УДК 517.4

И. В. МИХАЙЛОВА, В. П. ПОТАПОВ

ОБ ОДНОМ КРИТЕРИИ ЭРМИТОВОЙ ПОЛОЖИТЕЛЬНОСТИ

Рассматривается непрерывная на $(-a, a)$ функция $s(x)$, обладающая следующими свойствами:

(*i*) $s(x) = \overline{s(-x)}$, $-a < x < a$;

(*ii*) $s(x)$ — дважды непрерывно дифференцируема на $[0, a)$; *

(*iii*) $s'(+0) + \overline{s'(+0)} = -\lambda < 0$.

Как указано М. Г. Крейном [1], в достаточно малой окрестности нуля функция $s(x)$, удовлетворяющая (*i — iii*) и условию $s(0) > 0$, является эрмитово-положительной и многозначно продолжаемой на всю ось. Целью данной работы является определение максимальной такой окрестности. Утверждение «эрмитово-положительная функция $s(x)$ многозначно продолжаема с *интервала* $(-l, l)$» означает здесь, что $s(x)$ многозначно продолжаема с каждого внутреннего *сегмента* $[-\xi, \xi] \subset (-l, l)$**.

Помимо самостоятельного значения этот вопрос, как указал Е. А. Горин, интересен возможными далеко идущими обобщениями неравенств типа Бернштейна.

Задача продолжения эрмитово положительной функции на всю числовую ось и описания всех таких продолжений впервые поставлена и решена М. Г. Крейном [2]. Ему же принадлежит и тонкий критерий многозначной продолжаемости эрмитово положительной функции $g(x)$.

Пусть система ортонормированных фундаментальных функций $\{\varphi_j(x)\}$ оператора $Sf(x) = \int\limits_0^\xi s(x-u) f(u)\,du$ полна в $L^2(0, \xi)$ и пусть $0 < \lambda_1 \leqslant \lambda_2 \leqslant \cdots$ — фундаментальные числа: $\lambda_j S\varphi_j = \varphi_j$.

Для того чтобы $g(x)$ допускала многозначное продолжение с сегмента $[-\xi, \xi]$ на всю ось, необходимо, чтобы для всех комплексных z сходился следующий ряд, составленный по коэффициентам Фурье $\alpha_j = (e^{-izx}, \varphi_j(x))$ функции e^{-izx}:

$$\sum_{j=1}^{\infty} |\alpha_j(z)|^2 \lambda_j < \infty, \tag{1}$$

и достаточно, чтобы этот ряд сходился для некоторого неизвестного z_0.

* Условие (*ii*) может быть значительно ослаблено.

** При этом может случиться, что функция $s(x)$, многозначно продолжаемая с интервала $(-l, l)$, будет иметь единственное продолжение с сегмента $[-l, l]$.

Для объявленной нами цели более удобен другой критерий эрмитовой положительности и многозначной продолжаемости функции $s(x)$, удовлетворяющей требованиям $(i-iii)$.

Следуя М. Г. Крейну, с функцией $s(x)$ свяжем оператор $(\lambda I - K_\xi)$, действующий в пространстве непрерывных функций $(\lambda I - K_\xi) f(x) = \lambda f(x) - \int\limits_0^\xi s''(x-u) f(u)\, du$, $f \in C[0, \xi]$, зависящий от верхнего предела интеграла ξ $(0 < \xi < a)$.

Поскольку для функций $\psi(x) = f'(x)$, $f(0) = f(\xi) = 0$ $(S\psi, \psi) = ((\lambda I - K_\xi) f, f)$, то для эрмитово-положительной на $[-\xi, \xi]$ функции $s(x)$

$$((\lambda I - K_\xi)\varphi, \varphi) \geqslant 0, \quad \forall \varphi \in C[0, \xi]. \tag{2}$$

Причем, как показано в [1], если (2) обращается в равенство для некоторой функции $\varphi \not\equiv 0$, то $s(x)$ допускает лишь единственное продолжение на всю ось с сегмента $[-\xi, \xi]$.

Таким образом, выполнение для всех $\xi \in (0, l)$ строгого неравенства (A): $((\lambda I - K_\xi)\varphi, \varphi) > 0$, $\forall \varphi \in C[0, \xi]$, $\varphi \neq 0$ является необходимым условием многозначной продолжаемости функции с интервала $(-l, l)$.

В связи с $(i-iii)$ неравенство (A) заведомо справедливо для ξ из некоторой окрестности нуля.

Однако условие (A) еще не достаточно для эрмитовой положительности $s(x)$ на $(-l, l)$. Ниже будет сформулирован еще один необходимый критерий, который вместе с (A) доставляет достаточные условия как эрмитовой положительности $s(x)$ на $(-l, l)$, так и многозначности ее продолжения.

1°. Всюду в дальнейшем под $s(x)$ понимается функция, удовлетворяющая в интервале $(-l, l)$ условиям $(i-iii)$ и «строгому» неравенству (A):

$$((\lambda I - K_\xi)\varphi, \varphi) > 0 \quad \forall \varphi \in C[0, \xi[, \ \varphi \neq 0; \quad \forall \xi \in (0, l) \ \text{(A)}.$$

Для упрощения выкладок, будем считать $\lambda = 1$.

В силу (A) уравнение 2-го рода

$$f(x) - \int\limits_0^\xi s''(x-t) f(t)\, dt = -s''(x) \tag{3}$$

однозначно разрешимо для любого ξ. Пусть $\chi_\xi(x)$ — его решение. Очевидно, при фиксированном ξ функция $\chi_\xi(x)$ непрерывна по $x \in [0, \xi]$. Введем в рассмотрение еще две величины, зависящие от параметра ξ:

$$k(\xi) = s'(+0) + \int\limits_0^\xi \overline{s'(t)} \chi_\xi(t)\, dt = s'(x) - \int\limits_0^\xi s'(x-t) \chi_\xi(t)\, dt; \tag{4}$$

$$b(\xi) = s(0) - \int\limits_0^\xi \overline{s(t)} \chi_\xi(t)\, dt.$$

Тройку $(\chi_\xi(x),\ k(\xi),\ b(\xi))$ назовем триадой.

Легко видеть, что $(\chi,\ k,\ b)$ определяются из уравнения

$$\int_0^\xi s(x-t)\,\chi_\xi(t)\,dt = s(x) - k(\xi)\,x - b(\xi), \tag{5}$$

эквивалентного (3), (4).

В дальнейшем кроме тождества для $\chi_\xi(x)$:

$$\chi_\xi(x) - \int_0^\xi s''(x-t)\,\chi_\xi(t)\,dt = -s''(x) \tag{6}$$

нам понадобится «сопряженное»:

$$\overline{\chi_\xi(\xi-x)} - \int_0^\xi s''(x-t)\,\overline{\chi_\xi(\xi-t)}\,dt = -s''(x-\xi), \tag{6'}$$

которое получается из (6) заменой x на $\xi - x$, t на $\xi - t$ и переходом к комплексно сопряженным.

Аналогично вместе с (5) справедливо равенство

$$\int_0^\xi s(x-t)\,\overline{\chi_\xi(\xi-t)}\,dt = s(x-\xi) - \overline{k(\xi)}\,(\xi-x) - \overline{b(\xi)}. \tag{5'}$$

Определим поведение элементов триады при $\xi \to +0$. Из (6) следует, что

$$\int_0^\xi |\chi_\xi(x)|\,dx \leqslant \int_0^\xi \left| \int_0^\xi s''(x-t)\,\chi_\xi(t)\,dt \right| dx + \int_0^\xi |s''(x)|\,dx$$

и поскольку

$$\int_0^\xi \left| \int_0^\xi s''(x-t)\,\chi_\xi(t)\,dt \right| dx \leqslant \int_0^\xi |\chi_\xi(t)| \int_0^\xi |s''(x-t)|\,dx\,dt =$$

$$= \int_0^\xi |\chi_\xi(t)| \int_{-t}^{\xi-t} |s''(u)|\,du\,dt \leqslant \int_0^\xi |\chi_\xi(t)| \int_{-\xi}^{\xi} |s''(u)|\,du\,dt,$$

то $\displaystyle\int_0^\xi |\chi_\xi(x)|\,dx \leqslant \int_0^\xi |s''(x)|\,dx \frac{1}{1 - \int_{-\xi}^{\xi} |s''(x)|\,dx} \to 0 \quad (\xi \to +0)$. Следовательно,

$$\lim_{\xi\to+0} \int_0^\xi |\chi_\xi(x)|\,dx = 0, \tag{7}$$

откуда

$$\lim_{\xi\to+0} k(\xi) = s'(+0), \quad \lim_{\xi\to+0} b(\xi) = s(0). \tag{8}$$

2°. Основным объектом наших дальнейших исследований является величина $\Delta(\xi) = \xi k(\xi)\overline{k(\xi)} + k(\xi)\overline{b(\xi)} + \overline{k(\xi)}\,b(\xi)$.

Теорема 1. *Функция* $\Delta(\xi)$ *непрерывно дифференцируема и* $\frac{d}{d\xi}\Delta(\xi) = k(\xi)\overline{k(\xi)}$, $0 \leqslant \xi < l$.

Доказательство. Прежде всего покажем, что для $\xi \leqslant \xi_0 < l$ нормы операторов $(I - K_\xi)^{-1}$ равномерно ограничены в соответственных пространствах непрерывных функций $C[0, \xi]$: $\|(I - K_\xi)^{-1}\| \leqslant M_{\xi_0}$.

Производя замену переменных $x = \xi\ \tilde{x}$, $t = \xi\ \tilde{t}$, приходим к равенству $(I - K_\xi) f(x) = f(x) - \int\limits_0^\xi s''(x - t) f(t)\, dt = f(\xi, \tilde{x}) -$

$- \int\limits_0^1 \xi s''(\xi(\tilde{x} - \tilde{t})) f(\xi, \tilde{t})\, d\tilde{t} = (I - \tilde{K}_\xi) f(\xi\tilde{x})$, где $(I - \tilde{K}_\xi)$ — семейство операторов, действующих уже в фиксированном пространстве $C[0, 1]$.

Обратимость $(I - K_\xi)$ гарантирует существование при всех ξ обратных операторов $(I - \tilde{K}_\xi)^{-1}$. Так как ядро интегрального оператора $\tilde{K}_\xi$, равное $\xi s''(\xi(\tilde{x} - \tilde{t}))$, непрерывно по ξ, то обратный оператор $(I - \tilde{K}_\xi)^{-1}$ также непрерывно зависит от ξ, а значит $\|(I - \tilde{K}_\xi)^{-1}\|_{C[0,1]} \leqslant M_{\xi_0}$. Поскольку $\|(I - \tilde{K}_\xi)^{-1}\|_{C[0,1]} = \|(I - K_\xi)^{-1}\|_{C[0,\xi]}$, то $\|(I - K_\xi)^{-1}\| \leqslant M_{\xi_0}$, $0 < \xi \leqslant \xi_0$. Отсюда вытекает равномерная ограниченность функций $\chi_\xi(x)$: $\|\chi_\xi(x)\| = \|-(I - K_\xi)^{-1} s''(x)\| \leqslant M_{\xi_0} \max\limits_{x \in [0, \xi_0]} |s''(x)|$ $(\forall \xi, x\colon\ 0 \leqslant x \leqslant \xi,\ 0 < \xi \leqslant \xi_0 < l)$. Далее, для произвольных достаточно малых h_1, h_2 составим разность $\{\chi_{\xi+h_1}(x) - \chi_{\xi-h_2}(x)\}$. Из (6) следует тождество

$$\{\chi_{\xi+h_1}(x) - \chi_{\xi-h_2}(x)\} - \int\limits_0^{\xi-h_2} s''(x - t)\{\chi_{\xi+h_1}(t) - \chi_{\xi-h_2}(t)\}\, dt =$$

$$= \int\limits_{\xi-h_2}^{\xi+h_1} s''(x - t)\, \chi_{\xi+h_1}(t)\, dt, \quad x \in [0, \xi - h_2]. \tag{9}$$

Правая часть (9) стремится к нулю при $h_1, h_2 \to 0$ и в силу равномерной ограниченности обратных операторов $(I - K_\xi)^{-1}$ $\lim\limits_{h_1, h_2 \to 0} |\chi_{\xi+h_1}(x) - \chi_{\xi-h_2}(x)| = 0$ $(0 \leqslant x < \xi)$ (при $x = \xi$ существует односторонний предел: $\lim\limits_{h_1 \to +0} |\chi_{\xi+h_1}(\xi) - \chi_\xi(\xi)| = 0$), а следовательно $\chi_\xi(x)$ является непрерывной функцией двух переменных x, ξ в замкнутом треугольнике $0 \leqslant x \leqslant \xi \leqslant \xi_0$.

Наконец, разделив (9) на $h_1 + h_2$, приходим к равенству

$$\frac{\chi_{\xi+h_1}(x) - \chi_{\xi-h_2}(x)}{h_1 + h_2} = (I - K_{\xi-h_2})^{-1}\left\{\frac{1}{h_1 + h_2}\int\limits_{\xi-h_2}^{\xi+h_1} s''(x - t)\, \chi_{\xi+h_1}(t)\, dt\right\} \tag{10}$$

и так как $\lim\limits_{h_1,\ h_2\to 0} \dfrac{1}{h_1+h_2} \int\limits_{\xi-h_2}^{\xi+h_1} s''(x-t)\,\chi_{\xi+h_1}(t)\,dt = s''(x-\xi)\,\chi_\xi(\xi)$, а в силу тождества (6') $(I-K_\xi)^{-1}\{s''(x-\xi)\} = -\overline{\chi_\xi(\xi-x)}$, то легко убедиться, что правая часть (10) имеет предел, равный $-\chi_\xi(\xi)\,\overline{\chi_\xi(\xi-x)}$. Но тогда существует и предел левой части $\dfrac{\partial}{\partial\xi}\chi_\xi(x) = \lim\limits_{h_1,\ h_2\to 0} \dfrac{\chi_{\xi+h_1}(x)-\chi_{\xi-h_2}(x)}{h_1+h_2} = -\chi_\xi(\xi)\,\overline{\chi_\xi(\xi-x)}$ $(0\leqslant x\leqslant\xi)$. Обозначая $\chi_\xi(\xi)=\theta(\xi)$, приходим к формуле*

$$\frac{\partial}{\partial\xi}\chi_\xi(x) = -\theta(\xi)\,\overline{\chi_\xi(\xi-x)}, \tag{11}$$

позволяющей вычислить производные

$$\frac{d}{d\xi}k(\xi) = \frac{d}{d\xi}\int\limits_0^\xi \overline{s'(t)}\,\chi_\xi(t)\,dt = \theta(\xi)\,\overline{s'(\xi)} - \theta(\xi)\int\limits_0^\xi \overline{s'(t)}\;\overline{\chi_\xi(\xi-t)}\,dt =$$

$$= \theta(\xi)\,\overline{k(\xi)};\quad \frac{d}{d\xi}b(\xi) = -\frac{d}{d\xi}\int\limits_0^\xi \overline{s(t)}\,\chi_\xi(t)\,dt = -\theta(\xi)\,\overline{s(\xi)} +$$

$$+\theta(\xi)\int\limits_0^\xi \overline{s(t)}\;\overline{\chi_\xi(\xi-t)}\,dt = -\theta(\xi)\,(\overline{k(\xi)}\,\xi + \overline{b(\xi)}).$$

Итак,

$$\frac{d}{d\xi}k(\xi) = \theta(\xi)\,\overline{k(\xi)};\quad \frac{d}{d\xi}b(\xi) = -\theta(\xi)\,(\overline{k(\xi)}\,\xi + \overline{b(\xi)}). \tag{12}$$

Воспользовавшись формулами (12), получим $\dfrac{d}{d\xi}\Delta(\xi) = \dfrac{d}{d\xi}\{k(\xi)\times\times\overline{k(\xi)}\,\xi + k(\xi)\,\overline{b(\xi)} + \overline{k(\xi)}\,b(\xi)\} = \theta(\xi)\,\overline{k(\xi)}\,\overline{k(\xi)}\,\xi + k(\xi)\,\theta(\xi)\,k(\xi)\times\times\xi + k(\xi)\,\overline{k(\xi)} + \theta(\xi)\,\overline{k(\xi)}\,b(\xi) - k(\xi)\,\overline{\theta(\xi)}\,(k(\xi)\,\xi + b(\xi)) + \overline{\theta(\xi)}\times\times k(\xi)\,b(\xi) - \overline{k(\xi)}\,\theta(\xi)\,(\overline{k(\xi)}\,\xi + \overline{b(\xi)}) = k(\xi)\,\overline{k(\xi)}$. Теорема доказана.

Из теоремы, в частности, следует, что $k(\xi)\neq 0$ $(\xi\in[0,\ l))$, и значит $\Delta(\xi)$ строго монотонно возрастающая функция на $(0,\ l)$.

Роль величины $\Delta(\xi)$ выявляет следующая

Теорема 2. *Для эрмитово положительной многозначно продолжаемой с $(-l,\ l)$ функции $s(x)$, удовлетворяющей $(i-iii)$, величина $\Delta(\xi)$ отрицательна для всех $\xi\in[0,\ l)$.*

Предварительно докажем лемму.

Лемма. *Для любой непрерывной эрмитово положительной функции $g(x)$, неоднозначно продолжаемой с сегмента $[-\xi,\ \xi]$, уравнение*

$$\int\limits_0^\xi g(x-t)\,f(t)\,dt = \alpha g(x) + \beta g(x-\xi)\quad (|\alpha| + |\beta| > 0) \tag{13}$$

не имеет решений в классе суммируемых функций.

* Формула (11) впервые получена М. Г. Крейном [3].

Доказательство. По теореме Мерсера имеет место представление

$$g(x-t)=\sum_{j=1}^{\infty}\frac{\varphi_j(x)\overline{\varphi_j(t)}}{\lambda_j}\ (x,\ t\in[0,\ \xi]), \tag{14}$$

где ряд непрерывных функций сходится абсолютно и равномерно.

Пусть функция $f(x)\in L^1(0,\ \xi)$ удовлетворяет (13). Определим $f_j=(f,\ \varphi_j)=\int\limits_0^{\xi} f\overline{\varphi}_j\,dt$. Тогда

$$\int\limits_0^{\xi} g(x-t)f(t)\,dt=\int\limits_0^{\xi}\sum_{j=1}^{\infty}\frac{\varphi_j(x)\overline{\varphi_j(t)}}{\lambda_j}f(t)\,dt=$$

$$=\sum_{j=1}^{\infty}\frac{\varphi_j(x)}{\lambda_j}\int\limits_0^{\xi}\overline{\varphi_j(t)}f(t)\,dt=\sum_{j=1}^{\infty}\frac{f_j}{\lambda_j}\varphi_j(x).$$

С другой стороны, из представления (14)

$$\alpha g(x)+\beta g(x-\xi)=\sum_{j=1}^{\infty}\left\{\alpha\frac{\overline{\varphi_j(0)}}{\lambda_j}+\beta\frac{\overline{\varphi_j(\xi)}}{\lambda_j}\right\}\varphi_j(x),$$

и следовательно, $f_j=\alpha\overline{\varphi_j(0)}+\beta\overline{\varphi_j(\xi)}$.

Далее, согласно критерию многозначной продолжаемости $s(x)$, коэффициенты Фурье $\alpha_j(z)=(e^{-izx},\ \varphi_j(x))$ функции e^{-izx} удовлетворяют условию (1): $\sum\limits_{j=1}^{\infty}|\alpha_j|^2\lambda_j<\infty$, обеспечивающему абсолютную и равномерную сходимость ряда Фурье к функции e^{-izx}:

$$e^{-izx}=\sum_{j=1}^{\infty}\alpha_j\varphi_j(x), \tag{15}$$

поскольку

$$\sum_{j=m}^{n}|\alpha_j\varphi_j(x)|\leqslant\left\{\sum_{j=m}^{n}|\alpha_j|^2\lambda_j\cdot\sum_{j=m}^{n}\frac{|\varphi_j(x)|^2}{\lambda_j}\right\}^{1/2}\leqslant$$

$$\leqslant\left\{\sum_{j=m}^{\infty}|\alpha_j|^2\lambda_j\sum_{j=1}^{\infty}\frac{|\varphi_j(x)|^2}{\lambda_j}\right\}^{1/2}=s(0)\left\{\sum_{j=m}^{\infty}|\alpha_j|^2\lambda_j\right\}^{1/2}\to 0\ (m\to\infty).$$

Образуем скалярное произведение $(e^{-izx},\ f(x))$. Тогда из абсолютной сходимости ряда (15) $(e^{-izx},\ f(x))=\int\limits_0^{\xi}\sum\limits_{j=1}^{\infty}\alpha_j\varphi_j(x)\overline{f(x)}\,dx=$

$$= \sum_{j=1}^{\infty} \alpha_j \int_0^{\xi} \varphi_j(x)\, \overline{f(x)}\, dx = \sum_{j=1}^{\infty} \alpha_j \overline{f_j} = \sum_{j=1}^{\infty} \alpha_j \{\overline{\alpha}\varphi_j(0) + \overline{\beta}\varphi_j(\xi)\} = \overline{\alpha} \times$$

$$\times \sum_{j=1}^{\infty} \alpha_j \varphi_j(0) + \overline{\beta} \sum_{j=1}^{\infty} \alpha_j \varphi_j(\xi).$$

Учитывая (15), получим $(e^{-izx}, \ f(x)) = \overline{\alpha} 1 + \overline{\beta} e^{-iz\xi}$. Полагая здесь $z = \omega$ ($\operatorname{Im} \omega = 0$) и устремляя ω к бесконечности, приходим к тому, что равенство возможно лишь в случае $\alpha = \beta = 0$. Лемма доказана.

Перейдем теперь к доказательству теоремы. Умножая (5) на $(\overline{(k(\xi)}\xi + \overline{b(\xi)})$(5'), —на$(-b(\xi))$ и складывая полученные равенства, приходим к тождеству $\int_0^{\xi} s(x-t) \{\overline{k(\xi)}\, \xi + \overline{b(\xi)}) \chi_{\xi}(t) - b(\xi) \chi_{\xi}(\overline{\xi - t})\} \times$ $\times\, dt = \overline{(k(\xi)}\, \xi + \overline{b(\xi)})\, s(x) - b(\xi)\, s(x - \xi) - \Delta(\xi)\, x$. Предположив, что $\Delta(\xi) = 0$, воспользуемся леммой из которой с необходимостью следует $\overline{k(\xi)}\, \xi + \overline{b(\xi)} = 0$, $b(\xi) = 0$, т. е. $k(\xi) = b(\xi) = 0$. Но тогда тождество (5) принимает вид $\int_0^{\xi} s(x-t)\, \chi_{\xi}(t)\, dt = s(x)$, что невозможно в силу леммы.

Противоречие показывает, что $\Delta(\xi) \neq 0$ для любого $\xi \in (0, \ l)$. В точке же $\xi = +0$ поведение Δ определяется из формул (8), согласно которым $\Delta(+0) = k(+0)\, \overline{b(+0)} + \overline{k(+0)}\, b(+0) = s'(+0)\, s(0) + + s'(+0)\, s(0) = -\lambda s(0) < 0$. Неравенство $\Delta(\xi) < 0$ вытекает сейчас из непрерывности $\Delta(\xi)$ в интервале $[0, \ l)$.

Таким образом, многозначно продолжаемая эрмитово положительная функция $s(x)$ со свойствами $(i - iii)$ необходимо удовлетворяет двум условиям: (A) $((\lambda I - K_{\xi})\, \varphi, \ \varphi) > 0$, $\forall \varphi \{C\, [0, \ \xi]$, $\varphi \neq 0$; $\forall \xi \in (0, \ l)$; (B) $\Delta(l - 0) \leqslant 0$.

3°. Наша цель — показать, что условия (A) и (B) являются и достаточными для того, чтобы функция $s(x)$ была эрмитово положительной, многозначно продолжаемой с интервала $(-l, \ l)$.

Для этого введем в рассмотрение следующие антилинейные формы от произвольной непрерывной дифференцируемой функции $f(x)$, зависящие от параметра ξ и имеющие смысл при всех $\xi \in (0, \ l)$, кроме точки, в которой $\Delta(\xi) = 0$, если такая существует:

$$B(f) = \frac{1}{\Delta} \{\overline{k}\overline{f(0)} + k\overline{f(\xi)} - \overline{k}(\chi(u), \ f(u)) - k\, \overline{(\chi(\xi - u), \ f(u))}\};$$

$$L(f) = \frac{i}{\Delta} \{(\overline{k}\xi + \overline{b})\, \overline{f(0)} - b\, \overline{f(\xi)} - (\overline{k}\xi + \overline{b})\, (\chi(u), \ f(u)) + + b\, \overline{(\chi(\xi - u), \ f(u))}\}; \qquad (16)$$

$C(f) = -\Delta \{L(f) + B(M_0)\, B(f) - B(A_0 f(x))\}$, где A_0 — оператор интегрирования: $A_0 f(x) = i\int\limits_0^x f(u)\,du$, а функция $M_0(x) = A_0 s(x) =$

$= i\int\limits_0^x s(u)\,du.$

В дальнейшем будем опускать ξ в обозначениях функций $k = k(\xi)$, $b = b(\xi)$, $\chi(x) = \chi_\xi(x)$, там, где это не приведет к недоразумению.

Теорема 3. *При выполнении условий* $(i - iii)$, (A) *имеют место формулы*

$$\frac{d}{d\xi} B(f) = -\{\bar{k}B(f) - \overline{f'(\xi)} + \overline{(\chi(\xi-u),\ f'(u))}\}\frac{k}{\Delta};$$

$$\frac{d}{d\xi} C(f) = \{\bar{k}B(f) - \overline{f'(\xi)} + \overline{(\chi(\xi-u),\ f'(u))}\}\{kB(M_0) - ib\}; \qquad (17)$$

$$\Delta B(1) = -1;\ \Delta B(M_0) = \int\limits_0^\xi \frac{k(v)\,\overline{b(v)} - \overline{k(v)}\,b(v)}{2i}\,dv - \frac{i\Delta\xi}{2}.$$

Доказательство. Приведенные в теореме равенства доказываются при помощи несложных выкладок, основывающихся на формулах дифференцирования (11), (12).

Покажем сначала, что

$$\frac{d}{d\xi}\{\Delta B(f)\} = k\{\overline{f'(\xi)} - \overline{(\chi(\xi-u),\ f'(u))}\}. \qquad (18)$$

Мы имеем $\frac{d}{d\xi}\{\Delta B(f)\} = \frac{d}{d\xi}\{\overline{k}\overline{f(0)} + k\overline{f(\varepsilon)} - \bar{k}(\chi,\ f) - k(\chi\overline{(\xi-u)},$ $f(u))\}$.

Вычислим производную от каждого слагаемого в отдельности: $\frac{d}{d\xi}\{\overline{k f(0)}\} = \bar{\theta}\overline{k f(0)}$; $\frac{d}{d\xi}\{k\overline{f(\xi)}\} = \theta k\overline{f(\xi)} + k\overline{f'(\xi)}$.

Далее, вычисляя

$$\frac{d}{d\xi}(\chi(u),\ f(u)) = \frac{d}{d\xi}\int\limits_0^\xi \chi_\xi(u)\,\overline{f(u)}\,du = \theta\overline{f(\xi)} +$$

$$+ \int\limits_0^\xi \frac{\partial}{\partial\xi}\{\chi_\xi(u)\,\overline{f(u)}\}\,du = \theta\overline{f(\xi)} - \theta\,\overline{(\chi(\xi-u),}\ f(u)), \qquad (19)$$

получим $-\frac{d}{d\xi}\{\bar{k}(\chi(u),\ f(u))\} = -\bar{\theta}k(\chi(u),\ f(u)) - \bar{k}\theta\overline{f(\xi)} +$

$$+ \theta\bar{k}\,\overline{(\chi(\xi-u),}\ f(u)).$$

Наконец, поскольку

$$\frac{d}{d\xi}\overline{(\chi_\xi(\xi-u),}\ f(u)) = \frac{d}{d\xi}\int\limits_0^\xi \overline{\chi_\xi(\xi-u)}\,\overline{f(u)}\,du =$$

$$= \frac{d}{d\xi}\int_0^\xi \overline{\chi_\xi(u)}\,\overline{f(\xi-u)}\,du = \bar\theta\overline{f(0)} + \int_0^\xi \Big[\frac{\partial}{\partial\xi}\Big\{\overline{(\chi_\xi(u))}\Big\}\overline{f(\xi-u)} +$$

$$+ \overline{\chi_\xi(u)}\,\overline{(f'(\xi-u)}\;du = \theta\overline{f(0)} - \theta(\chi_\xi(u),\ f(u)) + \overline{(\chi_\xi(\xi-u)},\ f'(u)), \tag{20}$$

то $-\frac{d}{d\xi}\{k\,\overline{(\chi(\xi-u)}, f(u))\} = -\theta\bar k\,\overline{(\chi(\xi-u)},\ f(u)) - \bar k\theta\,\overline{f(0)} + k\times$ $\times\,\bar\theta(\chi(u),\ f(u)) - k(\overline{\chi(\xi-u)},\ \ f'(u))$. Складывая, получим равенство (18). Используя выражение для $\frac{d}{d\xi}\{\Delta B(f)\}$, приходим к первой из формул (17): $\frac{d}{d\xi}\{B(f)\} = \frac{d}{d\xi}\Big\{\frac{1}{\Delta}\ \Delta B(f)\Big\} = -\frac{k\bar k}{\Delta^2}B(f) +$ $+\frac{k}{\Delta}\{\overline{f'(\xi)} - \overline{(\chi(\xi-u)}, f'(u))\} = \{-\bar k B(f) + \overline{f'(\xi)} - \overline{(\chi(\xi-u)},$ $f'(u))\}\frac{k}{\Delta}$.

Кроме того, полагая в (18) $f(x) = 1$, получим $\frac{d}{d\xi}\{\Delta B(1)\} = 0$. Откуда, учитывая поведение элементов в нуле, $\Delta B(1) \to \overline{k(+0)} +$ $+ k(+0) = -\lambda = -1\ (\xi\to+0)$, убеждаемся в справедливости тождества $\Delta B(1) = -1$. А при подстановке $f(x) = M_0(x) = A_0 s(x)$, равенство (18) дает $\frac{d}{d\xi}\{\Delta B(M_0)\} = k\{-i\overline{s(\xi)} - \overline{(\chi(\xi-u)},\ is(u))\} =$ $= ik\Big\{\int_0^\xi \overline{s(u)}\,\overline{\chi(\xi-u)}\,du - \overline{s(\xi)}\Big\} = ik\Big\{\int_0^\xi \overline{s(\xi-u)\chi(u)}\,du - \overline{s(\xi)}\Big\}$, что, согласно тождеству (5), равно

$$\frac{d}{d\xi}\{\Delta B(M_0)\} = ik(-\bar k\xi - \bar b) = -i(k\bar k\xi + k\bar b), \tag{21}$$

или, выделяя вещественную и мнимую часть, $\frac{d}{d\xi}\{\Delta B(M_0)\} =$ $= \frac{k\bar b - \bar k b}{2i} - \frac{i}{2}(k\bar k\xi + \Delta) = \frac{k\bar b - \bar k b}{2i} - i\frac{\Delta'\xi + \Delta}{2} = \frac{k\bar b - \bar k b}{2i} - \frac{i}{2}(\Delta\xi)'$. Откуда, учитывая, что при $\xi\to+0$ $B(M_0)\to 0$, получим $\Delta B(M_0) = \int_0^\xi \frac{k(u)\overline{b(u)} - \overline{k(u)}\,b(u)}{2i}\,du - \frac{i}{2}\Delta\xi$.

Переходя к вычислению производной $\frac{d}{d\xi}C(f)$, найдем $\frac{d}{d\xi}\{\Delta L(f)\}$: $\frac{d}{d\xi}\{\Delta L(f)\} = i\frac{d}{d\xi}\{(\bar k\xi + \bar b)\,\overline{f(0)} - b\overline{f(\xi)} - (\bar k\xi + \bar b)(\chi,\ \ f) + b\,\overline{(\chi(\xi-}$ $\overline{-u)},\ \overline{f(u))}\}$. Так как $\frac{d}{d\xi}(\bar k\xi + \bar b) = \bar\theta k\xi + \bar k - \bar\theta(k\xi + b) = \bar k - \bar\theta b$, $\frac{d}{d\xi}b = -\theta(\bar k\xi + \bar b)$, то, используя соотношения (19), (20), получаем $\frac{d}{d\xi}\{\Delta L(f)\} = i\{(\bar k - \bar\theta b)\,\overline{f(0)} + \theta(\bar k\xi + \bar b)\,\overline{f(\xi)} - b\overline{f'(\xi)} - (\bar k -$

$$- \bar{\theta} b)(\chi, f) - (\bar{k}\xi + \bar{b})\{\theta \overline{f(\xi)} - \theta(\overline{\chi(\xi - u)}, f(u))\} - \theta(\bar{k}\xi + \bar{b}) \times \times (\overline{\chi(\xi - u)}, f(u)) + b\{\bar{\theta}\overline{f(0)} - \bar{\theta}(\chi, f) - (\overline{\chi(\xi - u)}, f'(u))\} = = i\bar{k}\{\overline{f(0)} - (\chi, f)\} - ib\{\overline{f'(\xi)} - (\overline{\chi(\xi - u)}, f'(u))\}.$$

Учитывая последнее равенство и формулы (18), (21), вычислим

$$\frac{d}{d\xi} C(f) = \frac{d}{d\xi}\left\{-\Delta L(f) - \Delta B(M_0) B(f) - i\Delta B\left(\int_0^x f(u)\,du\right)\right\} =$$

$$= -\frac{d}{d\xi}\{\Delta L(f)\} - \frac{d}{d\xi}\{\Delta B(M_0)\} B(f) - \Delta B(M_0)\frac{d}{d\xi} B(f) -$$

$$- i\frac{d}{d\xi}\left\{\Delta B\left(\int_0^x f(u)\,du\right)\right\} = -i\bar{k}\{\overline{f(0)} - (\chi, f)\} + ib\{f'(\xi) -$$

$$- (\overline{\chi(\xi - u)}, f'(u))\} + i(k\bar{k}\xi + k\bar{b}) B(f) - B(M_0) k\{\bar{k}B(f) -$$

$$- \overline{f'(\xi)} + (\overline{\chi(\xi - u)}, f'(u))\} - ik\{\overline{f(\xi)} - (\overline{\chi(\xi - u)}, f(u))\} =$$

$$= -i\Delta B(f) + \{\overline{f'(\xi)} - (\overline{\chi(\xi - u)}, f'(u))\}\{ib - kB(M_0)\} +$$

$$+ B(f)\{B(M_0) k\bar{k} + ik\bar{k}\xi + ik\bar{b}\} = \{\bar{k}B(f) - \overline{f'(\xi)} +$$

$$+ (\overline{\chi(\xi - u)}, f'(u))\}\{kB(M_0) - ib\},$$

что и завершает доказательство теоремы.

4°. В качестве строительного материала нам понадобится значение форм $B(f)$, $C(f)$ на функциях $f(x) = e^{-izx}$, $f(x) = M_{\bar{z}}(x) = i\int_0^x e^{-i\bar{z}(x-u)} s(u)\,du$. А именно, введем целые функции аргумента z, зависящие от параметра ξ:

$$a_{11}(z, \xi) = 1 - zB(M_{\bar{z}}); \qquad a_{12}(z, \xi) = zC(M_{\bar{z}});$$

$$a_{21}(z, \xi) = -zB(e^{-i\bar{z}x};) \qquad a_{22}(z, \xi) = 1 + zC(e^{-i\bar{z}x})$$

и матрицу-функцию

$$W(z, \xi) = \begin{pmatrix} a_{11}(z, \xi) & a_{12}(z, \xi) \\ a_{21}(z, \xi) & a_{22}(z, \xi) \end{pmatrix}.$$

Рассмотрим также матрицу первого ранга

$$Q(\xi) = J\begin{pmatrix} \bar{\alpha} \\ \bar{\beta} \end{pmatrix}(\alpha, \beta), \text{ где } J = \begin{pmatrix} 0 & i \\ -i & 0 \end{pmatrix},$$

$$\alpha = \frac{k}{\Delta}, \ \beta = kB(M_0) - ib = \frac{k}{\Delta}\int_0^\xi \frac{k\bar{b} - \bar{k}b}{2i}\,dv - \frac{ik\xi}{2} - ib.$$

Нетрудно убедиться в том, что Q является J-проектором.

В самом деле, $JQ \geqslant 0$, $Q^2 = -Q$. Первое очевидно, второе вытекает из того, что $\operatorname{Im} B(M_0) = -\frac{\xi}{2}$, откуда

$$\bar{\alpha}\beta - \alpha\bar{\beta} = \frac{\bar{k}}{\Delta}\{kB(M_0) - ib\} - \frac{k}{\Delta}\{\overline{kB(M_0)} + i\bar{b}\} =$$
$$= \frac{k\bar{k}}{\Delta} 2i \operatorname{Im} B(M_0) - i\frac{k\bar{b}}{\Delta} - i\frac{\bar{k}b}{\Delta} = -i, \qquad (22)$$

и следовательно, $Q^2 = J\begin{pmatrix}\bar{\alpha}\\ \bar{\beta}\end{pmatrix}\left\{(\alpha,\ \beta) J \begin{pmatrix}\bar{\alpha}\\ \bar{\beta}\end{pmatrix}\right\}(\alpha,\ \beta) = J\begin{pmatrix}\bar{\alpha}\\ \bar{\beta}\end{pmatrix}\{-i(\bar{\alpha}\beta - \alpha\bar{\beta})\}(\alpha,\ \beta) = J\begin{pmatrix}\bar{\alpha}\\ \bar{\beta}\end{pmatrix}\{-1\}(\alpha,\ \beta) = -Q.$

Центральное место в наших рассмотрениях занимает следующая теорема.

Теорема 4. *При выполнении* $(i - iii)$ *и* (A) $W(z,\ \xi)$ *удовлетворяет дифференциальному уравнению* $\frac{d}{d\xi} Y(z,\ \xi) = -iz \times Y(z, \xi)\, Q(\xi)$ *и начальному условию* $W(z,\ 0) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -z/s(0) & 1\end{pmatrix}$.

Доказательство. Убедимся в том, что $W(z,\ \xi)$ удовлетворяет дифференциальному уравнению

$$\frac{d}{d\xi} W(z,\ \xi) = -izW(z,\ \xi)\, Q(\xi). \qquad (23)$$

В самом деле

$$\frac{d}{d\xi} W(z,\ \xi) = \frac{d}{d\xi}\begin{pmatrix} a_{11}(z,\ \xi) & a_{12}(z,\ \xi) \\ a_{21}(z,\ \xi) & a_{22}(z,\ \xi)\end{pmatrix} =$$
$$= z\frac{d}{d\xi}\begin{pmatrix} -B(M_{\bar{z}}) & C(M_{\bar{z}}) \\ -B(e^{-i\bar{z}x}) & C(e^{-i\bar{z}x})\end{pmatrix}.$$

Тождества (17) позволяют записать результат в виде

$$\frac{d}{d\xi} W(z,\ \xi) = z\begin{pmatrix} \bar{k}B(M_{\bar{z}}) - M_{\bar{z}}'(\xi) + (\overline{\chi(\xi - u)},\ M_{\bar{z}}'(u)) \\ \bar{k}B(e^{-i\bar{z}x}) - ize^{iz\xi} + iz(\chi(\xi - u), e^{-i\bar{z}u})\end{pmatrix} \times$$
$$\times \left(\frac{k}{\Delta},\ kB(M_0) - ib\right),$$

и так как

$$Q = J\begin{pmatrix} \dfrac{\bar{k}}{\Delta} \\ \overline{kB(M_0) - ib}\end{pmatrix}\left(\frac{k}{\Delta},\ kB(M_0) - ib\right),$$

то в проверке нуждается лишь равенство

$$\begin{pmatrix} \bar{k}B(M_{\bar{z}}) - \overline{M_{\bar{z}}'(\xi)} + (\overline{\chi(\xi - u)},\ M_{\bar{z}}'(u)) \\ \bar{k}B(e^{-i\bar{z}x}) - ize^{iz\xi} + iz(\overline{\chi(\xi - u)}, e^{-i\bar{z}u})\end{pmatrix} =$$
$$= -iW(z,\ \xi) J\begin{pmatrix} \dfrac{\bar{k}}{\Delta} \\ \overline{kB(M_0) - ib}\end{pmatrix}. \qquad (24)$$

Преобразуем правую часть (24). Учитывая, что $\overline{B(M_0)} = B(M_0) + i\xi$, получим

$$-iJ\begin{pmatrix}\dfrac{\bar{k}}{\Delta}\\ kB(M_0)-ib\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0 & 1\\ 1 & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\dfrac{\bar{k}}{\Delta}\\ \bar{k}B(M_0)+i\bar{k}\xi+i\bar{b}\end{pmatrix} = $$

$$= \begin{pmatrix}\bar{k}B(M_0)+i\bar{k}\xi+i\bar{b}\\ -\dfrac{\bar{k}}{\Delta}\end{pmatrix},$$

откуда

$$-iW(z,\ \xi)\,J\begin{pmatrix}\dfrac{\bar{k}}{\Delta}\\ kB(M_0)-ib\end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix}1-zB(M_{\bar{z}}) & zC(M_{\bar{c}})\\ -zB(e^{-i\bar{z}x}) & 1+zC(e^{-i\bar{z}x})\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\bar{k}B(M_0)+i\bar{k}\xi+i\bar{b}\\ -\dfrac{\bar{k}}{\Delta}\end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} i\bar{k}\xi+i\bar{b}-izB(M_{\bar{z}})(\bar{k}\xi+\bar{b})+\bar{k}B(M_0)- \\ -izB(e^{-i\bar{z}x})(\bar{k}\xi+\bar{b})-z\bar{k}B(M_0)B(e^{-i\bar{z}x})- \\ -z\bar{k}B(M_0)B(M_{\bar{z}})-z\dfrac{\bar{k}}{\Delta}C(M_{\bar{z}})-\dfrac{\bar{k}}{\Delta}-z\dfrac{\bar{k}}{\Delta}C(e^{-i\bar{z}x})\end{pmatrix}$$

Обращаясь к формуле для $C(f)$, $C(f) = -\Delta\{L(f)+B(M_0)\times \times B(f)-B(A_0f)\}$, заметим, что $z\bar{k}B(M_0)B(M_{\bar{z}})+z\dfrac{\bar{k}}{\Delta}C(M_{\bar{z}}) = -z\bar{k}L(M_{\bar{z}})+zk\,B(A_0M_{\bar{z}})$; $z\bar{k}B(M_0)\,B(e^{-i\bar{z}x})+z\,\dfrac{\bar{k}}{\Delta}\,C(e^{-i\bar{z}x}) = -z\bar{k}L(e^{-i\bar{z}x})+z\bar{k}B(A_0e^{-i\bar{z}x})$, и используя соотношения

$$A_0e^{-i\bar{z}x} = i\int_0^x e^{-i\bar{z}v}\,dv = \frac{1-e^{-i\bar{z}x}}{\bar{z}};$$

$$A_0M_{\bar{z}}(x) = -\int_0^x\int_0^u e^{-i\bar{z}(u-v)}s(v)\,dv\,du = \frac{M_0(x)-M_{\bar{z}}(x)}{\bar{z}},$$

приходим к равенству

$$-iW(z,\ \xi)\,J\begin{pmatrix}\dfrac{\bar{k}}{\Delta}\\ kB(M_0)-ib\end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} i\bar{k}\xi+i\bar{b}-izB(M_{\bar{z}})(\bar{k}\xi+\bar{b})+\bar{k}B(M_0)+z\bar{k}L(M_{\bar{z}})- \\ -\bar{k}B(M_0-M_{\bar{z}}) \\ -izB(e^{-i\bar{z}x})(\bar{k}\xi+\bar{b})-\dfrac{\bar{k}}{\Delta}+z\bar{k}L(e^{-i\bar{z}x})-\bar{k}B(1-e^{-i\bar{z}x})\end{pmatrix}.$$

Поскольку $B(1) = -\frac{1}{\Delta}$, то после приведения подобных получим, что правая часть (24) равна

$$-iW(z, \xi) J\left(\frac{\frac{\bar{k}}{\Delta}}{kB(M_0) - ib}\right) =$$
$$= \begin{pmatrix} i\bar{k}\xi + i\bar{b} - izB(M_{\bar{z}})(\bar{k}\xi + \bar{b}) + z\bar{k}L(M_{\bar{z}}) + \bar{k}B(M_{\bar{z}}) \\ -izB(e^{-i\bar{z}x})(\bar{k}\xi + \bar{b}) + z\bar{k}L(e^{-i\bar{z}x}) + \bar{k}B(e^{-i\bar{z}x}) \end{pmatrix}. \quad (25)$$

Для преобразования левой части (24), вычислим производную

$$-\overline{M_{\bar{z}}'(x)} = \frac{d}{dx} i \int_0^x e^{-i\bar{z}(x-v)} s(v)\, dv = is(x) - i\bar{z}M_{\bar{z}}(x).$$

В силу тождества триады, $-\overline{M_{\bar{z}}'(\xi)} + (\overline{\chi(\xi-u)}, M_{\bar{z}}'(u)) = is(x) - i\int_0^\xi \overline{\chi(\xi-x)}\, s(x)\, dx - iz\overline{M_{\bar{z}}(\xi)} + iz(\overline{\chi(\xi-u)}, \quad M_{\bar{z}}(u)) = i\bar{k}\xi + i\bar{b} - iz\overline{M_{\bar{z}}(\xi)} + iz(\overline{\chi(\xi-u)}, M_{\bar{z}}(u))$.

Из последнего соотношения и (25) следует, что (24) сводится к равенству

$$\begin{pmatrix} -i\overline{M_{\bar{z}}(\xi)} + i(\overline{\chi(\xi-u)}, M_{\bar{z}}(u)) \\ -ie^{iz\xi} + i(\overline{\chi(\xi-u)}, e^{-i\bar{z}u}) \end{pmatrix} = $$
$$= \begin{pmatrix} -i(\bar{k}\xi + \bar{b}) B(M_{\bar{z}}) + \bar{k}L(M_{\bar{z}}) \\ -i(\bar{k}\xi + \bar{b}) B(e^{-i\bar{z}x}) + \bar{k}L(e^{-i\bar{z}x}) \end{pmatrix},$$

которое легко проверяется на основании очевидного тождества: $\bar{k}L(f) - i(\bar{k}\xi + \bar{b})B(f) = -i\overline{f(\xi)} + i(\overline{\chi(\xi-u)}, f(u))$, вытекающего из (16). Соотношение (23) установлено.

То, что $W(z, \xi)$ удовлетворяет начальному условию, следует из формул (7), (8), определяющих поведение элементов триады в нуле.

Мы имеем $\lim\limits_{\xi\to+0} B(f) = \lim\limits_{\xi\to+0}\left\{\frac{\bar{k}}{\Delta}\overline{f(0)} + \frac{k}{\Delta}\overline{f(\xi)} - \frac{k}{\Delta}(\chi, f) - \frac{k}{\Delta}(\overline{\chi(\xi-u)}, f(u))\right\} = \left\{\frac{\overline{k(+0)}}{\Delta(+0)}\overline{f(0)} + \frac{k(+0)}{\Delta(+0)}\overline{f(0)}\right\} = \frac{-\lambda}{-\lambda s(0)} \times \overline{f(0)} = \frac{\overline{f(0)}}{s(0)}$, откуда $\lim\limits_{\xi\to+0} B(e^{-i\bar{z}x}) = \frac{1}{s(0)}$, $\lim\limits_{\xi\to+0} B(M_{\bar{z}}) = \frac{1}{s(0)} \times \overline{M_{\bar{z}}(0)} = 0$.

Далее, поскольку $\lim\limits_{\xi \to +0} L(f) = \lim\limits_{\xi \to +0} i \left\{ \frac{\overline{k\xi + \bar{b}}}{\Delta} \overline{f(0)} - \frac{b}{\Delta} \overline{f(\xi)} - \right.$ $\left. - \frac{\overline{k\xi + \bar{b}}}{\Delta} (\chi, f) + \frac{b}{\Delta} (\overline{\chi(\xi - u)}, f(u)) \right\} = 0$, то $\lim\limits_{\xi \to +0} C(f) = -\Delta(+0) \times$ $\times \{\lim\limits_{\xi \to +0} L(f) + \lim\limits_{\xi \to +0} \{B(M_0) B(f)\} - \lim\limits_{\xi \to +0} B(A_0 f)\} = 0$.

Таким образом,

$$\lim_{\xi \to +0} W(z, \xi) = \lim_{\xi \to +0} \begin{pmatrix} 1 - zB(M_{\bar{z}}) & zC(M_{\bar{z}}) \\ -zB(e^{-i\bar{z}x}) & 1 + zC(e^{-i\bar{z}x}) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -\frac{z}{s(0)} & 1 \end{pmatrix},$$

что и завершает доказательство теоремы.

Результат, доказанный в теореме 4, можно переформулировать так.

Теорема 5. *При выполнении* $(i - iii)$, (A) *и* (B) *матрица-функция* $W(z, \xi)$ *допускает следующее мультипликативное представление:*

$$W(z, \xi) = e^{-iz\mathrm{E}} \int\limits_0^{\overset{\xi}{\curvearrowright}} \exp\{-izQ(t)\, dt\},$$

где

$$\mathrm{E} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ -\frac{i}{s(0)} & 0 \end{pmatrix}, \ \mathrm{E}J \geqslant 0, \ \mathrm{E}^2 = 0;$$

$$Q = J \begin{pmatrix} \frac{k\bar{k}}{\Delta^2}; & \frac{k\bar{k}}{\Delta} \int\limits_0^\xi \frac{k\bar{b} - \bar{k}b}{2i} dv - \frac{k\bar{b} - \bar{k}b}{2i\Delta} - \frac{i}{2} \\ * & \left| \frac{k}{\Delta} \int\limits_0^\xi \frac{k\bar{b} - \bar{k}b}{2i} dv - \frac{ik\xi}{2} - ib \right|^2 \end{pmatrix},$$

$JQ \geqslant 0$, $Q^2 = -Q$.

Условие (B) необходимо и достаточно для существования мультипликативного интеграла.

Следствие 1. Матрица $W(z, \xi)$ обладает J-свойствами ([4]—[7]):

$$W(z, \xi) JW^*(z, \xi) - J \begin{cases} > 0, & \operatorname{Im} z > 0, \\ = 0, & \operatorname{Im} z = 0, \\ < 0, & \operatorname{Im} z < 0. \end{cases}$$

Из J-свойств матрицы $W(z, \xi)$ вытекает

Следствие 2. Дробно-линейное преобразование с матрицей коэффициентов $W(z, \xi)$:

$$\tilde{\omega}(z) = \frac{a_{11}(z, \xi)\, \omega(z) + a_{12}(z, \xi)}{a_{21}(z, \xi)\, \omega(z) + a_{22}(z, \xi)} \tag{26}$$

отображает класс R-функций в себя*: $\frac{w(z) - \overline{w(z)}}{2i} \geqslant 0$ $(\operatorname{Im} z > 0)$.

* R-функцией будем вслед за М. Г. Крейном называть аналитическую в верхней полуплоскости функцию с неотрицательной мнимой частью.

5°. Для выявления связи между построенной нами целой матрицей-функцией $W(z, \xi)$ и исходной функцией $s(x)$, выведем следующее асимптотическое соотношение.

Теорема 6. *Пусть точка* ξ *взята из промежутка* $(0, l)$ *в котором выполняются* $(i - iii)$, (A) и (B). *Если* $\omega(z)$ — R-*функция, то* $w(z) = \frac{a_{11}(z, \xi)\,\omega(z) + a_{12}(z, \xi)}{a_{21}(z, \xi)\,\omega(z) + a_{22}(z, \xi)}$ *удовлетворяет условию*

$$\lim_{y \to +\infty} e^{yx} \left\{ w(iy) - i \int_0^x e^{-yu} s(u)\, du \right\} = 0 \tag{27}$$

для всех $x \in (0, \xi)$.

Доказательство. Вычисление предела при $y \to +\infty$ выражения

$$e^{yx} \left\{ w(iy) - i \int_0^x e^{-yu} s(u)\, du \right\} =$$

$$= e^{yx} \left\{ \frac{a_{11}(iy, \xi)\,\omega(iy) + a_{12}(iy, \xi)}{a_{21}(iy, \xi)\,\omega(iy) + a_{22}(iy, \xi)} - i \int_0^x e^{-yu} s(u)\, du \right\} =$$

$$= e^{yx} \frac{a_{11}(iy, \xi) - i \int_0^x e^{-yu} s(u)\, du\, a_{21}(iy, \xi)}{a_{21}(iy, \xi)\,\omega(iy) + a_{22}(iy, \xi)}\, \omega(iy) +$$

$$+ e^{yx} \frac{a_{12}(iy, \xi) - i \int_0^x e^{-yu} s(u)\, du\, a_{22}(iy, \xi)}{a_{21}(iy, \xi)\,\omega(iy) + a_{22}(iy, \xi)}$$

проведем в два этапа.

1. Покажем, что выполняются соотношения:

$$\begin{aligned} &\frac{e^{yx}}{y} \left\{ a_{11}(iy, \xi) - i \int_0^x e^{-yu} s(u)\, du\, a_{21}(iy, \xi) \right\} \to 0 \ (y \to +\infty), \\ &\frac{e^{yx}}{y} \left\{ a_{12}(iy, \xi) - i \int_0^x e^{-yu} s(u)\, du\, a_{22}(iy, \xi) \right\} \to 0 \ (y \to +\infty). \end{aligned} \tag{28}$$

2. Для достаточно больших y оценим снизу величины: $\frac{1}{y} \left| \frac{a_{21}(iy, \xi)\,\omega(iy) + a_{22}(iy, \xi)}{\omega(iy)} \right|$; $\frac{1}{y} \left| a_{21}(iy, \xi)\,\omega(iy) + a_{22}(iy, \xi) \right|$, где $\omega(z)$ — произвольная R-функция.

1. Рассмотрим первое из выражений (28):

$$\frac{e^{yx}}{y} \left\{ a_{11}(iy, \xi) - i \int_0^x e^{-yu} s(u)\, du\, a_{21}(iy, \xi) \right\} = \frac{e^{yx}}{y} \left\{ [1 - iyB(M_{-iy}(u))] - \right.$$

$$- i \int_0^x e^{-yu} s(u)\, du \left[- iyB(e^{-yu}) \right] \Big\} = \frac{e^{yx}}{y} - ie^{yx} \Big\{ B(M_{-iy}(u)) -$$

$$- i \int_0^x e^{-yu} s(u)\, du\, B(e^{-yu}) \Big\}.$$

Представляя $i \Big\{ B(M_{-iy}(u)) - i \int_0^x e^{-yt} s(t)\, dt\, B(e^{-yu}) \Big\} = i \frac{k}{\Delta} \overline{M_{-iy}(\xi)} -$

$$- \frac{i\bar{k}}{\Delta} (\chi, M_{-iy}) - i \frac{k}{\Delta} (\overline{\chi(\xi - u)}, M_{-iy}(u)) + \frac{\bar{k}}{\Delta} \int_0^x e^{-yt} s(t)\, dt +$$

$$+ \frac{k}{\Delta} e^{-y\xi} \int_0^x e^{-yt} s(t)\, dt - \frac{\bar{k}}{\Delta} (\chi(u), e^{-yu}) \int_0^x e^{-yt} s(t)\, dt - \frac{k}{\Delta} (\overline{\chi(\xi - u)},$$

$e^{-yu}) \int_0^x e^{-yt} s(t)\, dt = \frac{\bar{k}}{\Delta} A_1 + \frac{k}{\Delta} A_2$, покажем, что имеют место оценки:

$$A_1 = - i(\chi, M_{-iy}) + \int_0^x e^{-yt} s(t)\, dt - (\chi(u), e^{-yu}) \int_0^x e^{-yt} s(t)\, dt = \frac{1}{y} \times$$

$$\times \left\{ b + \frac{k}{y} \right\} + e^{-yx} o(1);$$

$$A_2 = \overline{iM_{-iy}(\xi)} - i(\overline{\chi(\xi - u)}, M_{-iy}(u)) + e^{-y\xi} \int_0^x e^{-yt} s(t)\, dt - \tag{29}$$

$$- (\overline{\chi(\xi - u)}, e^{-yu}) \int_0^x e^{-yt} s(t)\, dt = \frac{1}{y} \left\{ \bar{k}\xi + \bar{b} - \frac{\bar{k}}{y} \right\} + e^{-yx} o(1).$$

Докажем первую из них:

$$A_1 = - \int_0^\xi \chi(u) \int_0^u e^{-(u-t)y} \overline{s(t)}\, dt\, du + \int_0^x e^{-yt} s(t)\, dt - \int_0^\xi \chi(u) e^{-yu} du \int_0^x e^{-yt} s(t)\, dt =$$

$$= \int_0^x e^{-yt} s(t)\, dt - \int_0^\xi \chi(u) \int_{-u}^0 e^{-(u+\tau)y} s(\tau)\, d\tau\, du - \int_0^\xi \chi(u) \int_0^x e^{-(u+t)y} s(t)\, dt\, du =$$

$$= \int_0^x e^{-yt} s(t)\, dt - \int_0^\xi \chi(u) \int_{-u}^{x-u} e^{-(u+\tau)y} s(\tau)\, d\tau\, du - \int_0^\xi \chi(u) \int_{x-u}^x e^{-(u+\tau)y} s(\tau)\, d\tau\, du.$$

Поскольку для любой суммируемой функции $h(u)$

$$\int_0^\xi h(u)\, e^{-yu}\, du \to 0 \quad (y \to +\infty), \tag{30}$$

то $\int\limits_0^\xi \chi(u) \int\limits_{x-u}^{x} e^{-(u+\tau)y} s(\tau)\, d\tau\, du = e^{-xy} \int\limits_0^\xi \chi(u) \int\limits_0^u e^{-ty} s(t-u-x)\, dt\, du =$
$= e^{-xy} o(1)$,

откуда $A_1 = \int\limits_0^x e^{-yt} s(t)\, dt - \int\limits_0^\xi \chi(u) \int\limits_{-u}^{x-u} e^{-(u+\tau)y} s(\tau)\, d\tau\, du + e^{-xy} o(1) =$

$= \int\limits_0^x e^{-yt} s(t)\, dt - \int\limits_0^\xi \chi(u) \int\limits_0^x e^{-ty} s(t-u)\, dt\, du + e^{-xy} o(1) = \int\limits_0^x e^{-ty} \{s(t) -$

$- \int\limits_0^\xi \chi(u) s(t-u)\, du\}\, dt + e^{-xy} o(1)$.

Используя тождество триады (5), получим $A_1 = \int\limits_0^x e^{-ty} \{k(\xi) t +$

$+ b(\xi)\}\, dt + e^{-xy} o(1) = \frac{1}{y} \left\{ b(\xi) + \frac{k(\xi)}{y} \right\} + e^{-xy} o(1)$.

Производя оценку для A_2, заметим, что, в силу (30),

$$e^{-y\xi} \int\limits_0^x e^{-yt} s(t)\, dt = 0(1)\, e^{-xy}.$$

Тем самым

$$A_2 = \int\limits_0^\xi e^{-y(\xi-t)} \overline{s(t)}\, dt - \int\limits_0^\xi \overline{\chi(\xi-u)} \int\limits_0^u e^{-(u-t)y} \overline{s(t)}\, dt\, du -$$

$$- \int\limits_0^\xi \overline{\chi(\xi-u)}\, e^{-yu} du \int\limits_0^x e^{-yt} s(t)\, dt + e^{-yx} o(1) = \int\limits_0^\xi e^{-yt} \overline{s(\xi-t)}\, dt -$$

$$- \int\limits_0^\xi \overline{\chi(\xi-u)} \int\limits_{-u}^{0} e^{-(u+\tau)y} s(\tau)\, d\tau\, du - \int\limits_0^\xi \overline{\chi(\xi-u)} \int\limits_0^x e^{-(u+t)y} s(t)\, dt\, du +$$

$$+ e^{-yx} o(1) = \int\limits_0^\xi e^{-yt} \overline{s(\xi-t)}\, dt - \int\limits_0^\xi \overline{\chi(\xi-u)} \int\limits_{-u}^{x-u} e^{-(u+\tau)y} s(\tau)\, d\tau\, du -$$

$$- \int\limits_0^\xi \overline{\chi(\xi-u)} \int\limits_{x-u}^{x} e^{-(u+\tau)y} s(\tau)\, d\tau\, du + e^{-yx} o(1) = \int\limits_0^x e^{-yt} \overline{s(\xi-t)}\, dt +$$

$$+ \int\limits_x^\xi e^{-yt} \overline{s(\xi-t)}\, dt - \int\limits_0^\xi \overline{\chi(\xi-u)} \int\limits_0^x s(t-u)\, e^{-ty}\, dt\, du -$$

$$- e^{-xy} \int\limits_0^\xi \overline{\chi(\xi-u)} \int\limits_0^u e^{-ty} s(t-u-x)\, dt\, du + e^{-yx} o(1) = \int\limits_0^x e^{-yt} s(t-\xi)\, dt +$$

$$+ e^{-yx} \int\limits_0^{\xi-x} e^{-y\tau} s(\overline{\xi-x-\tau})\, d\tau - \int\limits_0^x e^{-ty} \int\limits_0^\xi s(t-u)\, \overline{\chi(\xi-u)}\, du\, dt +$$

$$+ e^{-yx}o(1) = \int\limits_0^x e^{-yt} \{s(t-\xi) - \int\limits_0^\xi s(t-u)\overline{\chi(\xi-u)}\,du\}\,dt + e^{-yx}o(1) =$$

$$= \int\limits_0^x e^{-yt}\{\overline{k(\xi)}(\xi - t) + \overline{b(\xi)}\}\,dt + e^{-yx}o(1) = \frac{1}{y}\left\{\overline{k(\xi)}\,\xi + \overline{b(\xi)} - \right.$$

$$\left. - \frac{\overline{k(\xi)}}{y}\right\} + e^{-yx}o(1).$$

Таким образом,

$$i\left\{B(M_{-iy}) - i\int\limits_0^x e^{-yt}s(t)\,dtB(e^{-yu})\right\} = \frac{\bar{k}}{\Delta}A_1 +$$

$$+ \frac{k}{\Delta}A_2 = \frac{\bar{k}}{\Delta}\left\{\frac{b}{y} + \frac{k}{y^2}\right\} + \frac{k}{\Delta}\left\{\frac{\bar{k}\xi}{y} + \frac{\bar{b}}{y} - \frac{\bar{k}}{y^2}\right\} + e^{-yx}o(1) =$$

$$= \frac{1}{y} + e^{-yx}o(1), \tag{31}$$

откуда следует справедливость первого из соотношений (28).

Перейдем к выводу второго из этих соотношений. Воспользовавшись оценками (29), получим

$$\left\{L(M_{-iy}) - i\int\limits_0^x e^{-yt}s(t)\,dt\,L(e^{-yu})\right\} = \frac{\bar{k}\xi + \bar{b}}{\Delta}A_1 - \frac{b}{\Delta}A_2 =$$

$$= \frac{\bar{k}\xi + \bar{b}}{\Delta}\left\{\frac{b}{y} + \frac{k}{y^2}\right\} - \frac{b}{\Delta}\left\{\frac{\bar{k}\xi}{y} + \frac{\bar{b}}{y} - \frac{\bar{k}}{y^2}\right\} + e^{-yx}o(1) = \frac{1}{y^2} + e^{-yx}o(1).$$

При помощи последнего равенства и (31) вычислим

$$C(M_{-iy}) - i\int\limits_0^x e^{-yt}s(t)\,dtC(e^{-yu}) = -\Delta\left\{[L(M_{-iy}) - \right.$$

$$- i\int\limits_0^x e^{-yt}s(t)\,dtL(e^{-yu})] + B(M_0)[B(M_{-iy}) - i\int\limits_0^x e^{-yt}s(t)\,dtB(e^{-yu})] -$$

$$\left. - \left[B\left(\frac{M_0 - M_{-iy}}{-iy}\right) - i\int\limits_0^x e^{-yt}s(t)\,dt\,B\left(\frac{1-e^{-yu}}{-iy}\right)\right]\right\} =$$

$$= -\Delta\left\{\frac{1}{y^2} - iB(M_0)\frac{1}{y} + e^{-yx}o(1) - \frac{1}{iy}\left[B(M_0) - i\int\limits_0^x e^{-yt}s(t)\,dt\,B(1)\right] + \right.$$

$$+ \frac{1}{iy}\left[B(M_{-iy}) - i\int\limits_0^x e^{-yt}s(t)\,dt\,B(e^{-yu})\right]\Big\} = -\Delta\left\{\frac{1}{y^2} - \right.$$

$$\left. - \frac{1}{\Delta y}\int\limits_0^x e^{-yt}s(t)\,dt - \frac{1}{y^2} + e^{-yx}o(1)\right\} = \frac{1}{y}\int\limits_0^x e^{-yt}s(t)\,dt + e^{-yx}o(1).$$

Отсюда вытекает, что

$$\frac{e^{yx}}{y}\left\{a_{12}(iy,\xi)-i\int_0^x e^{-yt}s(t)\,dt\,a_{22}(iy,\xi)\right\}=\frac{e^{yx}}{y}\left\{iyC(M_{-iy})-\right.$$

$$\left.-i\int_0^x e^{-yt}s(t)\,dt\,[1+iyC(e^{-yu})]\right\}=ie^{yx}\left\{C(M_{-iy})-\right.$$

$$\left.-i\int_0^x e^{-yt}s(t)\,dt\,C(e^{-yu})-\frac{1}{y}\int_0^x e^{-yt}s(t)\,dt\right\}\to o\,(y\to+\infty).$$

Соотношения (28) установлены.

2. Произведем оценку снизу:

$$|a_{21}(z,\xi)\,\omega(z)+a_{22}(z,\xi)|=|a_{21}(z,\xi)|\cdot\left|\omega(z)+\frac{a_{22}(z,\xi)}{a_{21}(z,\xi)}\right|\geqslant$$

$$\geqslant|a_{21}(z,\xi)|\,\mathrm{Im}\left\{\omega(z)+\frac{a_{22}(z,\xi)}{a_{21}(z,\xi)}\right\}.$$

Из J-свойств матрицы $W(z,\xi)$ следует, что $\frac{a_{22}(z,\xi)}{a_{21}(z,\xi)}$ — R-функция откуда

$$\mathrm{Im}\left\{\omega(z)+\frac{a_{22}(z,\xi)}{a_{21}(z,\xi)}\right\}=\mathrm{Im}\,\omega(z)+\mathrm{Im}\frac{a_{22}(z,\xi)}{a_{21}(z,\xi)}\geqslant$$

$$\geqslant\mathrm{Im}\frac{a_{22}(z,\xi)}{a_{21}(z,\xi)}=\frac{a_{22}(z,\xi)\,\overline{a_{21}(z,\xi)}-\overline{a_{22}(z,\xi)}\,a_{21}(z,\xi)}{2i\,|a_{21}(z,\xi)|^2}.$$

Таким образом,

$$|a_{21}(z,\xi)\,\omega(z)+a_{22}(z,\xi)|\geqslant\frac{a_{22}(z,\xi)\,\overline{a_{21}(z,\xi)}-\overline{a_{22}(z,\xi)}\,a_{21}(z,\xi)}{2i\,|a_{21}(z,\xi)|}.$$

Аналогично,

$$\left|\frac{a_{21}(z,\xi)\,\omega(z)+a_{22}(z,\xi)}{\omega(z)}\right|=|a_{22}(z,\xi)|\cdot\left|\frac{a_{21}(z,\xi)}{a_{22}(z,\xi)}+\frac{1}{\omega(z)}\right|\geqslant$$

$$\geqslant|a_{22}(z,\xi)|\cdot\left|\mathrm{Im}\left\{\frac{a_{21}(z,\xi)}{a_{22}(z,\xi)}+\frac{1}{\omega(z)}\right\}\right|=$$

$$=-|a_{22}(z,\xi)|\,\mathrm{Im}\left\{\frac{a_{21}(z,\xi)}{a_{22}(z,\xi)}+\frac{1}{\omega(z)}\right\}\geqslant-|a_{22}(z,\xi)|\times$$

$$\times\,\mathrm{Im}\frac{a_{21}(z,\xi)}{a_{22}(z,\xi)}=\frac{a_{22}(z,\xi)\,\overline{a_{21}(z,\xi)}-\overline{a_{22}(z\xi)(z,\xi)}\,a_{21}(z,\xi)}{2i\,|a_{22}(z,\xi)|}.$$

Замечая, что при $z=iy$ существуют пределы

$$\lim_{y\to+\infty}\frac{1}{y}a_{21}(iy,\xi)=\lim_{y\to+\infty}\frac{1}{y}\{-iyB(e^{-yx})\}=-i\lim_{y\to+\infty}\left\{\frac{\overline{k}}{\Delta}+\right.$$

$$\left.+\frac{k}{\Delta}e^{-y\xi}-\frac{\overline{k}}{\Delta}(\chi(u),e^{-yu})-\frac{k}{\Delta}\overline{(\chi(\xi-u),e^{-yu})}\right\}=-i\frac{\overline{k}}{\Delta}=-i\overline{\alpha};$$

$$\lim_{y\to+\infty}\frac{1}{y}a_{22}(iy,\xi)=\lim_{y\to+\infty}\frac{1}{y}\{1+iyC(e^{-yx})\}=$$
$$=-i\lim_{y\to+\infty}\Delta\{L(e^{-yx})+B(M_0)B(e^{-yx})-B(A_0e^{-yx})\}=$$
$$=-i\Delta\left\{i\frac{\bar{k}\xi+\bar{b}}{\Delta}+\frac{\bar{k}}{\Delta}B(M_0)\right\}=-i\{\bar{k}B(M_0)+\bar{i}\bar{k}\xi+i\bar{b}\}=$$
$$=-i\{\overline{kB(M_0)-ib}\}=-i\bar{\beta},$$

и из тождества (22)

$$\lim_{y\to+\infty}\frac{1}{y^2}\{a_{22}(iy,\xi)\overline{a_{21}(iy,\xi)}-\overline{a_{22}(iy,\xi)}a_{21}(iy,\xi)\}=\bar{\beta}\alpha-\beta\bar{\alpha}=i,$$

получаем

$$\lim_{y\to+\infty}\frac{1}{y}\left\{\frac{a_{22}(iy,\xi)\overline{a_{21}(iy,\xi)}-\overline{a_{22}(iy,\xi)}\,\overline{a_{21}(iy,\xi)}}{2i\,|a_{21}(iy,\xi)|}\right\}=\frac{1}{2|\alpha|},$$
$$\lim_{y\to+\infty}\frac{1}{y}\left\{\frac{a_{22}(iy,\xi)\overline{a_{21}(iy,\xi)}-\overline{a_{22}(iy,\xi)}a_{21}(iy,\xi)}{2i\,|a_{22}(iy,\xi)|}\right\}=\frac{1}{2|\beta|}.$$

Следовательно, для достаточно больших y

$$\frac{1}{y}|a_{21}(iy,\xi)\,\omega(iy)+a_{22}(iy,\xi)|\geqslant\frac{1}{4|\alpha|},$$
$$\frac{1}{y}\left|\frac{a_{21}(iy,\xi)\,\omega(iy)+a_{22}(iy,\xi)}{\omega(iy)}\right|\geqslant\frac{1}{4|\beta|}. \tag{32}$$

Асимптотическое соотношение (27) следует из (28) и (32). Теорема доказана.

Установленная в теореме 6 асимптотическая связь позволяет подвести итоги наших исследований, доказав как эрмитову положительность функции $s(x)$, так и ее многозначную продолжаемость с интервала $(-l, l)$.

Теорема 7. *Пусть* $w(z)$ — R-*функция и существует такая непрерывная на* $(0, \xi)$ *функция* $s(x)$, *что справедливо асимптотическое соотношение*

$$\lim_{\substack{z=iy\\ y\to+\infty}}e^{-izx}\left\{w(z)-i\int_0^x e^{izv}s(v)\,dv\right\}=0,\ x\in(0,\xi) \tag{33}$$

Тогда имеют место следующие три утверждения:

1. $s(x)$ *определяется однозначно*

$$2.\ w(z)=\int_{-\infty}^{\infty}\frac{d\sigma(t)}{t-z},\ \int_{-\infty}^{\infty}d\sigma(t)<\infty \tag{34}$$

$$3.\ s(x)=\int_{-\infty}^{\infty}e^{-ixt}\,d\sigma(t),\ x\in(0,\xi) \tag{35}$$

Доказательство. 1. Пусть существуют две функции $s_1(x)$ и $s_2(x)$ такие, что для них выполняется соотношение (33). Тогда

$$\lim_{\substack{z=iy \\ y\to+\infty}} e^{-izx} \int_0^x e^{izv} \{s_1(v) - s_2(v)\}\, dv = 0, \quad x \in (0, \xi). \tag{36}$$

Обозначим $\Phi(z) = \int_0^x e^{-iz(x-v)} \{s_1(v) - s_2(v)\}\, dv$. Тогда $\Phi(z)$ — целая функция экспоненциального типа, ограниченная, в силу своего вида, на вещественной оси и мнимой отрицательной полуоси. Так как из (36) следует, что на положительном мнимом луче $\Phi(z)$ стремится к нулю, то, по принципу Фрагмена—Линделефа, $\Phi(z) \equiv 0$, откуда $s_1(x) = s_2(x)$, $0 < x < \xi$.

2. Переписав асимптотическое соотношение (33) в виде $\lim\limits_{y\to+\infty} \frac{e^{yx}}{y} \left\{ yw(iy) - i \int_0^x ye^{-yu} s(u)\, du \right\} = 0$, приходим к выводу, что $yw(iy) - i \int_0^x ye^{-yu} s(u)\, du \to 0 \ (y \to +\infty)$.

Замечая, что $\int_0^x ye^{-yu} s(u)\, du$ — ограниченная величина, получаем оценку $|yw(iy)| \leqslant \mathrm{const}\ (y \geqslant 1)$. Откуда $w(z)$ представима в виде (34).

3. Из (34) следует, что имеет смысл интеграл Хинчина—Бохнера: $s_0(x) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-ixt}\, d\sigma(t)$.

Рассмотрим $F(iy) = e^{yx} \left\{ w(iy) - i \int_0^x e^{-yv} s_0(v)\, dv \right\} =$

$$= e^{yx} \left\{ \int_{-\infty}^{\infty} \frac{d\sigma(t)}{t - iy} - i \int_0^x e^{-yv} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-ivt}\, d\sigma(t)\, dv \right\} =$$

$$= e^{yx} \int_{-\infty}^{\infty} \left\{ \frac{1}{t - iy} - i \int_0^x e^{-i(t-iy)v}\, dv \right\} d\sigma(t) =$$

$= e^{yx} \int_{-\infty}^{\infty} \left\{ \frac{1}{t-iy} - \frac{1}{t-iy} \left(1 - e^{-i(t-iy)x}\right) \right\} d\sigma(t) = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{itx}}{t-iy}\, d\sigma(t)$. Оценивая $|F(iy)| \leqslant \int_{-\infty}^{\infty} \frac{d\sigma(t)}{\sqrt{t^2 + y^2}} \leqslant \int_{-\infty}^{\infty} \frac{d\sigma(t)}{y} \to 0\ (y \to +\infty)$, приходим к выводу, что $s_0(x)$ удовлетворяет асимптотическому соотношению (33). Из единственности вытекает, что $s(x)=s_0(x)$ при $0<x<\xi$, т. е. $s(x)=\int\limits_{-\infty}^{\infty} e^{-ixt}\,d\sigma(t)$, $x\in(0,\xi)$. Теорема доказана.

6°. Из теорем 2, 5, 6, 7 следует

Основная теорема. *Для того чтобы функция* $s(x)$, *обладающая свойствами* $(i-iii)$ *была эрмитово положительной и многозначно продолжаемой с интервала* $(-l, l)$, *необходимо и достаточно, чтобы* $s(x)$ *удовлетворяла следующим двум условиям:*

(A) $((\lambda I-K_\xi)\varphi,\varphi)>0$ $\forall\varphi\in C[0,\xi]$, $\varphi\neq 0$; $\forall\xi\in(0,l)$

(B) $\Delta(l-0)\leqslant 0$.

7°. Сформулированная нами основная теорема дает ответ на вопрос о величине максимального интервала $(-l_0, l_0)$, с которого функция $s(x)$, удовлетворяющая $(i-iii)$, будет неоднозначно продолжаема. Он определяется такой точкой l_0, для которой либо 1) впервые нарушается строгое неравенство (A) и $\Delta(l_0-0)\leqslant 0$, либо 2) условие (A) выполнено при всех $\xi\in(0, l_0]$, включая и правый конец сегмента, а $\Delta(l_0)=0$.

В обоих случаях продолжение $s(x)$ с сегмента $[-l_0, l_0]$ будет единственно.

Смысл величины $\Delta(\xi)$ просматривается из следующей формулы. Для обобщенной функции

$$B=B_\xi(x)=\frac{\bar k}{\Delta}\delta_0(x)+\frac{k}{\Delta}\delta_\xi(x)-\frac{\bar k}{\Delta}\chi_\xi(x)-\frac{k}{\Delta}\overline{\chi_\xi(\xi-x)},\tag{37}$$

являющейся линейной комбинацией двух δ-функций Дирака $\delta_\xi(x)=\delta(\xi-x)$, $\delta_0(x)=\delta(x)$ и суммируемой функции, найдем скалярное произведение (SB, B).

Вычисляя формально результат применения к $B_\xi(x)$ оператора S с непрерывным ядром, получим

$$SB_\xi(x)=\int\limits_0^\xi s(x-u)\,B_\xi(u)\,du=\frac{\bar k}{\Delta}s(x)+\frac{k}{\Delta}s(x-\xi)-$$

$$-\frac{\bar k}{\Delta}\int\limits_0^\xi s(x-u)\,\chi(u)\,du-\frac{k}{\Delta}\int\limits_0^\xi s(x-u)\overline{\chi(\xi-u)}\,du=$$

$$=\frac{\bar k}{\Delta}\left\{s(x)-\int\limits_0^\xi s(x-u)\,\chi(u)\,du\right\}+\frac{k}{\Delta}\left\{s(x-\xi)-\int\limits_0^\xi s(x-u)\overline{\chi(\xi-u)}\times\right.$$

$$\left.\times\,du\right\}=\frac{\bar k}{\Delta}\{kx+b\}+\frac{k}{\Delta}\{\bar k(\xi-x)+\bar b\}=1.\tag{38}$$

Далее, в формуле (4) для k: $k=s'(x)-\int\limits_0^\xi s'(x-t)\,\chi(t)\,dt$ умножим обе части на $\overline{\chi(x)}$ и проинтегрируем: $k\int\limits_0^\xi\overline{\chi(x)}\,dx=\int\limits_0^\xi s'(x)\,\overline{\chi(x)}\times$

$\times dx - \int\limits_0^\xi \overline{\chi(x)} \int\limits_0^\xi s'(x-t)\chi(t)\,dt\,dx$, складывая последнее равенство с сопряженным, получим $k\int\limits_0^\xi \overline{\chi(x)}\,dx + \bar{k}\int\limits_0^\xi \chi(x)\,dx = \int\limits_0^\xi s'(x)\overline{\chi(x)}\,dx + {}$ $+ \int\limits_0^\xi \overline{s'(x)}\chi(x)\,dx$, откуда вытекает, поскольку $\int\limits_0^\xi \overline{s'(x)}\chi(x)\,dx =$ $= k - s'(+0)$, $\int\limits_0^\xi s'(x)\overline{\chi(x)}\,dx = \bar{k} - \overline{s'(+0)}$, что $k + \bar{k} -$ $- k\int\limits_0^\xi \overline{\chi(x)}\,dx - \bar{k}\int\limits_0^\xi \chi(x)\,dx = s'(+0) + \overline{s'(+0)}$.

Таким образом,

$$(SB, B) = (1, B) = \frac{k}{\Delta} + \frac{\bar{k}}{\Delta} - \frac{k}{\Delta}\int\limits_0^\xi \overline{\chi(x)}\,dx - \frac{\bar{k}}{\Delta}\int\limits_0^\xi \chi(x)\,dx =$$

$$= \frac{s'(+0) + \overline{s'(+0)}}{\Delta} = -\frac{\lambda}{\Delta}.$$

В частности, если $s(x)$ — эрмитово положительная функция то из последней формулы следует, что Δ не может быть положительной величиной.* В силу строгого возрастания $\Delta(\xi)$, заключаем отсюда, что в случае 2) функция $s(x)$ перестает быть эрмитово положительной на любом интервале, большем $(-l_0, l_0)$.

Наше обращение к обобщенной функции B не случайно. Введенные в (16) антилинейные формы $B(f)$ и $L(f)$ являются скалярными произведениями обобщенных функций B и L:

$$L = L_\xi(x) = i\frac{\bar{k}\xi + \bar{b}}{\Delta}\delta_0(x) - i\frac{b}{\Delta}\delta_\xi(x) - i\frac{\bar{k}\xi + \bar{b}}{\Delta}\chi_\xi(x) + {}$$

$$+ i\frac{b}{\Delta}\overline{\chi_\xi(\xi - x)} \tag{39}$$

на функцию $f(x)$.

При этом, согласно (38) функция B такова, что $SB_\xi(x) = 1$. А вычисляя соответственное выражение для L, получим

$$SL_\xi(x) = i\frac{\bar{k}\xi + \bar{b}}{\Delta}\left\{s(x) - \int\limits_0^\xi s(x-t)\chi_\xi(t)\,dt\right\} - i\frac{b}{\Delta}\left\{s(x-\xi) - \right.$$

$$\left. - \int\limits_0^\xi s(x-t)\overline{\chi_\xi(\xi - t)}\,dt\right\} = ix.$$

---

* Из соотношения $(SB, B) = -\frac{\lambda}{\Delta}$ следует, что теорема 2 может быть доказана и без привлечения критерия (1) М. Г. Крейна многозначной продолжаемости эрмитово положительной функции.

С третьей антилинейной формой из (16), $C(f)$, следует связать обобщенную функцию

$$C = C_\xi(x) = -\Delta\{L_\xi(x) + B(M_0)B_\xi(x) - A_0^* B_\xi(x)\}, \tag{40}$$

где сопряженный к A_0 оператор $A_0^* f(x) = -i\int\limits_x^\xi f(u)\,du$, определяется на δ-функциях $\delta_{x_0}(x)$:

$$A_0^*\delta_{x_0}(x) = \begin{cases} -i, & x \leqslant x_0, \\ 0, & x > x_0, \end{cases}$$

так что остается в силе равенство $(A_0\ h, f) = (h, A_0^* f)$. Можно проверить, что $SC_\xi(x) = M_0(x)$.

Понятие обобщенных функций B и C как решений уравнений $SB = 1$; $SC = M_0$ можно оформить в терминах оснащенного пространства положительно определенного оператора S: $H_- \supseteq H = L^2 = [0, \xi] \supseteq H_+$.

Поскольку $s(x)$ многозначно продолжаема с $[-\xi, \xi]$, то при любом фиксированном z функции $e^{-i\bar{z}x}$, $M_{\bar{z}}(x) \in H_+$, а B, L, C, задаваемые формулами (37), (39), (40), можно считать элементами обобщенного пространства H_-. Значения антилинейных форм $B(e^{-i\bar{z}x}), \ldots, C(M_{\bar{z}})$ являются скалярными произведениями элементов B, C из H_- на функции $e^{-i\bar{z}x}$, $M_{\bar{z}}(x) \in H_+$.

Более общее исследование этих вопросов, проведенное И. В. Ковалишиной и В. П. Потаповым, позволяет заключить не только то, что дробно-линейное преобразование (26) с матрицей коэффициентов $W(z, \xi)$ дает функции $w(z)$, связанные с $s(x)$ соотношениями (34), (35), но и что формула (26) полностью описывает все такие функции.

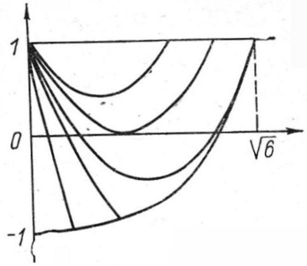
Наконец, укажем, что в пункте (ii) условие непрерывности второй производной можно ослабить, оставив лишь требование существования у $s(x)$ абсолютно-непрерывной производной.

Для таких функций $s(x)$, в случае выполнения (А), также вводится триада (χ, k, b) по формулам (3), (4) и величина $\Delta(\xi) = k\bar{k}\xi + k\bar{b} + \bar{k}b$, но теперь уже $\chi_\xi(x)$ лишь суммируема по x. Тем не менее, посредством аппроксимации, близкими к $s(x)$ функциям и проверяется справедливость теорем 1, 3. Остальные же доказательства остаются без изменения.

8°. В заключение приведем примеры, иллюстрирующие описанные здесь ситуации 1), 2).

Для семейства квадратных трехчленов $y = x^2 - \beta x + 1$, $\beta > 0$ на чертеже даны максимальные отрезки парабол, отсекаемых прямой $y = 1$ и кривой $y = \frac{1}{2}x^2 - \sqrt{-\frac{1}{12}x^4 + x^2 + 1}$, которые будучи продолжены в левую полуплоскость по четности, являются эрмитово-положительными и многозначно продолжаемыми с интервала (рисунок).

1. Когда параметр β меняется в пределах $0<\beta<\sqrt{6}$, имеет место случай 1/: при $l_0=\beta$ так что $s(l_0)=1$, кривые становятся однозначно продолжаемыми в связи с потерей знакоопределенности оператором $(\lambda I-K_{l_0}^{(\beta)})f=$ $=2\beta f(x)-2\int\limits_0^{l_0} f(u)\,du$. А величины $\Delta(l_0)=\Delta(l_0-0)<0$.



2. При значениях параметра $\beta>\sqrt{6}$ имеет место случай 2): функции становятся однозначно продолжаемыми в точках l_0 пересечения их с кривой $y=\frac{1}{12}x^2-\sqrt{-\frac{1}{12}x^4+x^2+1}$ в связи с обращением $\Delta(l_0)$ в ноль.

Случай $\beta=\sqrt{6}$ интересен тем, что в точке $l_0=\sqrt{6}$ одновременно происходит нарушение условия (А) и $\Delta(l_0-0)=0$.

Список литературы: **1**. *Крейн М. Г.* О логарифме безгранично разложимой эрмитово положительной функции.— Докл. АН СССР, 1944, **45**, № 3, с. 99—102. 2. *Крейн М. Г.* О проблеме продолжения эрмитово положительных непрерывных функций.— Докл. АН СССР, 1940, **26**, № 1, с. 17—22. **3**. *Крейн М. Г.* Об интегральных уравнениях, порождающих дифференциальные уравнения 2-го порядка.— Докл. АН СССР, 1954, **97**, № 1, с. 21—24. **4**. *Потапов В. П.* Мультипликативная структура J-нерастягивающих матриц-функций.— Тр. Моск. мат. о-ва, 1955, № 4, с. 125—236. **5**. *Ефимов А. В., Потапов В. П.* J-растягивающие матрицы-функции и их роль в аналитической теории электрических цепей.— Усп. мат. наук, 1973, **28**, вып. 1 (169), с. 65—130. **6**. *Ковалишина И. В., Потапов В. П.* Индефинитная метрика в проблеме Неванлинны—Пика.— Докл. АН АрмССР, 1974, **59**, № 1, с. 17—22. **7**. *Ковалишина И. В.* J-растягивающие матрицы-функции в задаче Каратеодори.— Докл. АН АрмССР, 1974, **59**, № 3, с. 129—135.

Поступила 6 января 1980 г.