УДК 517.9

Т. В. МИСЮРА

АППРОКСИМАЦИЯ ПЕРИОДИЧЕСКОГО ПОТЕНЦИАЛА ОПЕРАТОРА ДИРАКА КОНЕЧНОЗОННЫМИ

Дифференциальная операция

$$D=\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}\frac{d}{dx}+\begin{pmatrix} P(x) & r(x) \\ r(x) & -P(x) \end{pmatrix},$$

где $p(x)$, $r(x)$ — вещественные локально суммируемые в квадрате функции, называется операцией Дирака, а функция $q(x) = -r(x)+ip(x)$ — ее потенциалом. Дифференциальная операция Дирака с периодическим $(q(x+\pi)\equiv q(x))$ потенциалом порождает в гильбертовом пространстве $\vec{L}_2(-\infty, \infty)$ вектор-функций $\vec{y}(x) = (y_1(x), y_2(x))$ самосопряженный оператор, спектр которого непрерывен и состоит из последовательности сегментов, называемых зонами. Если число этих зон конечно, то соответствующий потенциал называют конечнозонным.

Ранее [3] мы доказали, что множество конечнозонных потенциалов плотно в пространстве $L_2[0, \pi]$ всех периодических потенциалов. В настоящей работе дается явная конструкция последовательности конечнозонных потенциалов $\{q_i(x)\}$, сходящейся к данному потенциалу $q(x)$ и оценивается скорость сходимости.

§ 1. Сформулируем в удобной для дальнейшего форме некоторые известные результаты, относящиеся к обратной задаче теории рассеяния для операторов Дирака [5].

I. Уравнение Дирака

$$D\overrightarrow{y} = \lambda\overrightarrow{y} \quad (0 \leqslant x < \infty)\,(-\infty < \lambda < \infty) \tag{1}$$

с потенциалом $g(x) \in L_1[0, \infty) \cap L_2[0, \infty)$ имеет фундаментальную систему решений $\overrightarrow{v}(\lambda, x)$, $\overline{\overrightarrow{v}(\lambda, x)}$, представимую в виде:

$$\overrightarrow{v}(\lambda, x) = \overrightarrow{v_0}(\lambda, x) + \int_x^\infty K(x, t)\,\overrightarrow{v_0}(\lambda, t)\,dt, \tag{2}$$

где

$$\overrightarrow{v_0}(\lambda, x) = e^{-i\lambda x}\overrightarrow{e} \quad \left(\overrightarrow{e} = (1, i)\right) \tag{3}$$

— решение уравнения Дирака с потенциалом тождественно равным нулю, причем для функций

$$\varphi(x, t) = \left(K(x, t)\,\overrightarrow{\overline{e}}, \overrightarrow{\overline{e}}\right) \ (4); \qquad \psi(x, t) = \left(K(x, t)\,\overrightarrow{e}, \overrightarrow{\overline{e}}\right) \tag{5}$$

справедливы следующие оценки:

$$|\varphi(x, t)| \leqslant \sigma_2(x)\,\sigma_2\left(\frac{x+t}{2}\right)\operatorname{ch}\sigma_1(x), \tag{6}$$

$$|\psi(x, t)| \leqslant \sigma_2(x)\,\sigma_2\left(\frac{x+t}{2}\right)\operatorname{sh}\sigma_1(x) + \left|q\left(\frac{x+t}{2}\right)\right|, \tag{7}$$

где

$$\sigma_j(x) = \left[\int_x^\infty |q(\xi)|^j\,d\xi\right]^{\frac{1}{j}} \quad (j = 1, 2) \tag{8}.$$

II. Оператор D^∞, порождаемый операцией Дирака D с потенциалом $q(x) \in L_1[0, \infty) \cap L_2[0, \infty)$ на дифференцируемых вектор-функциях $\overrightarrow{y}(x)$ $(\overrightarrow{y}(x) \in \overrightarrow{L_2}[0, \infty)$, $\overrightarrow{y}'(x) \in \overrightarrow{L_2}[0, \infty))$, удовлетворяющих граничному условию $y_1(0) = 0$, самосопряжен; его спектр непрерывен и заполняет всю вещественную ось.

Та же операция D, рассматриваемая на дифференцируемых вектор-функциях $\overrightarrow{y}(x)$ $(\overrightarrow{y}(x) \in \overrightarrow{L_2}[0, \pi]$, $\overrightarrow{y}'(x) \in \overrightarrow{L_2}[0, \pi])$, удовлетворяющих граничному условию $y_1(0) = y_1(\pi) = 0$, порождает в пространстве $\overrightarrow{L_2}[0, \pi]$ самосопряженный оператор D^π с дискретным спектром: $\cdots < \lambda_{-k} < \cdots < \lambda_{-1} < \lambda_0 < \lambda_1 < \cdots < \lambda_k < \cdots$.

Равенства Парсеваля, порождаемые формулами разложения по собственным функциям операторов D^∞ и D^π, имеют вид:

$$\frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty} \frac{w(\lambda, \overrightarrow{G_1})\,\overline{w(\lambda, \overrightarrow{G_2})}}{|v_1(\lambda, 0)|^2}\,d\lambda = \int_0^\infty (\overrightarrow{G_1}(x), \overrightarrow{G_2}(x))\,dx;$$

$$\sum_{k=-\infty}^{\infty} \frac{w(\lambda_k, \overrightarrow{G_1})\,\overline{w(\lambda_k, \overrightarrow{G_2})}}{\left\|\overrightarrow{w}(\lambda_k, x)\right\|^2} = \int_0^\pi (\overrightarrow{G_1}(x), \overrightarrow{G_2}(x))\,dx,$$

где $\overrightarrow{w}(\lambda, x) = (w_1(\lambda, x), w_2(\lambda, x))$ — решение уравнения (1) при начальных данных $\vec{w}(\lambda, 0)=(0, 1)$, $w(\lambda, \vec{G}_j)=\int\limits_0^\infty (\vec{G}_j(x), \overline{\vec{w}}(\lambda, x))\,dx$, λ_k (собственные значения оператора D^π) — корни уравнения $w_1(\lambda, \pi)=0$.

В частности, если вектор-функция $\vec{G}(x)\in \vec{L}_2[0, \pi]$ и продолжена нулем на полуось $[\pi, \infty)$, то

$$\frac{1}{\pi}\int\limits_{-\infty}^{\infty}\frac{|w(\lambda, \vec{G})|^2}{|v_1(\lambda, 0)|^2}\,d\lambda=\sum_{k=-\infty}^{\infty}\frac{|w(\lambda_k, \vec{G})|^2}{\|\vec{w}(\lambda_k, x)\|^2}. \tag{9}$$

III. Решения $\vec{w}(\lambda, x)$ и $\vec{v}(\lambda, x)$ связаны между собой равенством

$$\vec{w}(\lambda, x)=\frac{1}{2i}\left\{\overline{v_1(\lambda, 0)}\,\vec{v}(\lambda, x)-v_1(\lambda, 0)\,\overline{\vec{v}(\lambda, x)}\right\}=$$

$$=\frac{\overline{v_1(\lambda, 0)}}{2i}\left\{\vec{v}(\lambda, x)-S(\lambda)\,\overline{\vec{v}(\lambda, x)}\right\}, \tag{10}$$

причем коэффициент

$$S(\lambda)=v_1(\lambda, 0)\,[\overline{v_1(\lambda, 0)}]^{-1} \tag{11}$$

называется s-функцией оператора D^∞

(S-функция однозначно определяет оператор D^∞).

Если $q(x)=0$ при $x>\pi$, то в силу (2) при $x>\pi$ $\vec{v}(\lambda, x)=e^{-i\lambda x}\vec{e}$, откуда, используя равенство (10), находим, что в этом случае

$$v_1(\lambda, 0)=[w_2(\lambda, \pi)-iw_1(\lambda, \pi)]\,e^{-i\lambda\pi}. \tag{12}$$

IV. Пусть операторам D_1^∞, D_2^∞ с потенциалами $q_1(x)$, $q_2(x)$ отвечают s-функции $S_1(\lambda)$, $S_2(\lambda)$ и операторы преобразования (2) с ядрами $K_1(x, t)$ и $K_2(x, t)$. При исследовании устойчивости восстановления потенциала $q(x)$ по s-функции было установлено следующее тождество [6]:

$$q_1(x)-q_2(x)=i\int\limits_{-\infty}^{\infty}\Big(\mathrm{Re}\,\Big\{[S_2(\lambda)-S_1(\lambda)]\Big[\mathscr{E}_1(\lambda, x)\,C\mathscr{E}_2^{\mathrm{T}}(\lambda, x)\,B-$$

$$-B\mathscr{E}_1(\lambda, x)\,C\mathscr{E}_2^{\mathrm{T}}(\lambda, x)\Big]\Big\}\vec{e}, \vec{e}\Big)\,d\lambda, \tag{13}$$

где вектор $\vec{e}$ тот же, что и в (3),

$$C=\begin{pmatrix}1 & -i\\ -i & -1\end{pmatrix};\quad B=\begin{pmatrix}0 & 1\\ -1 & 0\end{pmatrix};\quad \mathscr{E}_j(\lambda, x)=e^{i\lambda x}I+\int\limits_x^\infty K_j(x, t)\,e^{i\lambda t}\,dt$$

$$(j=1, 2).$$

§ 2. В работах [2, 3] установлено взаимнооднозначное соответствие между потенциалами $q(x)$ операторов Дирака и последовательностями вещественных чисел $\vec{h}=\{h_k\}, -\infty<k<\infty$ ($h_k\geqslant 0$, $\sum h_k^2<\infty$) и точек $\{k\pi+ih_k^*\}$ $(-h_k\leqslant h_k^*\leqslant h_k)$, лежащих на одном из берегов разреза $\operatorname{Re}\theta=k\pi$, $|\operatorname{Im}\theta|\leqslant h_k$. При этом конечнозонным потенциалам соответствуют последовательности, у которых лишь конечное число h_k отлично от нуля.

Пусть потенциалу $q(x)$ $(q(x+\pi)\equiv q(x)$, $q(x)\in L_2[0, \pi]\cap L_1[0, \pi])$ отвечают последовательности $\{h_k\}$, $\{k\pi+ih_k^*\}$. Рассмотрим «усеченные» последовательности $\{h_k(N)\}$, $\{k\pi+ih_k^*(N)\}$, определяемые формулами

$$h_k(N)=\begin{cases} h_k & |k|\leqslant N\\ 0 & |k|>N,\end{cases}\qquad h_k^*(N)=\begin{cases} h_k^* & |k|\leqslant N,\\ 0 & |k|>N.\end{cases}$$

Согласно предыдущему, отвечающие этим усеченным последовательностям потенциалы $q_N(x)$ не более, чем $(2N+2)$-зонные.

Нашей задачей является оценка нормы разности $\|q(x)-q_N(x)\|_{L_2[0,\pi]}=\left[\int\limits_0^\pi|q(x)-q_N(x)|^2\,dx\right]^{\frac{1}{2}}$ через нормы последовательностей $\|\vec{h}\|=\left[\sum\limits_{k=-\infty}^{\infty}h_k^2\right]^{\frac{1}{2}}$, $\|\vec{h}-h(N)\|=\left[\sum\limits_{k=-\infty}^{\infty}(h_k-h_k(N))^2\right]^{\frac{1}{2}}=\left[\sum\limits_{|k|>N}h_k^2\right]^{\frac{1}{2}}$.

Теорема. *Любой периодический потенциал $q(x)$ $(q(x+\pi)\equiv q(x))$ оператора Дирака может быть аппроксимирован последовательностью сходящихся к нему в пространстве $L_2[0, \pi]$ конечнозонных потенциалов $q_N(x)$ описанной выше конструкции, причем скорость аппроксимации характеризуется неравенством*

$$\|q(x)-q_N(x)\|_{L_2[0,\pi]}\leqslant\|\vec{h}-\vec{h}(N)\|\left[1+2\|\vec{h}-\vec{h}(N)\|\right]C(\|\vec{h}\|), \tag{14}$$

где $C(\|\vec{h}\|)\leqslant 16\sqrt{\pi}\left(1+\frac{\pi^2}{2}\|\vec{h}\|\right)^5 e^{7\|\vec{h}\|}$.

Доказательство. Введем операторы $\tilde{D}^\infty$, $\tilde{D}_N^\infty$ с потенциалами

$$\tilde{q}(x)=\begin{cases} q(x) & x\in[0, \pi],\\ 0 & x\in(\pi, \infty);\end{cases}\qquad \tilde{q}_N(x)=\begin{cases} q_N(x) & x\in[0, \pi],\\ 0 & x\in(\pi, \infty).\end{cases}$$

Заметим, что потенциалы $\tilde{q}(x)$, $\tilde{q}_N(x)$ принадлежат пространству $L_2[0, \infty)\cap L_1[0, \infty)$, причем $\|q(x)-q_N(x)\|_{L_2[0,\pi]}=\|\tilde{q}(x)-\tilde{q}_N(x)\|_{L_2[0,\pi]}=\|\tilde{q}(x)-\tilde{q}_N(x)\|_{L_2(0,\infty)}$.

Условимся в дальнейшем все объекты, относящиеся к оператору $\tilde{D}_N^\infty$ снабжать индексом N. Например, $S(\lambda)$ — s-функция оператора $\tilde{D}^\infty$, $S_N(\lambda)$ — s-функция оператора $\tilde{D}_N^\infty$; $K(x, t)$ — ядро оператора преобразования (2) для оператора $\tilde{D}^\infty$, а $K_N(x, t)$ — для оператора $\tilde{D}_N^\infty$ и т. д.

Согласно формуле (13) $\tilde{q}(x) - \tilde{q}_N(x) = i \int\limits_{-\infty}^{\infty} (\mathrm{Re}\{[S_N(\lambda) - S(\lambda)] [\mathscr{E}(\lambda, x) C \mathscr{E}_N^{\mathrm{T}}(\lambda, x) B - B \mathscr{E}(\lambda, x) C \mathscr{E}_N^{\mathrm{T}}(\lambda, x)]\} \vec{e}, \vec{e}) \, d\lambda$. Введя для краткости обозначения $\Delta_N(x) = \tilde{q}(x) - \tilde{q}_N(x)$; $\Delta_N(\lambda) = S(\lambda) - S_N(\lambda)$ и замечая, что $B^* = B^{\mathrm{T}} = -B$, $B\vec{e} = i\vec{e}$, мы можем предыдущее равенство представить в следующем виде:

$$\Delta_N(x) = g(x) + z(x); \quad g(x) = -4 \int\limits_{-\infty}^{\infty} \Delta_N(\lambda) e^{2i\lambda x} \, d\lambda; \tag{15}$$

$$\begin{aligned} z(x) = 2 \int\limits_{-\infty}^{\infty} \Big\{ & \Delta_N(\lambda) e^{i\lambda x} \int\limits_x^\infty [\varphi(x, t) + \varphi_N(x, t)] e^{i\lambda t} \, dt + \\ + \frac{1}{2} \Delta_N(\lambda) & \int\limits_x^\infty \varphi(x, t) e^{i\lambda t} \, dt \int\limits_x^\infty \varphi_N(x, t) e^{i\lambda t} \, dt + \frac{1}{2} \overline{\Delta_N(\lambda)} \times \\ & \times \int\limits_x^\infty \psi(x, t) e^{-i\lambda t} \, dt \int\limits_x^\infty \psi_N(x, t) e^{-i\lambda t} \, dt \Big\} \, d\lambda, \end{aligned} \tag{16}$$

где функции $\varphi(x, t)$ и $\psi(x, t)$ ($\varphi_N(x, t)$, $\psi_N(x, t)$) определяются формулами (4), (5).

Согласно равенству Парсеваля

$$\| g(x) \|_{L_2(-\infty, \infty)} = 2 \sqrt{2\pi} \, \| \Delta_N(\lambda) \|_{L_2(-\infty, \infty)}. \tag{17}$$

Так как потенциалы $\tilde{q}(x)$, $\tilde{q}_N(x)$ равны нулю при $x > \pi$, то функции $\varphi(x, t)$ ($\varphi_N(x, t)$) и $\psi(x, t)$ ($\psi_N(x, t)$) равны нулю при $x + t > 2\pi$, что вытекает из оценок (6), (7). Пользуясь этими оценками, неравенством Буняковского и равенством Парсеваля и замечая, что согласно (8), $\sigma_1(x) \leqslant \sqrt{\pi} \sigma_2(x)$, из равенства (16) получаем следующую оценку: $|z(x)| \leqslant \| \Delta_N(\lambda) \|_{L_2(-\infty, \infty)} (\sigma_2(x) + \sigma_{2N}(x))^2 (1 + \pi \sigma_2(x) \sigma_{2N}(x)) \, \mathrm{ch} [\sqrt{\pi} (\sigma_2(x) + \sigma_{2N}(x))]$, из которой следует, что

$$\begin{aligned} \| z(x) \|_{L_2[0, \pi]} \leqslant \sqrt{\pi} \, \| \Delta_N(\lambda) \| \, (\sigma_2(0) + \sigma_{2N}(0))^2 (1 + \pi \sigma_{2N}(0) \sigma_2(0)) \times \\ \times \mathrm{ch} \left[\sqrt{\pi} (\sigma_2(0) + \sigma_{2N}(0)) \right]. \end{aligned} \tag{18}$$

Потенциалы $\tilde{q}_N(x)$ конечнозонны, а значит, бесконечнодифференцируемы (см. теорему IV [2]). Следовательно, для любого N справедливо неравенство (4) работы [3]:

$$\sigma_{2N}^2(0) \leqslant \frac{4}{\pi^2} \sum_{k=-\infty}^{\infty} h_k^2(N) \leqslant \frac{4}{\pi^2} \sum_{k=-\infty}^{\infty} h_k^2 = \frac{4}{\pi^2} \|\vec{h}\|^2. \tag{19}$$

Таким образом, в правой части неравенства (18) $\|\Delta_N(\lambda)\|$ умножается на величину, которую можно оценить константой не зависящей от N. Поэтому, если мы докажем, что

$$\lim_{N\to\infty} \|\Delta_N(\lambda)\| = \lim_{N\to\infty} \|S(\lambda) - S_N(\lambda)\|_{L_2(-\infty,\ \infty)} = 0, \tag{20}$$

то согласно (15), (17), (18) будет доказано, что

$$\lim_{N\to\infty} \|\tilde{q}(x) - \tilde{q}_N(x)\|_{L_2[0,\ \pi]} = 0, \tag{21}$$

откуда в силу определения $\sigma_2(0)$ (8) и неравенства (19) вытекает, что $\sigma_2^2(0)$ также не превышает $\frac{4}{\pi^2}\|\vec{h}\|^2$.

Значит, если справедливо равенство (20), при любом N выполняется неравенство

$$\|\tilde{q}(x) - \tilde{q}_N(x)\| \leqslant \|g(x)\| + \|z(x)\| \leqslant 2\sqrt{2\pi}\|\Delta_N(\lambda)\| \left\{1 + \right. \\ \left. + \sqrt{2}\left\|\vec{h}\right\|^2\left(\pi + 4\left\|\vec{h}\right\|^2\right) \operatorname{ch} 4\left\|\vec{h}\right\|\right\}, \tag{22}$$

показывающее, что скорость сходимости в (21) определяется скоростью стремления к нулю $\|\Delta_N(\lambda)\|$. Оценим теперь $\|\Delta_N(\lambda)\|$.

Из формулы (11) следует, что

$$|S(\lambda) - S_N(\lambda)| = \left|\frac{v_1(\lambda,\ 0)}{\overline{v_1(\lambda,\ 0)}} - \frac{v_{1N}(\lambda,\ 0)}{\overline{v_{1N}(\lambda,\ 0)}}\right| =$$

$$= \left|\frac{v_1(\lambda,\ 0) - v_{1N}(\lambda,\ 0)}{\overline{v_1(\lambda,\ 0)}} + \frac{v_{1N}(\lambda,\ 0)}{\overline{v_{1N}(\lambda,\ 0)}}\left(\frac{\overline{v_{1N}(\lambda,\ 0)} - \overline{v_1(\lambda,\ 0)}}{\overline{v_1(\lambda,\ 0)}}\right)\right| \leqslant$$

$$\leqslant 2\left|\frac{v_1(\lambda,\ 0) - v_{1N}(\lambda,\ 0)}{v_1(\lambda,\ 0)}\right|. \tag{23}$$

Потенциалы $\tilde{q}(x)$, $\tilde{q}_N(x)$ равны нулю при $x > \pi$, следовательно, согласно (12), (23)

$$\|\Delta_N(\lambda)\|^2 \leqslant 4 \int_{-\infty}^{\infty} \frac{[w_2(\lambda,\ \pi) - w_{2N}(\lambda,\ \pi)]^2 + [w_1(\lambda,\ \pi) - w_{1N}[\lambda,\ \pi)]^2}{|v_1(\lambda,\ 0)|^2} d\lambda. \tag{24}$$

Поскольку решения $\vec{w}_N(\lambda,\ x)$ выражаются через решение $\vec{w}(\lambda,\ x)$ с помощью оператора преобразования $\vec{w}_N(\lambda,\ x) = \vec{w}(\lambda,\ x) +$

$+\int\limits_0^x R(x,\ t)\vec{w}(\lambda,\ t)\,dt$, то мы можем воспользоваться равенством (9), преобразовав (24) к виду

$$\|\Delta_N(\lambda)\| \leqslant 4\pi \sum_{k=-\infty}^{\infty} \frac{[w_2(\lambda_k,\ \pi) - w_{2N}(\lambda_k,\ \pi)]^2 + [w_1(\lambda_k,\ \pi) - w_{1N}(\lambda_k,\ \pi)]^2}{\|\vec{w}(\lambda_k,\ x)\|^2}, \tag{25}$$

где λ_k (собственные значения оператора D^π) — корни уравнения $w_1(\lambda,\ \pi) = 0$.

I. Из интегрального уравнения, которому удовлетворяет вектор-функция $\vec{w}(\lambda,\ x)$, $\vec{w}(\lambda,\ x) = \vec{w}_0(\lambda,\ x) + \int\limits_0^x G(x-t)\,\Omega(t)\,\vec{w}(\lambda,\ t)\,dt$;

$$G(y) = \begin{pmatrix} \sin\lambda y & \cos\lambda y \\ -\cos\lambda y & \sin\lambda y \end{pmatrix},\quad \Omega(t) = \begin{pmatrix} P(t) & r(t) \\ r(t) & -P(t) \end{pmatrix},\quad \vec{w}_0(\lambda,\ x) = \begin{pmatrix} \sin\lambda x \\ -\cos\lambda x \end{pmatrix},$$

следует, что $\sqrt{\pi} = \|\vec{w}_0(\lambda,\ x)\| \leqslant \|\vec{w}(\lambda_k,\ x)\| + \|\int\limits_0^x G(x-t)\,\Omega(t) \times \vec{w}(\lambda_k,\ t)\,dt\| \leqslant \|\vec{w}(\lambda_k,\ x)\| + \sqrt{\pi}\,\sigma_2(0)\,\|\vec{w}(\lambda_k,\ x)\|$, т. е.

$$\frac{1}{\|\vec{w}(\lambda_k,\ x)\|^2} \leqslant \frac{1}{\pi}\,[1 + \sqrt{\pi}\,\sigma_2(0)]^2. \tag{26}$$

II. Обозначим через λ_{kN} корни уравнения $w_{1N}(\lambda,\ \pi) = 0$. Поскольку функции $w_{1N}(\lambda,\ \pi)$, $w_{2N}(\lambda,\ \pi)$ — функции экспоненциального типа $\leqslant \pi$, то

$$\begin{gathered} |w_2(\lambda_k,\ \pi) - w_{2N}(\lambda_k,\ \pi)| \leqslant |w_2(\lambda_k,\ \pi) - w_{2N}(\lambda_{kN},\ \pi)| + \\ + |w_{2N}(\lambda_{kN},\ \pi) - w_{2N}(\lambda_k,\ \pi)| \leqslant |w_2(\lambda_k,\ \pi) - w_{2N}(\lambda_{kN},\ \pi)| + \\ + |\lambda_{kN} - \lambda_k| \cdot \pi \cdot \sup|w_{2N}(\lambda,\ \pi)|; \end{gathered} \tag{27}$$

$$\begin{gathered} |w_1(\lambda_k,\ \pi) - w_{1N}(\lambda_k,\ \pi)| = |w_{1N}(\lambda_k,\ \pi)| = |w_{1N}(\lambda_k,\ \pi) - \\ - w_{1N}(\lambda_{kN},\ \pi)| \leqslant |\lambda_k - \lambda_{kN}| \cdot \pi \cdot \sup|w_{1N}(\lambda,\ \pi)|. \end{gathered} \tag{28}$$

В силу равенства (10) работы [2], поскольку $\chi(\lambda) = \cos\theta(\lambda)$, $\theta(\lambda_k) = h_k^*$, справедливо равенство

$$|w_2(\lambda_k,\ \pi) - w_{2N}(\lambda_{kN},\ \pi)| = \begin{cases} 0 & |k| \leqslant N \\ |e^{h_k^*} - 1| & |k| > N, \end{cases} \leqslant \begin{cases} 0 & |k| \leqslant N \\ e^H h_k & |k| > N, \end{cases} \tag{29}$$

где $H = \max h_k \geqslant \max h_k^*$.

Таким образом, для оценки $\|\Delta_N(\lambda)\|$ надо определить $|w_{1N}(\lambda,\ \pi)|$, $|w_{2N}(\lambda,\ \pi)|$ и $|\lambda_k - \lambda_{kN}|$. Оценки для первых двух модулей легко получаются из формулы (10) и оценок для функций $v_{jN}(\lambda,\ x)$ $(j = 1,\ 2)$, полученных в работе [1]: $|v_{jN}(\lambda,\ \pi)| \leqslant |Z_{2N}(\lambda,\ \pi) +$

$+ Z_{1N}(\lambda, \pi)| \leqslant 1 + \sigma_{1N}(0) \operatorname{ch} \sigma_{1N}(0)[1 + \sigma_{1N}(0)]$ $(j = 1, 2)$. А именно, справедливы неравенства

$$|\omega_{jN}(\lambda, \pi)| \leqslant 1 + \sigma_{1N}(0) \operatorname{ch} \sigma_{1N}(0)[1 + \sigma_{1N}(0)] \leqslant$$
$$\leqslant 1 + \sqrt{\pi}\, \sigma_{2N}(0) \operatorname{ch} \sqrt{\pi}\, \sigma_{2N}(0)[1 + \sqrt{\pi}\, \sigma_{2N}(0)] \quad (j = 1, 2). \tag{30}$$

III. Для оценки $|\lambda_k - \lambda_{kN}|$ рассмотрим отображение $z_N(\theta(z))$ верхней полуплоскости в верхнюю полуплоскость (определение функций $z(\theta)$, $\theta(z)$ см. в работе [1]).

Поскольку $\lim\limits_{y \to \infty}(iy)^{-1}\theta(iy) = \pi$, то $\operatorname{Im} z_N(\theta(iy)) \to y$ **(31)**, откуда следует (см. (3.4.39) работы [4]), что

$$z_N(\theta(z)) = z + d + \frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\operatorname{Im} z_N(\theta(t))}{t - z}\, dt - \frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty} \frac{t}{t^2 + 1} \operatorname{Im} z_N(\theta(t))\, dt. \tag{32}$$

Поскольку $\operatorname{Im}\theta_N(z)\Big|_{\operatorname{Im} z \geqslant 0} = \pi y + \frac{y}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\operatorname{Im}\theta_N(t)}{(x - t)^2 + y^2}\, dt\Big|_{y \geqslant 0} \geqslant \pi y$, то

$$\frac{1}{\pi}\operatorname{Im}\theta(z) = \frac{1}{\pi}\operatorname{Im}\theta_N(z_N(\theta(z))) \geqslant \operatorname{Im} z_N(\theta(z)), \tag{33}$$

а так как $0 \leqslant \operatorname{Im}\theta(t) \leqslant \begin{cases} h_k & t \in \Delta_k \\ 0 & t \overline{\in} \Delta_k \end{cases}$, где $\Delta_k = [\mu_k^-, \mu_k^+]$, $\mu_k^\pm = z(k\pi \pm 0)$ и $0 \leqslant \mu_k^+ - \mu_k^- \leqslant \frac{2}{\pi} h_k$ (см. (3.4.36) работы [4]), то

$\int_{-\infty}^{\infty} \operatorname{Im} z_N(\theta(t))\, dt \leqslant \sum\limits_{k=-\infty}^{\infty} \int_{\Delta_k} h_k\, dt \leqslant \frac{2}{\pi} \sum\limits_{k=-\infty}^{\infty} h_k^2$, откуда следует:

$$\left|\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\operatorname{Im} z_N(\theta(t))}{t - z}\, dt\right| \leqslant \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\operatorname{Im} z_N(\theta(t))}{|t - x - iy|}\, dt \leqslant \frac{1}{y}\int_{-\infty}^{\infty} \operatorname{Im} z_N(\theta(t))\, dt \leqslant \frac{1}{y} \times$$
$$\times \frac{2}{\pi} \sum_{k=-\infty}^{\infty} h_k^2 \to 0, \quad y \to \infty. \tag{34}$$

Подставляя в (32) $z = iy$ и устремляя $y \to \infty$, получаем, учитывая (31) и (34),

$$z_N(\theta(z)) = z + \frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\operatorname{Im} z_N(\theta(t))}{t - z}\, dt = z + \frac{1}{\pi}\sum_{|k| > N} \int_{\Delta_k} \frac{\operatorname{Im} z_N(\theta(t))}{t - z}\, dt. \tag{35}$$

Рассмотрим теперь $z_N(\theta(\lambda_k))$;

а) $|k| \leqslant N$. В этом случае $h_k^*(N) = h_k^*$ и $z_N(\theta(\lambda_k)) = z_N(k\pi + ih_k^*) = \lambda_{kN}$, т. е. $\lambda_{kN} = \lambda_k + \frac{1}{\pi}\sum\limits_{|j| > N} \int_{\Delta_j} \frac{\operatorname{Im} z_N(\theta(t))}{t - \lambda_k}\, dt$. Так как $|k| \leqslant$

$\leqslant N$, а $|j|>N$, то $|t-\lambda_k| \geqslant \begin{cases} \mu_j^- - \mu_k^+ & j>k \\ \mu_k^- - \mu_j^+ & j<k, \end{cases}$ где $t \in \Delta_j$. Поскольку $|\mu_{m_1}^- - \mu_{m_2}^+| \geqslant 2(\pi \operatorname{ch} H)^{-1} |m_1 - m_2|$ (см. (3.4.35) работы [4]), то при $t \in \Delta_j$ $|t-\lambda_k|^{-1} \leqslant \frac{\pi}{2} \operatorname{ch} H \frac{1}{|j-k|}$. Таким образом,

$$|\lambda_k - \lambda_{kN}| \leqslant \frac{1}{\pi} \sum_{|j|>N} \frac{\pi}{2} \operatorname{ch} H \frac{1}{|j-k|} h_j^2 \cdot \frac{2}{\pi} = \frac{\operatorname{ch} H}{\pi} \sum_{|j|>N} h_j^2 \frac{1}{|j-k|},$$

$$\sum_{|k|\leqslant N} |\lambda_k - \lambda_{kN}|^2 \leqslant \frac{\operatorname{ch}^2 H}{\pi^2} \sum_{|k|\leqslant N} \left(\sum_{|j|>N} h_j^2 \frac{1}{|j-k|} \right)^2.$$

Обозначим $\sum\limits_{|j|>N} h_j^2 \frac{1}{|j-k|} = \delta_k$. Тогда

$$\sum_{|k|\leqslant N} \delta_k^2 = \sum_{|k|\leqslant N} \delta_k \sum_{|j|>N} h_j^2 \frac{1}{|j-k|} = \sum_{|j|>N} h_j^2 \sum_{|k|\leqslant N} \frac{\delta_k}{|j-k|} \leqslant$$

$$\leqslant \sum_{|j|>N} h_j^2 \left(\sum_{|k|\leqslant N} \delta_k^2 \right)^{\frac{1}{2}} \left(\sum_{|k|\leqslant N} \frac{1}{|j-k|^2} \right)^{\frac{1}{2}} \leqslant \sum_{|j|>N} h_j^2 \left(\sum_{|k|\leqslant N} \delta_k^2 \right)^{\frac{1}{2}} \cdot \frac{\pi}{\sqrt{3}}, \quad (36)$$

откуда следует, что

$$\sum_{|k|\leqslant N} \delta_k^2 \leqslant \frac{\pi^2}{3} \left(\sum_{|j|>N} h_j^2 \right)^2 = \frac{\pi^2}{3} \| \vec{h} - \vec{h}(N) \|^4, \quad (37)$$

т. е.

$$\sum_{|k|\leqslant N} |\lambda_k - \lambda_{kN}|^2 \leqslant \frac{\operatorname{ch}^2 H}{3} \| \vec{h} - \vec{h}(N) \|^4. \quad (38)$$

б) $|k|>N$. Поскольку $\mu_k^- \leqslant \lambda_k \leqslant \mu_k^+$, $\mu_{kN}^- \leqslant \lambda_{kN} \leqslant \mu_{kN}^+$, то

$$|\lambda_k - \lambda_{kN}| \leqslant \mu_{kN}^+ - \mu_{kN}^- + \max\{|\mu_{kN}^+ - \mu_k^+|, |\mu_{kN}^- - \mu_k^-|\} \leqslant$$
$$\leqslant \frac{2}{\pi} h_k(N) + \max\{|\mu_{kN}^+ - \mu_k^+|, |\mu_{kN}^- - \mu_k^-|\} = \max\{|\mu_{kN}^+ - \mu_k^+|,$$
$$|\mu_{kN}^- - \mu_k^-|\}. \quad (39)$$

Подставляя в (35) $z = x \in (\mu_k^+, \mu_{+1}^-)$ и устремляя $x \to \mu_k^+$ (μ_k^-), получаем $z_N(\theta(\mu_k^\pm)) = \mu_{kN}^\pm = \mu_k^\pm + \frac{1}{\pi} \sum\limits_{|j|>N} \int\limits_{\Delta_j} \frac{\operatorname{Im} z_N(\theta(t))}{t - \mu_k^+}\, dt$, откуда следует согласно (3.4.38) работы [4] и (33), что

$$|\mu_{kN}^\pm - \mu_k^\pm| \leqslant \frac{1}{\pi} \sum_{|j|>N} \int_{\Delta_j} \frac{\operatorname{Im} z_N(\theta(t))}{t - \mu_k^\pm}\, dt \leqslant \frac{1}{\pi} \sum_{\substack{|j|>N \\ j \neq k}} h_j^2 \frac{\operatorname{ch} H}{|j-k|} +$$

$$+\frac{\sqrt{\operatorname{ch} H}}{\pi}\int\limits_{1}\sqrt{\frac{(\mu_k^+-t)(t-\mu_k^-)}{(t-\mu_k^\pm)^2}}\,dt\leqslant\frac{\operatorname{ch} H}{\pi}\sum_{\substack{|j|>N\\ j\neq k}} h_j^2\frac{1}{|j-k|}+$$

$$+\frac{1}{\pi}h_k\sqrt{\operatorname{ch} H}.$$

Таким образом, из (39) получаем

$$\sum_{|k|>N}|\lambda_k-\lambda_{kN}|^2\leqslant\frac{2\operatorname{ch}^2 H}{\pi^2}\sum_{|k|>N}\Bigg(\sum_{\substack{|j|>N\\ j\neq k}} h_j^2\frac{1}{|j-k|}\Bigg)^2+\frac{2\operatorname{ch} H}{\pi^2}\sum_{|k|>N} h_k^2. \tag{40}$$

Аналогично тому, как неравенства (36) привели к (37), находим

$$\sum_{|k|>N}\Bigg(\sum_{\substack{|j|>N\\ j\neq k}} h_j^2\frac{1}{|j-k|}\Bigg)^2\leqslant\frac{\pi^2}{3}\|\vec{h}-\vec{h}(N)\|^4, \tag{41}$$

т. е. из (38), (40), (41) получаем

$$\sum_{k=-\infty}^{\infty}|\lambda_k-\lambda_{kN}|^2\leqslant\operatorname{ch}^2 H\|\vec{h}-\vec{h}(N)\|^4+\frac{2\operatorname{ch} H}{\pi^2}\|\vec{h}-\vec{h}(N)\|^2. \tag{42}$$

Окончательно, объединяя (25) — (30), (42) имеем

$$\|\Delta_N(\lambda)\|^2\leqslant 4(1+\sqrt{\pi}\sigma_2(0))^2\|\vec{h}-\vec{h}(N)\|^2\Big\{2e^{2H}+3\pi\times$$

$$\times\left(\operatorname{ch}^2 H\cdot\|\vec{h}-\vec{h}(N)\|^2+\frac{8\operatorname{ch} H}{\pi^2}\right)[1+\sqrt{\pi}\sigma_{2N}(0)\operatorname{ch}\sqrt{\pi}\sigma_{2N}(0)\times$$

$$\times(1+\sqrt{\pi}\sigma_{2N}(0))]^2\Big\}. \tag{43}$$

В силу неравенства (19) и того, что $\|\vec{h}-\vec{h}(N)\|\to 0$ при $N\to\to\infty$, $\lim\limits_{N\to\infty}\|\Delta_N(\lambda)\|=0$, следовательно, $\sigma_2(0)$ также удовлетворяет нер венству $\sigma_2(0)\leqslant\frac{2}{\pi}\|\vec{h}\|$, и из (19), (43) и (22) определяем (14).

Список литературы: 1. *Мисюра Т. В.* Характеристика спектров периодической и антипериодической краевых задач, порождаемых операцией Дирака. — Теория функций, функц. анализ и их приложения, 1978, вып. 30, с. 90—101. 2. *Мисюра Т. В.* Характеристика спектров периодической и антипериодической краевых задач, порождаемых операцией Дирака. II. — Теория функций, функц. анализ и их приложения, 1979, вып. 31, с. 102—109. 3. *Мисюра Т. В.* Конечнозонные операторы Дирака. — Теория функций, функц. анализ и их приложения, 1980, вып. 33, с. 107—111. 4. *Марченко В. А.* Операторы Штурма—Лиувилля и их приложения. — Киев, Наук. думка, 1977 — 331 с. 5. *Гасымов М. Г.* Обратная задача теории рассеяния для системы уравнений Дирака порядка $2n$. — Тр. Моск. мат. о-ва, 1968, **19**, с. 41—112. 6. *Лундина Д. Ш.* О точности восстановления собственных функций по неполным данным рассеяния. — В кн. Математическая физика и функциональный анализ. — Харьков: Изд. ФТИНТ УССР, 1969, с. 72—83.

Поступила 21 января 1980 г.