n-1}}{\omega_{n-1}\varepsilon^{2n}} \int\limits_{|\lambda|<\varepsilon} \ln^+ \times$$

$$\times \left| \frac{1}{b_0^{2m_1-2} \prod\limits_{(i,\, j)\in \mathrm{I}} (z_1^{(i)} - z_1^{(j)})} \right| dV_{(\lambda)} + \ln^+ M_f(\delta, |w|; \Lambda_p) + \ln m'. \qquad (5)$$

Заметим, что $b_0^{2m_1-2} \prod\limits_{(i,\, j)\in \mathrm{I}} (z_1^{(i)} - z_1^{(j)}) = \pm D_P('\lambda, w)$, где $D_P('\lambda, w)$ — дискриминант полинома

$$P(\lambda, w) = \sum_{l=0}^{m_1} b_l('\lambda, w)\, \lambda_1^{m_1-l}.$$

Поскольку функции $b_l('\lambda, w)$ — полиномы, то $D_P('\lambda, w)$ является полиномом степени не выше $2N_1 = (2m_1 - 1)q$, где $q = \max\deg b_l('\lambda, w)$. Следовательно, при некотором C_1, не зависящим от R, справедливо неравенство

$$\ln^+ M_{D_P}(\varepsilon, R) \leqslant N_1 \ln(1+R^2) + C_1, \ \forall R > R_0. \qquad (6)$$

Отсюда, учитывая плюрисубгармоничность функции $\ln|D_P('\lambda, w)$ и предполагая для упрощения записи*, что $D_P(0, w) \not\equiv 0$, заключаем, что

$$\int\limits_{|'\lambda|<\varepsilon} \ln^+ \left| \frac{1}{D_P('\lambda, w)} \right| dV_{('\lambda)} \leqslant \int\limits_{|'\lambda|<\varepsilon} \ln^+ |D_P('\lambda, w)|\, dV_{('\lambda)} -$$

$$- \omega_{n-1}\varepsilon^{2n-2} \ln|D_P(0, w)|. \qquad (7)$$

Выберем $R_0 \geqslant R_0'$ так, чтобы $D_P(0, w) \neq 0$ при $|w| > R_0$. Тогда

$$\min_{|w|\geqslant R_0} \ln|D_P(0, w)| = C_2 > -\infty,$$

и из (6), (7) следует, что

$$\int\limits_{|'\lambda|<\varepsilon} \ln^+ \left| \frac{1}{D_P('\lambda, w)} \right| dV_{('\lambda)} \leqslant \omega_{n-1}\varepsilon^{2n-2} \{N_1 \ln(1+|w|^2) + C_1 + C_2\}.$$

Если $D_P(0, w) \equiv 0$, то нужно выбрать достаточно близко к началу координат такую точку $'\lambda^\circ$, чтобы $D_P('\lambda, w) \not\equiv 0$, после чего воспользоваться неравенством

$$\int\limits_{|'\lambda|<\varepsilon} \ln^+ \frac{1}{|D_P|}\, dV_{('\lambda)} \leqslant \int\limits_{|'\lambda-'\lambda^\circ|<2\varepsilon} \ln^+ \frac{1}{|D_P|}\, dV_{('\lambda)}.$$

Для оценки первого интеграла в неравенстве (5) заметим, что поскольку все полиномы $b_l('\lambda, w)$ имеют степень не выше q, то при некотором C_3, не зависящем от R, выполняются неравенства

$$\ln^+ M_{b_l}(\varepsilon, R) \leqslant \frac{q}{2}\ln(1+R^2) + \ln C_3, \ \forall R > R_0, \ l = 1, \ldots, m_1.$$

Отсюда следует, что при $|'\lambda| < \varepsilon$

$$|z_1^{(j)}('\lambda, w)| \leqslant \frac{m_1 C_3 (1+|w|^2)^{q/2}}{|b_0('\lambda, w)|},$$

поэтому

$$\int\limits_{\substack{|\lambda_1|<\delta+\varepsilon \\ |'\lambda|<\varepsilon}} \ln^+\Big| b_0^{2m_1-2} \prod_{j:\, j\neq l,\, j\leqslant m'} (\lambda_1 - z_1^{(j)}) \prod_{(i,\, j)\in \mathrm{I}_l} (z_1^{(i)} - z_1^{(j)}) \Big| dV_{(\lambda)} \leqslant$$
$$\leqslant N_2 \pi (\delta+\varepsilon)^2 \int\limits_{|'\lambda|<\varepsilon} \ln^+ \frac{1}{|b_0|('\lambda, w)|} dV_{('\lambda)} + \pi(\delta+\varepsilon)^2 \times$$
$$\times\, \omega_{n-1}\varepsilon^{2n-2}(C_4 + N_3 \ln(1+|w|^2),$$

где $C_4 = m_1(m_1-1)\ln(2C_3 m_1 + \delta + \varepsilon)$, $N_2 = m_1(m_1-1) - m' - 2m_1 + 1$ и $N_3 = q/2m_1(m_1-1)$.

Интеграл $\int\limits_{|'\lambda|<\varepsilon} \ln^+|b_0^{-1}('\lambda, w)|\, dV_{('\lambda)}$ оценивается так же, как был выше оценен интеграл $\int\limits_{|'\lambda|<\varepsilon} \ln^+|D_P^{-1}('\lambda, w)|\, dV_{('\lambda)}$. При этом получается, что

$$\int\limits_{|'\lambda|<\varepsilon} \ln^+ \frac{1}{|b_0('\lambda, w)|} dV_{('\lambda)} \leqslant \omega_{n-1}\varepsilon^{2n-2}\left(\frac{q}{2}\ln(1+|w|^2) + C_5).\right).$$

Отсюда и из (5)—(7) заключаем, что

$$\max_{|z_1|=\delta,\ |'z|=\frac{\varepsilon}{2}} \ln|\Phi(z, w)| \leqslant C + \ln^+ M_f(\delta, |w|; \Lambda_P) + N\ln(1+|w|^2), \tag{8}$$

где величины N, C зависят лишь от ε и выбора полинома P.

Положим $\varepsilon_1 = \delta$, $\varepsilon_2 = \frac{\varepsilon}{2}$. Тогда, поскольку $\ln M_\Phi\left(\frac{\varepsilon}{2}, R\right) \leqslant \max_{|z_1|<\delta,\ |'z|<\frac{\varepsilon}{2},\ |w|=R} \ln|\Phi(z, w)|$ из неравенства (8) вытекает, что

$$\ln M_\Phi(\varepsilon_2, R) \leqslant \ln^+ M_f(\varepsilon_1, R; \Lambda_P) + N\ln(1+R^2) + C.$$

Лемма доказана.

Локальные продолжения, непосредственно участвующие в образовании искомой функции F, строятся в лемме 2.

Обозначим через π отображение проективизации пространства $\boldsymbol{C}^n$, т. е. отображение $\boldsymbol{C}^n \to P^{n-1}$, ставящее в соответствие каждой точке $z \in \boldsymbol{C}^n$, содержащий ее комплексный «луч» $\varkappa = [z_1, \ldots, z_n] = \{\lambda \in \boldsymbol{C}^n : \lambda_1 = z_1 w, \ldots, \lambda_n = z_n w,\ w \in \boldsymbol{C}\}$.

Лемма 2. *Пусть $P(z)$, $z \in \boldsymbol{C}^n$ — полином. Тогда для любых $\varkappa_0 \in \boldsymbol{P}$ и $\varepsilon > 0$ у $\varkappa_0$ в $\boldsymbol{P}^{n-1}$ существует такая окрестность ω_0, что при некотором $R_0 > 0$ в области $G = G_{\varkappa_0} = \{z : z \in \pi^{-1}\omega_0, |z| > R_0\}$. Каждая функция $f \in H(\Lambda_P)$ продолжается с $\Lambda_P \cap G$ до функции $F(z)$, голоморфной в G и удовлетворяющей условию $\max_{|z|<R,\, z \in G} |F(z)| \leqslant C(1+R^2)^N M_f((1+\varepsilon)R)$, $\forall R > R_0$, с некоторыми зависящими лишь от ε и выбора полинома $P(z)$ константами C и N.*

Доказательство. Пусть $\varkappa_0 = [z_1^0, \ldots, z_n^0]$. Не нарушая общности можно считать, что $z_1^0 = 0, \ldots, z_{n-1}^0 = 0$, $z_n^0 = 1$. Рассмотрим полином $\boldsymbol{P}_1(z^*, w) = \boldsymbol{P}_1(z_1, \ldots, z_{n-1}, w) = \boldsymbol{P}(z_1 w, \ldots, \ldots, z_{n-1}w, w)$ и голоморфную на Λ_{P_1} функцию $f_1(z^*, w) = f(z_1 w, \ldots, z_{n-1}w, w)$. Согласно лемме 1 при любом $\varepsilon_1 > 0$ существует функция $F_1(z^*, w)$, голоморфная в некоторой области $G_1 = \{(z^*, w) : |z^*| < \varepsilon_2, |w| > R_0'\}$ и такая, что

1) $F_1(z^*, w) = f_1(z^*, w)$, $\forall (z^*, w) \in \Lambda_{P_1} \cap G_1$;

2) $M_{F_1}(\varepsilon_2, R) \leqslant C_1(1+R^2)^N M_{f_1}(\varepsilon, R)$. (9)

Положим

$$F(z) = F_1\left(\frac{z_1}{z_n}, \ldots, \frac{z_{n-1}}{z_n}, z_n\right).$$

Очевидно, что функция $F(z)$ голоморфна в области $\{z : |z^*| < \varepsilon_2 |z_n|, |z_n| > R_0'\}$ и, следовательно, в области $G = \{z : |z^*| < \varepsilon_2 |z_n|, |z_n| > (1+\varepsilon_1) R_0'\} = \{z : z \in \pi^{-1}\omega_0, |z| > R_0\}$, где $\omega_0 = \pi\{z : |z^*| < \varepsilon_2 |z_n|\}$, а $R_0 = (1+\varepsilon_1) R_0'$. Очевидно также, что $F(z) = f(z)$, $\forall z \in \Lambda_P \cap G$. И наконец из (9) следует, что

$$\max_{R_0 < |z| < R,\, z \in \pi^{-1}\omega_0} |F(z)| \leqslant \max_{|z^*| < \varepsilon_2,\, \frac{R_0}{1+\varepsilon_2} < |z_n| < \frac{R}{1-\varepsilon_2}} |F_1(z^*, z_n)| \leqslant C_1\left(1 + \left(\frac{R}{1-\varepsilon_2}\right)^2\right)^N M_{f_1}\left(\varepsilon_1; \frac{R}{1-\varepsilon_2}\right) \leqslant C_1\left(1 + \left(\frac{R}{1-\varepsilon_2}\right)^2\right)^N M_f\left(\frac{1+\varepsilon_1}{1-\varepsilon_2} R\right) \leqslant C(1+R^2)^N M_f((1+\varepsilon)R),$$

где $C = C_1(1-\varepsilon_2)^{-2N}$, а $\varepsilon = 1 - \frac{1+\varepsilon_1}{1-\varepsilon_2} = 0(1)$ при $\varepsilon_1 \to 0$.

Лемма доказана.

Для оценки некоторых функций, с помощью которых производится упомянутая в начале этого пункта «склейка» локальных продолжений нам понадобится

Лемма 3. *Пусть ω — область в $\boldsymbol{P}^{n-1}$, а $\varphi(z)$ — функция, голоморфная в области $D = \{z : z \in \pi^{-1}\omega, |z| > R_0 > 0\}$ и такая, что $\varphi(z) = \varphi_1(z) P(z)$, где $\varphi_1 \in H(D)$, а $P(z)$ — полином. Пусть, далее, область $\omega_1 \subset\subset \omega$ и пусть $D_1 = \{z : z \in \pi^{-1}\omega_1, |z| > 2R_0\}$. Тогда при любом $\varepsilon > 0$ существует такая константа C_ε (не зависящая от выбора функции φ), что*

$$\max_{z \in D_1,\, |z| < R} |\varphi_1(z)| \leqslant C_\varepsilon \max_{z \in D,\, |z| < (1+\varepsilon)R} |\varphi(z)|.$$

Доказательство. Поскольку область ω_1 можно покрыть конечным числом областей $\omega^{(j)} = \pi E^{(j)}$, где $E^{(j)}$ имеет вид $E^{(j)} = \{z : z_j = z_j^0, \ |z_i - z_i^0| < \varepsilon, \ i \neq j\}$, причем $\varepsilon > 0$ — произвольно мало, то для доказательства леммы достаточно рассмотреть случай, когда $\omega_1 = \pi E_1$, $\omega = \pi E$, где $E_1 = \{z = (z^*, z_n) : z_n = 1, z^* \in E_1^* = \{z_1, \ldots, z_{n-1} : |z_j| < 1, \quad j = 1, \ldots, n-1\}\}$; $\quad E = \{z = (z^*, z_n) : z_n = 1, \quad z^* \in E^* = \{(z_1, \ldots, z_{n-1}) : |z_j| < \delta, \quad j = 1, \ldots, n-1\}\}$, и $\varepsilon = \varepsilon(\delta)$ — положительное число, специальный выбор которого будет определен позднее.

Обозначим через E^{**} множество тех $z^* \in E^*$, в которых коэффициент $a_0(z^*)$ из представления $P(z^*w, w) = \sum_{l=0}^{m} a_l(z^*) w^{m-l}$ отличен от нуля. При фиксированном $z^* \in E^{**}$, оценим функцию $\varphi_1(z^*w, w) = \dfrac{\varphi(z^*w, w)}{P(z^*w, w)}$.

Согласно теореме А. Картана об оценке модуля полинома снизу, всюду в $\boldsymbol{C}_{(w)}$ вне некоторого множества A_{z^*}, покрываемого кружками с общей суммой радиусов, не превосходящей $\varepsilon/2$ выполняется неравенство $|P(z^*w, w)| > \left(\dfrac{\varepsilon}{4e}\right)^m \dfrac{1}{|a_0(z^*)|}$. Обозначим через B_{z^*} объединение тех связных компонентов множества A_{z^*}, которые имеют непустое пересечение с кольцом $2R_0 < |w| < R$. Это множество вместе со своим замыканием содержится в кольце $2R_0 - \varepsilon < |w| < R + \varepsilon$. Поэтому при $w \in B_{z^*}$ справедливо неравенство

$$|\varphi_1(z^*w, w)| \leqslant \max_{w \in \partial B_{z^*}} |\varphi_1(z^*w, w)| \leqslant$$
$$\leqslant \frac{1}{|a_0(z^*)|}\left(\frac{\varepsilon}{4e}\right)^m \max_{2R_0 - \varepsilon < |w| < R + \varepsilon} |\varphi(z^*w, w)|. \tag{10}$$

Вне множества B_{z^*} справедливо неравенство

$$|\varphi_1(z^*w, w)| \leqslant \left(\frac{\varepsilon}{4e}\right)^m \frac{|\varphi(z^*w, w)|}{|a_0(z^*)|}. \tag{11}$$

Из (10), (11) следует, что при $z^* \in E^*$

$$\max_{2R_0 < |w| < R} |\varphi_1(z^*w, w)| \leqslant \left(\frac{\varepsilon}{4e}\right)^m \max_{2R_0 - \varepsilon < |w| < R + \varepsilon} |\varphi(z^*w, w)|. \tag{12}$$

Функция $u(z^*) = \max_{2R_0 < |w| < R} |\varphi_1(z^*w, w)|$ является плюрисубгармонической функцией от z^* и для нее, в частности, в плоскости переменного z_1 справедлив принцип максимума. Отметим также, что $a_0(z^*)$ является полиномом и, стало быть, представимо в виде $a_0(z^*) = \sum_{l=0}^{m_1} a_l^{(1)} z_{n-1}^{m_1 - l}$, где $a_l^{(1)}$ — полиномы от переменных $z_1, \ldots, z_{n-2}$. Поэтому возможно повторение рассуждений, проведенных при доказательстве (12), в результате чего заключаем, что $\max_{2R_0 < |w| < R} |\varphi_1(z^*w, w)| \leqslant |a_0^{(1)}(z_1, \ldots, z_{n-2})|^{-1} \times$

$\times \left(\frac{\varepsilon}{4e}\right)^{m+m_1} \max_{2R_0-\varepsilon<|w|<R+\varepsilon,\ |z_{n-1}|<2\varepsilon} |\varphi(z^*w,\ w)|$. Повторив эту процедуру еще $n-2$ раза, получим неравенство $\max_{2R_0<|w|<R,\ z^*\in E^*} \times$ $\times\, |\varphi_1(z^*w,\ w)| \leqslant C_\varepsilon \max_{2R_0-\varepsilon<|w|<R+\varepsilon,\ z^*\in E^*} |\varphi(z^*w,\ w)|$, из которого немедленно следует, что

$$\max_{2R_0<|z|<R,\ z\in\pi^{-1}\omega_1} |\varphi_1(z)| \leqslant \max_{\frac{2R_0}{1+n\varepsilon}<|w|<\frac{R}{1-n\varepsilon},\ z^*\in E^*} |\varphi(z^*w,\ w)| \leqslant$$

$$\leqslant C_\varepsilon \max_{\frac{2R_0}{1+n\varepsilon}-\varepsilon<|w|<\frac{R}{1-n\varepsilon}+\varepsilon,\ z^*\in E^*} |\varphi(z^*w,\ w)| \leqslant$$

$$\leqslant C_\varepsilon \max_{z\in\pi^{-1}\omega,\ (1-n\varepsilon)\left(\frac{2R_0}{1+n\varepsilon}-\varepsilon\right)<|z|<(1+n\varepsilon)\left(\frac{R}{1-n\varepsilon}+\varepsilon\right)} |\varphi(z)|. \tag{13}$$

До сих пор число ε было произвольно, теперь выберем его так, чтобы выполнялись неравенства $\left(\frac{R}{1-n\varepsilon}+\varepsilon\right)(1+n\varepsilon) \leqslant (1+\delta)R$; $\left(\frac{2R_0}{1+n\varepsilon}-\varepsilon\right)(1-n\varepsilon) > R_0$. Тогда из (13) получаем $\max_{z\in\pi^{-1}\omega,\ 2R_0<|z|<R} \times$ $\times\, |\varphi_1(z)| \leqslant C_\delta \max_{z\in\pi^{-1}\omega,\ R_0<|z|<(1+\delta)R} |\varphi(z)|$.

Лемма доказана.

При наличии лемм 1—3 доказательство теоремы 1 проводится следующим образом.

Пусть P, f, α, ε — те же, что и в условии тоОремы 1 и пусть $\varepsilon' \in (0,\ \varepsilon)$. Согласно лемме 2 для каждой точки $\varkappa \in \boldsymbol{P}^{n-1}$ найдутся ее окрестность $\omega_\varkappa$ и число $P_\varkappa$ такие, что в соответствующей им области $G_\varkappa = \{z : z\in\pi^{-1}\omega_\varkappa,\ |z| > R_\varkappa\}$ существует функция $F_\varkappa \in H(G_\varkappa)$, которая совпадает с f на $G_\varkappa \cap \Lambda_P$ и при некоторых C_ε и N'_ε удовлетворяет условию

$$\max_{z\in G_\varkappa,\ |z|<R} |F_\varkappa(z)| \leqslant C_\varepsilon (1+R^2)^{N'_\varepsilon} e^{\alpha\left(\left(1+\frac{\varepsilon'}{2}\right)R\right)}. \tag{14}$$

Поставим в соответствие каждой точке $\varkappa \in \boldsymbol{P}^{n-1}$ какую-нибудь ее окрестность $\omega'_\varkappa \subset\subset \omega_\varkappa$ и выберем конечную систему окрестностей $\omega_j = \omega'_{\varkappa_j}$, $1 \leqslant j \leqslant \mu$, образующую покрытие пространства $\boldsymbol{P}^{n-1}$. Соответствующие им области $G'_{\varkappa_j} = \{z : z\in\pi^{-1}\omega_j,\ |z| > R_{\varkappa_j}\}$ и функции $F_{\varkappa_j}$ обозначим для краткости через G_j и F_j соответственно. Рассмотрим далее на $\boldsymbol{P}^{n-1}$ разбиение единицы $(\eta_\nu,\ j_\nu)$, $\nu = 1, \ldots, \mu'$, подчиненное покрытию $\{\omega_j\}$. Каждая функция η_ν может трактоваться как функция из $C^\infty(C^n \setminus \{0\})$, удовлетворяющая условию $\eta_\nu(wz) = \eta_\nu(z)$, $\forall w \in \boldsymbol{C}\setminus\{0\}$. Обозначим $R_0 = \max R_{\varkappa_j}$, а через $\eta_0(z)$ обозначим какую-нибудь функцию, удовлетворяющую условиям: $\eta_0(z) = 1$ при $|z| \leqslant R_0$, $\eta_0(z) = 0$ при $|z| > 2R_0$, $\eta(z) \in C^\infty(\boldsymbol{C}^n)$. Положим

$$\Psi_\nu = \frac{(1-\eta_0)\,\eta_\nu}{\eta_0 + \sum\limits_j (1-\eta_0)\,\eta_j},\ \nu = 1, \ldots, \mu';\quad \Psi_0 = \frac{\eta_0}{\eta_0 + \sum\limits_j (1-\eta_0)\,\eta_j}.$$

Очевидно, что функции Ψ_ν, $\nu=0, \ldots, \mu'$ обладают всеми свойствами функций, образующих разбиение единицы, исключая свойство финитности.

Дополним систему функций $\{F_j\}_{j=1}^{\mu}$ какой-нибудь функцией $F_0 \in H(G_0)$, совпадающей с f на $\Lambda_p \cap G_0$. Далее, подобно тому как это делается при доказательстве разрешимости первой проблемы Кузена (см. [1]), рассмотрим функции $F_{i,j}=\frac{F_i-F_j}{P}$,
$\alpha_{i,\nu}=\begin{cases} F_{i,j_\nu}\Psi_\nu, & \forall z \in G_i \cap G_{j_\nu}, \\ 0 & , \forall z \in G_i \setminus G_{j_\nu} \end{cases}$ и функции $b_i=\sum\limits_\nu \alpha_{i,\nu}$. Легко видеть, что функция $\alpha_{i,\nu}$ и b_i принадлежат классу $C^\infty(G_i)$ и

$$b_i-b_j=F_{i,j}. \tag{15}$$

Кроме того заметим, что как следует из леммы 3 и наравенств (14) при некоторых C_ε' и N_ε справедлива следующая оценка функции $F_{i,j}$;

$$|F_{i,j}(z)| \leqslant C_\varepsilon' (1+|z|^2)^{N_\varepsilon} e^{\alpha((1+\varepsilon)|z|)}. \tag{16}$$

Из (15) вытекает, что $\bar\partial b_j=\bar\partial b_i$ на $G_j \cap G_i$ и, следовательно, равенствами $u=\bar\partial b_i$ на G_i, $i=0, 1, \ldots, \mu$, корректно определена внешняя дифференциальная форма $u \in C^\infty_{(0,1)}(\boldsymbol{C}^n)$. Очевидно, $\bar\partial u=0$. Положим $\varphi_\varepsilon=2\alpha((1+\varepsilon)|z|)+2N_\varepsilon'' \ln(1+|z|^2)$, где $N_\varepsilon''=N_\varepsilon+$ $+n/4+1/2$.

Ввиду выпуклости относительно $\ln r$ и монотонного возрастания функции $\alpha(r)$ функция $\varphi_\varepsilon(z)$ является плюрисубгармонической. С помощью леммы 3, используя оценки (14), нетрудно установить, что

$$\int\limits_{\boldsymbol{C}^n} |u^2 e^{-\varphi_\varepsilon}\, dV < \infty. \tag{17}$$

Действительно, $\int\limits_{\boldsymbol{C}^n} |u|^2 e^{-\varphi_\varepsilon}\, dV \leqslant \sum\limits_i \int\limits_{G_i} |\bar\partial b_i|^2 e^{-\varphi_\varepsilon}\, dV \leqslant \sum\limits_i \sum\limits_\nu \times$
$\times \int\limits_{G_i \cap G_{j_\nu}} |F_{i,j_\nu}|^2 |\bar\partial \Psi_\nu|^2 e^{-\varphi_\varepsilon}\, dV \leqslant \mu'\mu C_\varepsilon \max\limits_\nu \max\limits_{\boldsymbol{C}^n} |\bar\partial \Psi_\nu|^2 \int (1+|z|^2)^{2N_\varepsilon} \times$
$\times e^{2\alpha((1+\varepsilon)|z|)} e^{-\varphi_\varepsilon}\, dV \leqslant \mathrm{const} \int\limits_{\boldsymbol{C}^n} \frac{dV}{(1+|z|^2)^{n/2+1}} < \infty.$

Согласно теореме 4.4.2 из [1] выполнение условия (17) вместе с замкнутостью формы u обеспечивают существование функции $U \in L^2(\boldsymbol{C}^n)$ такой, что $\bar\partial U=u$ и

$$\int\limits_{\boldsymbol{C}^n} |U|^2 e^{-\varphi_\varepsilon} (1+|z|^2)^{-2}\, dV < \infty. \tag{18}$$

Положим $g_j = U - b_j$, $j = 0, 1, \ldots, \mu$. Так как $\partial g_j = \bar\partial U - \bar\partial b_j$, то $g_j \in H(G_j)$. Далее полагаем $(F(z) = F_j(z) - g_j(z) P(z)$, $\forall z \in G_j$. Это определение корректно, поскольку согласно (15) на $G_i \cap G_j$ $(F_j - g_j P) - (F_i - g_i P) = F_j - F_i + PF_{ij}) = 0$. Отметим, что $F \subset H(C^n)$ и $F(z) = f(z)$, $\forall z \in \Lambda_p$.

Обозначим $\psi_\varepsilon = \varphi_\varepsilon + (m+2)\ln(1 + |z|^2)$, где $m = \deg P$, и покажем, что

$$\int\limits_{C^n} |F|^2 e^{-\psi_\varepsilon}\, dV = M < \infty. \tag{19}$$

Действительно, из определения F, F_j, $F_{i,j}$, g_i, b_j и ψ_ε следует, что

$$\begin{aligned}
\int\limits_{C^n} |F|^2 e^{-\psi_\varepsilon}\, dV &\leqslant 2\sum_i \int\limits_{G_i} |F_i|^2 e^{-\psi_\varepsilon}\, dV + 2\sum_i \int\limits_{G_i} |g_i|^2 |P|^2 e^{-\psi_\varepsilon}\, dV \leqslant \\
&\leqslant 2\sum_i \int\limits_{G_i} |F_i|^2 e^{-\psi_\varepsilon}\, dV + 4\sum_i \int\limits_{G_i} |U|^2 |P|^2 e^{-\psi_\varepsilon}\, dV + \\
&+ 4\sum_i \int\limits_{G_i} |b_i|^2 |P|^2 e^{-\psi_\varepsilon}\, dV \leqslant 2\sum_i \int\limits_{G_i} |F_i|^2 e^{-\psi_\varepsilon}\, dV + \\
&+ 4\sum_i \int\limits_{G_i} |U|^2 |P|^2 e^{-\psi_\varepsilon}\, dV + 4\sum_i\sum_\nu \int\limits_{G_i \cap G_{j_\nu}} |F_i - F_{j_\nu}|^2 e^{-\psi_\varepsilon}\, dV \leqslant \\
&\leqslant 2\sum_i \int\limits_{G_i} |F_i|^2 e^{-\psi_\varepsilon}\, dV + 4\sum_i \int\limits_{G_i} |U|^2 |P|^2 e^{-\psi_\varepsilon}\, dV + \\
&+ 8\sum_i\sum_\nu \Big\{ \int\limits_{G_i} |F_i|^2 e^{-\psi_\varepsilon}\, dV + \int\limits_{G_{j_\nu}} |F_{i,j_\nu}|^2 e^{-\psi_\varepsilon}\, dV \Big\}.
\end{aligned} \tag{20}$$

Из неравенства (14) следует, что

$$\int\limits_{G_i} |F_i|^2 e^{-\psi_\varepsilon}\, dV < \infty. \tag{21}$$

Далее, применяя неравенства (18), получаем

$$\int\limits_{G_i} |U|^2 |P|^2 e^{-\psi_\varepsilon}\, dV \leqslant \int\limits_{C^n} \frac{|U|^2 e^{-\varphi_\varepsilon}}{(1 + |z|^2)^2} \frac{|P|^2}{(1 + |z|^2)^m}\, dV < \infty.$$

Отсюда и из (20), (21) заключаем о справедливости неравенства (19).

Теперь функция $F(z)$ может быть оценена стандартным образом, а именно:

$$\infty > M = \int\limits_{C^n} |F|^2 e^{-\psi_\varepsilon}\, dV \geqslant \int\limits_{|z - z^0| < 1} |F|^2 e^{-\psi_\varepsilon}\, dV \geqslant$$

$$\geqslant (\max_{|z|=|z^0|+1} |\psi_\varepsilon(z)|)^{-1} \int\limits_{|z-z^0|<1} |F|^2 dV \geqslant$$
$$\geqslant \omega_n |F(z^0)|^2 \exp\{-2\alpha((1+\varepsilon)(1+|z^0|^2)) - - (2N''_\varepsilon + m + 2)\ln(1+(1+|z^0|^2)\}, \qquad (22)$$

откуда следует, что

$$\ln M_F(R) \leqslant \text{const} + \alpha((1+\varepsilon)R) + N_\varepsilon \ln(1+R^2),$$

где $N_\varepsilon = N''_\varepsilon + m + 2$. Теорема доказана.

3. Доказательство теоремы 2. Прежде всего заметим, что данный в условии теоремы уточненный порядок $\rho(t)$ можно, не нарушая общности*, считать удовлетворяющим условию

$$\lim_{t\to\infty} \rho''(t)\, t^2 \ln t = 0. \qquad (23)$$

Тогда, как показывает непосредственный подсчет, для функции $L(r) = \sigma r^{\rho(r)}$, где $\sigma = \sigma(f;\ \Lambda_P)$, начиная с некоторого $r = r_0$, выполняются неравенства: $L'(r) > 0$, $(rL'(r))' > 0$, и следовательно, $L(r)$ является выпуклой относительно $\ln r$ монотонно растущей функцией. Поскольку изменение функции $\rho(r)$ на любом конечном интервале не влечет изменения величин $\sigma(f;\ \Lambda_P)$ и $\sigma(F)$, то эти свойства выпуклости и монотонности можно считать выполненными на всей оси. Как следует из известных свойств уточненного порядка, для любого $\delta > 0$ существует такое $\delta^* = \delta^*(\delta)$, что при всех r, начиная с некоторого, выполняется неравенство $L((1+\delta^*)r) \leqslant (\sigma+\delta) r^{\rho(r)}$.

Зададимся теперь какой-нибудь стремящейся к нулю, монотонно убывающей последовательностью положительных чисел ε_1, ε_2, ... Используя теорему 1 с $\alpha(t) = L(t)$ и $\varepsilon = \delta^*(\varepsilon_j)$, получаем, что для любого $j = 1, 2, \ldots$ существует целая функция $F_j(z)$, совпадающая с $f(z)$ на Λ_P и при некоторых постоянных C_j и N_j, удовлетворяющая условию

$$\ln M_{F_j}(R) \leqslant C_j + N_j \ln(1+R^2) + L((1+\delta^*(\varepsilon_j))R). \qquad (24)$$

Выберем числа R_j, $R_j > R_{j-1} + 2$, $j = 1, 2, \ldots$ и $R_0 > 2$, так чтобы $C_j + N_j \ln(1+R^2) + L((1+\delta^*(\varepsilon_j))R) \leqslant (\sigma + \varepsilon_{j-1}) R^{\rho(R)}$, $\forall R > R_{j-2}$. Далее возьмем какую-либо функцию $\beta(t)$, удовлетворяющую условиям: $\beta(t) \in C^\infty(\mathbf{R})$, $0 \leqslant \beta(t) \leqslant 1$, $\forall t \in \mathbf{R}$, $\beta(t) = 1$, $\forall t < 0$, $\beta(t) = 0$, $\forall t > 2$, и положим $\eta_0(t) = \beta(t - R_0 + 1)$, $\eta_j(t) = (1 - \beta(t - R_{j-1} + 1))\beta(t - R_j + 1)$, $j = 1, 2, \ldots$ Функции $\psi_j(z) = \eta_j(|z|)$ образуют, очевидно, разбиение единицы подчиненное покрытию пространства $\mathbf{C}^n$ областями $G_0 = \{z : |z| < R_0 + 2\}$, $G_j = \{z : R_{j-1} - 2 < |z| < R_{j+2}\}$, $j = 1, 2, \ldots$ Зададим на G_j

---

* Известно [7], что для произвольного уточненного порядка $\rho^*(r)$ существует уточненный порядок $\rho(r)$, удовлетворяющий условию (23), и такой, что $\lim\limits_{r\to\infty} r^{\rho^*(r)-\rho(r)} = 1$.

функции b_j, полагая $b_0 = P^{-1}(F_1 - F_0)(\psi_0 - 1)$; $b_j = P^{-1}(F_j - F_{j-1})\psi_{j-1} - P^{-1}(F_{j+1} - F_j)\psi_{j+1}$, $j = 1, 2, \ldots$ Не нарушая общности, полином P можно считать не имеющим кратных делителей. Тогда функции $P^{-1}(F_j - F_{j-1})$ голоморфны в $\boldsymbol{C}^n$, а функции $b_j \in C^\infty(G_j)$.

Заметим, что на $G_j \cap G_{j+1}$

$$b_{j+1} - b_j = P^{-1}(F_{j+1} - F_j) \tag{25}$$

и, стало быть, как и в теореме 1, равенствами $u = \bar{\partial} b_j$ на G_j, $j = 0, 1, 2, \ldots$ в $\boldsymbol{C}^n$ корректно определена замкнутая форма $u \in C^\infty_{(0,1)}(\boldsymbol{C}^n)$.

Пусть теперь $\gamma(t)$ — какая-нибудь монотонно убывающая функция, удовлетворяющая условиям

$$\gamma(t) > \frac{1}{\sigma}\varepsilon_{j-1}, \ \forall t \in (R_j, R_{j+1}),$$

и пусть $\varphi(z) = 2L(|z|) + 2\gamma(|z|)L(|z|) + \left(\frac{n}{2} + 1\right)\ln(1 + |z|^2)$.

С помощью леммы 3, применяемой к функциям $P^{-1}(F_{j+1} - F_j)$, легко проверить, что $\int\limits_{\boldsymbol{C}^n} |u|^2 e^{-\varphi}\, dV < \infty$.

Как известно [7—9], функцию $\gamma(r)$ можно выбрать так, чтобы $\lim\limits_{r\to\infty} \gamma(r) = 0$ и чтобы функция $\gamma(|z|)L(|z|)$ была плюрисубгармонической. В этом случае функция $\varphi(z)$ является плюрисубгармонической и согласно упоминавшейся теореме 4.4.2 из [1] уравнение $\bar{\partial} U = u$ имеет решение $U \in L^2(\mathrm{loc})$, удовлетворяющее условию

$$\int\limits_{\boldsymbol{C}^n} |U|^2 e^{-\varphi}(1 + |z|^2)^{-2}\, dV < \infty. \tag{26}$$

Теперь, как и при доказательстве теоремы 1, полагаем $g_j = U - b_j$ и $F = F_j - g_j P$ на G_j.

Корректность определения функции F следует из (25). Очевидно, что $F(z) = f(z)$, $\forall z \in \Lambda_P$. Используя (24), (26), нетрудно показать, что $\int\limits_{\boldsymbol{C}^n} |F|^2 e^{-\varphi - 2\ln(1+|z|^2)}\, dV < \infty$. Отсюда с помощью тех же рассуждений, что и при выводе неравенства (22), заключаем, что $\ln M_F(r) \leqslant \mathrm{const} + \varphi(r+1) + 2\ln(1 + r^2)$. Следовательно,

$$\sigma(F) \leqslant \varlimsup_{r\to\infty} \frac{\varphi(r+1)}{r^{\rho(r)}} = \varlimsup_{r\to\infty} \frac{(\sigma + \gamma(r))(r+1)(r+1)^{\rho(r+1)}}{r^{\rho(r)}} = \\ = \sigma = \sigma(f : \Lambda_P).$$

Неравенство $\sigma(f; \Lambda_P) \leqslant \sigma(F)$ очевидно и значит, $\sigma(F) = \sigma(f; \Lambda_P)$. Теорема доказана.

Список литературы: **1.** *Хермандер Л.* Введение в теорию функций нескольких переменных. — М.: Мир, 1968. — 375 с. **2.** *Паламодов В. П.* Линейные дифференциальные операторы с постоянными коэффициентами. — М.: Наука, 1967. — 620 с. **3.** *Björk I. — E.* On extensions of holomorphic functions sutisfying a polynomial growth condition an algebraic varieties in C^n. — Ann. de l'Institut Fourier, Grenoble, 1974, **24**, № 4, p. 157 — 165. **4.** *Ронкин Л. И.* О продолжении функции конечного порядка, голоморфной на нулевом множестве полинома от двух переменных. — Теория функций, функц. анализ и их приложения, 1979, вып. 32, с. 70—77. **5.** *Левин Б. Я.* Распределение корней целых функций. — М.: Гостехиздат, 1956. — 632 с. **6.** *Леонтьев А. Ф.* Ряды экспонент. — М.: Наука, 1976. —678 с. **7.** *Martineau A.* Indicatrices de croissancedes fonctions entiere de N variables. — Invent. Math., Berlin, 1967, **3**, p. 16 — 19. **8.** *Ронкин Л. И.* Введение в теорию целых функций многих переменных. — М.: Наука, 1971. — 430 с. **9.** *Агранович П. З.* О существовании голоморфной в конусе функции с заданным индикатором при уточненном порядке. — Теория функций, функц. анализ и их приложения, вып. 24, 1975, с. 3—15

Поступила 15 декабря 1979 г.