УДК 517.5 + 519.210

В. Э. КАЦНЕЛЬСОН

КОНТИНУАЛЬНЫЕ АНАЛОГИ ТЕОРЕМЫ ГАМБУРГЕРА—НЕВАНЛИННЫ И ОСНОВНЫЕ МАТРИЧНЫЕ НЕРАВЕНСТВА КЛАССИЧЕСКИХ ЗАДАЧ. I

§ 1. 1°. Широкий круг классических задач анализа* связан с интегральными представлениями функций (последовательностей), порождающих тем или иным образом положительно-определенные ядра (матрицы). Этому кругу вопросов посвящены работа [1] и глава 8 монографии [2]. Одной из наиболее известных задач такого рода является проблема моментов Гамбургера, связанная с вопросом об интегральном представлении позитивной последовательности, или как мы говорим, последовательности класса $\boldsymbol{H}$.

Определение. *Последовательность* s_k, $0 \leqslant k \leqslant 2n$, *называется последовательностью класса* $\boldsymbol{H}_n$, *если матрица* $\| k_{t,\tau} \|_{0<t,\tau<n}$, $k_{t,\tau} = s_{t+\tau}$, *является эрмитово-положительной.*

Теорема. *(Гамбургер). Для того чтобы последовательность* s_k, $0 \leqslant k \leqslant 2n$, *принадлежала классу* $\boldsymbol{H}_n$, *необходимо и достаточно, чтобы она допускала интегральное представление*

$$s_k = \int\limits_{-\infty}^{\infty} \lambda^k \, d\sigma(\lambda) \qquad (I_H)$$

* Термин «классические задачи анализа» введен в употребление В. П. Потаповым и навеян известной монографией Н. И. Ахиезера «Классическая проблема моментов». В конце 60-х годов В. П. Потапов предложил единый подход к рассмотрению классических задач анализа, опирающийся на созданную им теорию j-растягивающих аналитических матриц-функций [3, 4]. Большой вклад в реализацию этого плана внесла И. В. Ковалишина. Она детально разработала наиболее характерные из дискретных классических задач [5 —7]. Подробное изложение ее результатов — в [8].

для $0 \leqslant k \leqslant 2n$, *где* $d\sigma(\lambda) \geqslant 0$ — *мера такая, что*

$$\int_{-\infty}^{\infty} (1+\lambda^{2n})\, d\sigma(\lambda) < \infty. \tag{h_n}$$

Мера $d\sigma(\lambda)$, *представляющая последовательность* s_k $(0 \leqslant k \leqslant 2n)$ *по* (I_H), *вообще говоря, неединственна.*

2°. В рассмотрениях, связанных с классическими задачами анализа, удобно иметь дело не непосредственно с самой мерой $d\sigma(\lambda)$, участвующей в интегральном представлении последовательности или функции, а с аналитической функцией $w(z)$, определяющей меру $d\sigma(\lambda)$.

Определение. *Класс* $(\boldsymbol{R})$ — *это класс функций* $w(z)$, *аналитических в верхней полуплоскости* $\operatorname{Im} z > 0$, *и таких, что* $\operatorname{Im} w(z) \geqslant 0$ $(\operatorname{Im} z > 0)$. *Все используемые нами сведения о функциях класса* $(\boldsymbol{R})$ *можно найти в [14].*

Теорема. *1) Всякая функция* $w(z)$ *класса* $(\boldsymbol{R})$ *представима в полуплоскости* $\operatorname{Im} z > 0$ *в виде*

$$w(z) = \alpha + \beta z + \int_{-\infty}^{\infty} \left(\frac{1}{\lambda - z} - \frac{\lambda}{1+\lambda^2}\right) d\sigma(\lambda), \tag{I_R}$$

где $\alpha = \bar{\alpha}$, $\beta \geqslant 0$, $d\sigma(\lambda) \geqslant 0$ — *мера такая, что**

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{d\sigma(\lambda)}{1+\lambda^2} < \infty. \tag{r_2}$$

2) Если $\alpha = \bar{\alpha}$, $\beta \geqslant 0$ *и мера* $d\sigma(\lambda) \geqslant 0$ *удовлетворяет условию* $(\boldsymbol{r}_2)$, *то правая часть равенства* (I_R) *задает в полуплоскости* $\operatorname{Im} z > 0$ *функцию* $w(z)$ *класса* $(\boldsymbol{R})$.

3) Мера $d\sigma(\lambda)$ *и числа* α, β *в интегральном представлении* (I_R) *определяются функцией* $w(z)$ *однозначно.*

Замечание. Как правило, целесообразно считать функцию $w(z)$ класса $(\boldsymbol{R})$ продолженной в нижнюю полуплоскость по принципу «принудительной симметрии», полагая по определению $w(z) = \overline{w(\bar{z})}$ $(\operatorname{Im} z < 0)$. Такая точка зрения является в настоящее время общепринятой и согласуется с интегральным представлением (I_R): интеграл в правой части равенства (I_R), представляющего в верхней полуплоскости функцию $w(z)$, существует для всех невещественных z, и для z из нижней полуплоскости правая часть (I_R) дает как раз «принудительное продолжение» функции $w(z)$.

Нам, как правило, придется иметь дело с более жесткими, чем $(\boldsymbol{r}_2)$, условиями на меру $d\sigma$: $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{d\sigma(\lambda)}{1+|\lambda|} < \infty$ $(\boldsymbol{r}_1)$ и $\int_{-\infty}^{\infty} d\sigma(\lambda) <$

* Условие $(\boldsymbol{r}_2)$ гарантирует существование интеграла в правой части (I_R) при всех $z \neq \bar{z}$.

$< \infty$ (r_0), а также с классом функций $w(z)$ представимых в виде

$$w(z) = \int\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{d\sigma(\lambda)}{\lambda - z}. \qquad (I_{R_1})$$

Условие (r_1) гарантирует существование интеграла в правой части (I_{R_1}). Представление (I_{R_1}) является частным случаем представления (I_R), соответствующим

$$\beta = 0, \ \alpha = \int\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{\lambda}{1+\lambda^2} d\sigma(\lambda).$$

Подклассы класса (R) — классы функций $w(z)$, представимых в виде (I_{R_1}), где мера $d\sigma(\lambda)$ удовлетворяет условию (r_1) или условию (r_0), могут быть внутренне охарактеризованы (см. по этому поводу [14, § 3, 4]).

Мы будем сталкиваться с аналогичными условиями (r_1) и (r_0), условиями на меру $d\sigma$ отдельно на положительной, отдельно на отрицательной полуосях

$$\int\limits_{-\infty}^{0} \frac{d\sigma(\lambda)}{1+|\lambda|} < \infty \ (r_1^-); \quad \int\limits_{0}^{+\infty} \frac{d\sigma(\lambda)}{1+|\lambda|} < \infty; \ (r_1^+) \quad \int\limits_{-\infty}^{0} d\sigma(\lambda) < \infty \ (r_0^-);$$

$$\int\limits_{0}^{+\infty} d\sigma(\lambda) < \infty. \qquad (r_0^+)$$

Функцию $w(z)$, построенную по мере $d\sigma(\lambda) \in (r_1)$ согласно (I_{R_1}), будем называть ассоциированной с этой мерой.

Ассоциированная функция весьма интимным образом связана с задачей об интегральном представлении.

3°. В задаче H проявлением такой связи является следующая

Теорема *(Гамбургер, Неванлинна, [1, гл. III, § 2]). 1) Пусть мера* $d\sigma(\lambda) \geqslant 0$, *удовлетворяющая условию* (h_n), *дает интегральное представление* (I_H) *последовательности* s_k *для* $0 \leqslant k \leqslant 2n$. *Тогда для ассоциированной функции* $w(z)$ *имеет место равномерная в любом угле* $\delta < \arg z < \pi - \delta$ ($\delta > 0$ — *фиксировано) асимптотика* $z^{2n+1}w(z) + \sum\limits_{k=0}^{2n} z^{2n-k}s_k \to 0$ $(|z| \to \infty)$.

2) Обратно, если для некоторой функции $w(z)$ *класса* (R) *и вещественной последовательности* $s_0, s_1, \ldots, s_{2n}$ *эта асимптотика выполняется хотя бы при* $z = iy$, $y \to +\infty$, *то функция* $w(z)$ *допускает представление* (I_{R_1}), *где мера* $d\sigma(\lambda)$ *удовлетворяет условию* (h_n), *и последовательность* s_k $(0 \leqslant k \leqslant 2n)$ *допускает интегральное представление* (I_H).

В настоящей работе получены теоремы, которые можно рассматривать как континуальные аналоги теоремы Гамбургера —

Неванлинны, они связаны с интегральными представлениями различных классов функции, порождающей эрмитово-положительные ядра. Мы рассмотрим классы функций, для которых в [1] приняты обозначения $\boldsymbol{P}_l$, $\boldsymbol{G}_l$, $\boldsymbol{W}_l$, $\boldsymbol{K}_l$.

§ 2. 1°. Класс $\boldsymbol{P}_l$ эрмитово-положительных функций.

Определение. *Функция* $S(t)\,(-l<t<l)$ *принадлежит классу* $\boldsymbol{P}_l$, *если она непрерывна на интервале** $(-l,\ l)$ *и ядро*

$$K(t,\ \tau)=S(t-\tau)$$

является эрмитово-положительным.

Теорема (*М. Г. Крейн*, [*9*, *11*]). *Для того чтобы функция* $S(t)$ *принадлежала классу* $\boldsymbol{P}_l$, *необходимо и достаточно, чтобы она допускала интегральное представление* $S(t)=\int\limits_{-\infty}^{\infty} e^{-it\lambda}\,d\sigma(\lambda)$ (I_P) *для* $-l<t<l$, *где* $d\sigma(\lambda)\geqslant 0$ *мера, удовлетворяющая условию* (r_0).

Если $l<\infty$, то мера $d\sigma(\lambda)$, дающая представление (I_P) функции $S(t)$ на $(-l,\ l)$, вообще говоря, неединственная, и в случае неединственности представляющих мер бесконечно много. М. Г. Крейн дал описание множества этих мер. Если же $l=\infty$, то представляющая мера единственна; интегральное представление (I_P) функции класса $\boldsymbol{P}_\infty$ получил С. Бохнер на восемь лет ранее, чем М. Г. Крейн теорему о представлении функций класса $\boldsymbol{P}_l$. Для меры $d\sigma(\lambda)$, представляющей функцию $S(t)\in\boldsymbol{P}_l$ на $(-l,\ l)$, интеграл в правой части (I_P) существует при всех $t\in(-\infty,\ \infty)$ (ввиду выполнения для $d\sigma(\lambda)$ условия $(\boldsymbol{r}_0)$). Этот интеграл задает функцию класса $\boldsymbol{P}_\infty$, совпадающую на $(-l,\ l)$ с заданной функцией $S(t)$. Таким образом, из теоремы М. Г. Крейна об интегральном представлении следует, что всякая функция $S(t)$ класса $\boldsymbol{P}_l$ может быть продолжена с интервала $(-l,\ l)$ на всю вещественную ось до функции класса $\boldsymbol{P}_\infty$. Наоборот, из факта продолжимости функции класса $\boldsymbol{P}_l$ до функции класса $\boldsymbol{P}_\infty$ и теоремы С. Бохнера об интегральном представлении функции класса $\boldsymbol{P}_\infty$ (гораздо более простой, чем теорема М. Г. Крейна) вытекает возможность интегрального представления (I_P) функции класса $\boldsymbol{P}_l$. (В первоначальном доказательстве М. Г. Крейна [9] вначале устанавливалась возможность продолжения, а затем применялась теорема С. Бохнера).

Не следует, однако, отождествлять задачу об интегральном представлении с задачей о ее продолжении: не для всякого класса функций из наличия интегрального представления следует возможность продолжения функции и исходного интервала до функции из класса, соответствующего расширенному интервалу.

2°. Класс $\boldsymbol{G}_l$.

---

* Из непрерывности $\operatorname{Re} S(t)$ при $t=0$ и эрмитовой положительности ядра $K(t,\ \tau)$ следует равномерная непрерывность $S(t)$ на $(-l,\ l)$.

Определение. *Функция* $S(t)\,(-l<t<l)$ *принадлежит классу* $\boldsymbol{G}_l$, *если она непрерывна на* $(-l,\ l)$, $S(0)=0$, *и ядро* $K(t,\ \tau)=S(t)+\overline{S(\tau)}-S(t-\tau)$ *является эрмитово положительным.*

Теорема *(М. Г. Крейн. [10]). Для того чтобы функция* $S(t)$ *принадлежала классу* $\boldsymbol{G}_l$, *необходимо и достаточно, чтобы она допускала интегральное представление*

$$S(t)=-i\alpha t+\int_{-\infty}^{\infty}\left\{\frac{1-it\lambda-e^{-it\lambda}}{\lambda^2}+it\,\frac{\lambda}{\lambda^2+1}\right\}d\sigma(\lambda) \qquad (I_G)$$

для $-l<t<l$, *где* α — *вещественная константа, а* $d\sigma\geqslant 0$ — *мера, удовлетворяющая условию* $(\boldsymbol{r}_2)$.

С интегральным представлением (I_G) функции $S(t)\in\boldsymbol{G}_l$ будем ассоциировать функцию

$$w(z)=\alpha+\int_{-\infty}^{\infty}\left\{\frac{1}{\lambda-z}-\frac{\lambda}{\lambda^2+1}\right\}d\sigma(\lambda),$$

принадлежащую классу $(\boldsymbol{R})$.

3°. Класс $\boldsymbol{W}_l$ экспоненциально выпуклых функций.

Определение. *Функция* $S(t)\,(0\leqslant t<2l)$ *принадлежит классу* $\boldsymbol{W}_l$, *если она непрерывна на* $[0,\ 2l]$, *и ядро* $K(t,\ \tau)=S(t+\tau)$ *является эрмитово-положительным.*

Функции класса $\boldsymbol{W}_l$, следуя С. Н. Бернштейну, назовем экспоненциально-выпуклыми (по поводу класса $\boldsymbol{W}_l$ см. [1, гл. V, § 5, пункт 4]).

Теорема *(С. Н. Бернштейн, Д. Уиддер). Для того чтобы функция* $S(t)\,(0\leqslant t<2l)$ *принадлежала классу* $\boldsymbol{W}_l$, *необходимо и достаточно, чтобы она допускала интегральное представление*

$S(t)=\int_{-\infty}^{\infty}e^{t\lambda}\,d\sigma(\lambda)$ (I_W) *для* $0\leqslant t<2l$, *где* $d\sigma(\lambda)\geqslant 0$ — *мера, удовлетворяющая условию* $(\boldsymbol{r}_0^-)$ *и условию*

$$\int_0^{\infty}e^{2l'\lambda}\,d\sigma(\lambda)<\infty\ \ (\forall l'<l). \qquad (w_l)$$

Мера $d\sigma(\lambda)$ *в представлении* (I_W) *определяется единственным образом.*

Замечание 1. Если выбрать меру $d\sigma(\lambda)$, удовлетворяющую условиям $(\boldsymbol{r}_0^-)$ и (w_l), но не удовлетворяющую условию $w_{l_1})$ ни при каком $l_1>l$, то определенная согласно (I_W) посредством этой меры функция $S(t)$ будет принадлежать классу $\boldsymbol{W}_l$, но ввиду единственности представляющей меры не может быть продолжена до функции класса $\boldsymbol{W}_{l_1}$ ни при каком $l_1>l$: иначе по теореме

Бернштейна — Уиддера, примененной к продолженной функции, для меры $d\sigma(\lambda)$ должно бы выполняться условие $(\boldsymbol{w}_{l_1})$.

Замечание 2. Возможна следующая модификация теоремы Бернштейна — Уиддера, дающая описание функций $S(t)$, непрерывных на $(0, 2l)$, суммируемых вблизи нуля и таких, что ядро $S(t+\tau)$ $(0 < t, \tau < l)$ эрмитово-положительно. Это в точности те функции, которые представимы в виде (I_W) для $0 < t < 2l$ с мерой $d\sigma(\lambda)$, удовлетворяющей $(\boldsymbol{r}_1^-)$ и $(\boldsymbol{w}_l)$

4°. Классы $\boldsymbol{K}_l$.

Определение*. *Функция $S(t)$ $(0 \leqslant t < 2l)$ принадлежит классу $\boldsymbol{K}_l^0$, если она непрерывна на $[0, 2l]$, и ядро $K(t, \tau) = 1/2 \times \times \{S(t+\tau) + S(|t-\tau|)\}$ является эрмитово-положительным.*

Теорема *(М. Г. Крейн [11]). Для того чтобы* функция $S(t)(0 \leqslant t < 2l)$ *принадлежала классу $\boldsymbol{K}_l^0$, необходимо и достаточно, чтобы она допускала представление $S(t) = \int\limits_{-\infty}^{\infty} \cos t\sqrt{\lambda} \cdot d\sigma(\lambda)$ для $0 \leqslant t < 2l$, где $d\sigma(\lambda) \geqslant 0$ — мера, удовлетворяющая условию (r_0^+) и условию $\int\limits_{-\infty}^{0} e^{2l'\sqrt{|\lambda|}} d\sigma(\lambda) < \infty$ $(\forall l' < l)$ $(\boldsymbol{k}_l)$.*

Определение. *Функция $S(t)$ $(0 \leqslant t < 2l)$ принадлежит классу $\boldsymbol{K}_l^\infty$, если она непрерывна на $[0, 2l]$, $S(0) = 0$, и ядро $K(t, \tau) = 1/2\{S(t+\tau) - S(|t-\tau|)\}$ является эрмитово-положительным.*

Теорема *(М. Г. Крейн [11]). Для того чтобы функция $S(t)$ $(0 \leqslant t < 2l)$ принадлежала классу $\boldsymbol{K}_l^\infty$, необходимо и достаточно, чтобы она допускала представление*

$$S(t) = \int\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{1-\cos t\sqrt{\lambda}}{\lambda}\, d\sigma(\lambda)$$

(I_{K^∞}) для $0 \leqslant t < 2l$, где $d\sigma(\lambda) \geqslant 0$ — мера, удовлетворяющая условию (r_1^+) и условию $(\boldsymbol{k}_l)$.

(Условие $(\boldsymbol{k}_l)$ на меру $d\sigma$ обеспечивает сходимость для $0 \leqslant t < 2l$ интегралов по $(-\infty, 0]$ в правых частях (I_{K^0}) и (I_{K^∞}). Об условии $(\boldsymbol{k}_l)$ в [11] не упоминается).

Замечание. Ю. М. Березанский [2, гл. 8, § 3] высказал ошибочное утверждение о том, что всякая функция $S(t)$ класса $\boldsymbol{K}_l^\infty$ может быть продолжена с промежутка $[0, 2l)$ на полуось $[0, \infty)$ до функции класса $\boldsymbol{K}_\infty^\infty$, и что это продолжение может быть осуществлено посредством интеграла из правой части (I_{K^∞}), пред-

* Символ $\boldsymbol{K}^h$ означает, что в разложении ядра $K(t, \tau)$ на элементарные произведения (в смысле [11]) участвуют решения уравнения $u''(x, \lambda) + \lambda u(x, \lambda) = 0$ $(0 \leqslant x < \infty)$ с граничным условием $u'(0, \lambda) = hu(0, \lambda)$. Здесь мы ограничиваемся рассмотрением классов $\boldsymbol{K}^0$ и $\boldsymbol{K}^\infty$. Можно рассматривать аналогичные классы ядер, порождаемые общими уравнениями Штурма — Лиувилля [12]. Эти вопросы тесно связаны с операторами обобщенного сдвига [13].

ставляющего $S(t)$ на $[0, 2l)$. Этот способ продолжения не всегда осуществим вследствие возможной расходимости интеграла (I_{K^∞}) при $t > 2l$. Можно привести и пример непродолжимой непрерывной на $[0, 2l]$ функции класса $\boldsymbol{K}_l^\infty$. Выберем меру $d\sigma(\lambda)$, сосредоточенную на $(-\infty, 0]$, такую, что $\int\limits_{-\infty}^{0} e^{2l\sqrt{|\lambda|}}\, d\sigma(\lambda) < \infty$, но условие $(\boldsymbol{k}_{l'})$ ни при каком $l' > l$ не выполняется, и зададим функцию $S(t)$ для $0 \leqslant t \leqslant 2l$ интегралом (I_{K^∞}) по этой мере. Функция $S(t)$ принадлежит классу $\boldsymbol{K}_l^\infty$ и даже дважды непрерывно дифференцируема на $[0, 2l]$ (вплоть до точки $t = 2l$). Можно доказать, что если функция $S(t)$ допускает интегральное представление (I_{K^∞}) на $[0, 2l)$ с некоторой мерой, сосредоточенной на $(-\infty, 0]$, то она не допускает представления (I_{K^∞}) ни с какой иной мерой. Поэтому построенная функция $S(t)$ не продолжаема до функции класса $\boldsymbol{K}_{l_1}^\infty$ ни при каком $l_1 > l$. В противном случае из единственности представляющей меры и теоремы М. Г. Крейна (примененной и продолженной функции) следовало бы, что для выбранной меры $d\sigma$ выполнялось бы условие $(\boldsymbol{k}_{l_1}$ с некоторым $l_1 > l$, что противоречило бы выбору меры.

§ 3. 1°. В. П. Потапов высказал плодотворную концепцию, согласно которой вся информация задачи об интегральном представлении функции (последовательности), порождающей эрмитово-положительное ядро (матрицу) содержится в некотором соотношении, строящемся по данным задачи, так называемом Основном Матричном Неравенстве задачи (ОМН). Эту информацию надлежит извлекать лишь из ОМН задачи. Хотя в настоящее время еще не ясно, что такое основное матричное неравенство *вообще* (это связано с отсутствием четкого представления о том, что такое «классическая задача анализа» *вообще*), однако, для каждой из рассмотренных до сих пор классических задач построено ее ОМН.

Мы рассмотрим здесь ОМН $(\boldsymbol{H})$ задачи Гамбургера о представлении позитивной последовательности, и ОМН $(\boldsymbol{P})$, ОМН $(\boldsymbol{G})$, ОМН $(\boldsymbol{W})$, ОМН $(\boldsymbol{K}^0)$, ОМН $(\boldsymbol{K}^\infty)$ задач об интегральном представлении функций соответствующих классов. При извлечении информации о задаче из ее ОМН и используется теорема Гамбургера — Неванлинны (в задаче $\boldsymbol{H}$) или ее континуальный аналог.

ОМН каждой из упомянутых нами и других задач заключается в эрмитовой неотрицательности матрицы

$$\begin{bmatrix} A & B \\ B^* & C \end{bmatrix} \geqslant 0, \tag{3.1.1}$$

где элемент C во всех задачах один и тот же:

$$C = \frac{w(z) - \overline{w(z)}}{z - \bar{z}}, \tag{3.1.2}$$

а элементы A, B в каждой конкретной задаче свои. Элемент A (называемый информационным блоком) строится только по данным задачи, характеризуя эрмитову положительность соответствующего ядра (матрицы), а в блоке B завязаны данные задачи и входящая в него линейно функция $w(z)$.

2°. Основное матричное неравенство задачи $\boldsymbol{H}_n$. В этом неравенстве фигурируют последовательность чисел s_k $(0 \leqslant k \leqslant 2n)$ и аналитическая в $\operatorname{Im} z > 0$ или в $\operatorname{Im} z \neq 0$ функция $w(z)$. Неравенство заключается в эрмитовой неотрицательности матрицы (3.1.1), где блоки A, B имеют вид

$$A = \begin{bmatrix} s_0 & s_1 & s_{n-1} & s_n \\ s_1 & s_2 & s_n & s_{n+1} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ s_{n-1} & s_n & s_{2n-2} & s_{2n-1} \\ s_n & s_{n+1} & s_{2n-1} & s_{2n} \end{bmatrix}; \tag{3.2.1}$$

$$B = \begin{bmatrix} w(z) \\ zw(z) + s_0 \\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot \\ z^n w(z) + z^{n-1} s_0 + \cdots + z s_{n-2} + s_{n-1} \end{bmatrix}. \tag{3.2.2}$$

3°. Основное матричное неравенство задачи $\boldsymbol{P}_l$. Здесь $S(t)$ — непрерывная на $(-l,\ l)$ функция, $w(z)$ — аналитическая в $\operatorname{Im} z > 0$ или в $\operatorname{Im} z \neq 0$ функция. Неравенство можно интерпретировать как неотрицательность операторной блок-матрицы, однако мы предполагаем несколько иную формулировку: при любой финитной в $[0,\ l)$ функции $\varphi(t)$ эрмитово-неотрицательна матрица (3.1.1), где

$$A = (K\varphi,\ \varphi) = \int_0^l \int_0^l S(t-\tau)\, \varphi(t)\, \overline{\varphi(\tau)}\, dt\, d\tau;$$

$$B = \int_0^l \{e^{-itz} w(z) - i \int_0^t e^{-i(t-\xi)z} S(\xi)\, d\xi\}\, \varphi(t)\, dt.$$

4°. Основное матричное неравенство задачи $\boldsymbol{G}_l$. Здесь $S(t)$ — непрерывная в $(-l,\ l)$ функция, $w(z)$ — аналитическая в $\operatorname{Im} z > 0$ или в $\operatorname{Im} z \neq 0$ функция. Неравенство заключается в том, что при любой финитной в $[0,\ l)$ функции $\varphi(t)$ эрмитово-неотрицательна матрица (3.1.1), где

$$A = (K\varphi,\ \varphi) = \int_0^l \int_0^l \{S(t) + \overline{S(\tau)} - S(t-\tau)\}\, \varphi(t)\, \overline{\varphi(\tau)}\, dt\, d\tau;$$

$$B = \int_0^l \left\{\frac{1 - e^{-itz}}{z}\, w(z) - \int_0^t ize^{-i(t-\xi)z} S(\xi)\, d\xi + S(t)\right\} \varphi(t)\, dt.$$

5°. Основное матричное неравенство задачи $\boldsymbol{W}_l$. Здесь $S(t)$ — непрерывная в $[0, 2l)$ функция, $w(z)$ — аналитическая в $\operatorname{Im} z > 0$ или в $\operatorname{Im} z \neq 0$ функция. Неравенство заключается в том, что при любой финитной в $[0, l)$ функции $\varphi(t)$ эрмитово-неотрицательна матрица (3.1.1), где

$$A = (K\varphi, \varphi) = \int_0^l \int_0^l S(t+\tau)\,\varphi(t)\,\overline{\varphi(\tau)}\,dt\,d\tau;$$

$$B = \int_0^l \left\{e^{tz} w(z) + \int_0^t e^{(t-\xi)z} S(\xi)\,d\xi\right\} \varphi(t)\,dt.$$

6°. Основное матричное неравенство задачи $\boldsymbol{K}_l^0$. Здесь $S(t)$ — функция, непрерывная на $[0, 2l)$, $w(z)$ — аналитическая в $\operatorname{Im} z > 0$ или в $\operatorname{Im} z \neq 0$ функция. Неравенство заключается в том, что при любой финитной в $[0, l)$ функции $\varphi(t)$ эрмитово-неотрицательна матрица (3.1.1), где

$$A = (K\varphi, \varphi) = \frac{1}{2} \int_0^l \int_0^l \{S(t+\tau) + S(|t-\tau|)\}\,\varphi(t)\,\overline{\varphi(\tau)}\,dt\,d\tau;$$

$$B = \int_0^l \left\{\cos t\sqrt{z}\, w(z) - \int_0^t \frac{\sin(t-\xi)\sqrt{z}}{\sqrt{z}}\, S(\xi)\,d\xi\right\} \varphi(t)\,dt.$$

7°. Основное матричное неравенство задачи $\boldsymbol{K}_l^\infty$. Здесь $S(t)$ — функция, непрерывная на $[0, 2l)$, $w(z)$ — функция, аналитическая в $\operatorname{Im} z > 0$ или в $\operatorname{Im} z \neq 0$. Неравенство заключается в том, что при любой финитной в $[0, l)$ функции $\varphi(t)$ эрмитово-неотрицательна матрица (3.1.1), где

$$A = (K\varphi, \varphi) = 1/2 \int_0^l \int_0^l \{S(t+\tau) - S(|t-\tau|)\}\,\varphi(t)\,\overline{\varphi(\tau)}\,dt\,d\tau;$$

$$B = \int_0^l \left\{\frac{\sin t\sqrt{z}}{\sqrt{z}}\, w(z) - \int_0^t \cos(t-\xi)\sqrt{z}\, S(\xi)\,d\xi\right\} \varphi(t)\,dt.$$

8°. *Замечание.* Мы не конкретизировали здесь класс функций, фигурирующих в ОМН задач $\boldsymbol{P}$, $\boldsymbol{G}$, $\boldsymbol{W}$, $\boldsymbol{K}$. Ввиду непрерывности ядер достаточно требовать выполнения неравенств для непрерывных финитных в $[0, l)$ функций $\varphi(t)$. Из этого будет следовать выполнение неравенств для всех суммируемых финитных функций и даже для некоторых обобщенных функций. Мы будем часто полагать в ОМН $\varphi(t) = \delta_{l_0}(t)$ — дельта-функции, сосредоточенной в точке l_0.

§ 4. В этом параграфе мы сформулируем ряд теорем об адекватности задачи об интегральном представлении Основному Матричному Неравенству.

Теорема $\boldsymbol{H}$. *1) Пусть последовательность* s_k *допускает интегральное представление* (I_H) *для* $0 \leqslant k \leqslant 2n$, *где* $d\sigma(\lambda) \geqslant 0$ *удовлетворяет* $(\boldsymbol{h}_n)$. *Тогда для последовательности* s_k $(0 \leqslant k \leqslant 2n)$ *и ассоциированной с* $d\sigma$ *функции* $w(z)$ *всюду в* $\operatorname{Im} z \neq 0$ *выполняется ОМН* $(\boldsymbol{H}_n)$.

2) Пусть вещественная последовательность s_k $(0 \leqslant k \leqslant 2n)$ *и аналитическая в* $\operatorname{Im} z \neq 0$ *функция* $w(z)$ *таковы, что при всех* z *из полуплоскости* $\operatorname{Im} z > 0$ *выполняется ОМН* $(\boldsymbol{H}_n)$. *Тогда функция* $w(z)$ *имеет вид* (I_{R_1}), *где мера* $d\sigma(\lambda) \geqslant 0$ *удовлетворяет* $(\boldsymbol{h}_n)$, *и эта мера дает представление* (I_H) *последовательности* s_k *для* $0 \leqslant k \leqslant 2n-1$*.

Теорема $\boldsymbol{P}$. *1) Пусть функция* $S(t)$ *допускает при* $t \in (-l, l)$ *интегральное представление* (I_P), *где мера* $d\sigma(\lambda) \geqslant 0$ *удовлетворяет* $(\boldsymbol{r}_0)$. *Тогда для функции* $S(t)$ *и ассоциированной с* $d\sigma$ *функции* $w(z)$ *всюду в* $\operatorname{Im} z \neq 0$ *выполняется ОМН* $(\boldsymbol{P}_l)$.

2) Пусть непрерывная на $(-l, l)$ *функция* $S(t)$ *и аналитическая в полуплоскости* $\operatorname{Im} z \neq 0$ *функция* $w(z)$ *таковы, что всюду в этой полуплоскости для них выполняется ОМН* $(\boldsymbol{P}_l)$. *Тогда функция* $w(z)$ *имеет вид* (I_{R_1}), *где мера* $d\sigma \geqslant 0$ *удовлетворяет* (r_0), *и эта мера дает представление* (I_P) *функции* $S(t)$ *при* $t \in (-l, l)$.

Теорема $\boldsymbol{G}$. *1) Пусть функция* $S(t)$ *допускает при* $t \in (-l, l)$ *интегральное представление* (I_G), *где* α *— вещественная константа,* $d\sigma(\lambda) \geqslant 0$ *— мера, удовлетворяющая* (r_2). *Тогда для функции* $S(t)$ *и ассоциированной с* α *и* $d\sigma$ *функции* $w(z)$ *всюду в* $\operatorname{Im} z \neq 0$ *выполняется ОМН* $(\boldsymbol{G}_l)$.

2) Пусть непрерывная на $(-l, l)$ *функция* $S(t)$, *и аналитическая в полуплоскости* $\operatorname{Im} z \neq 0$ *функция* $w(z)$ *таковы, что всюду в этой полуплоскости для них выполняется ОМН* $(\boldsymbol{G}_l)$. *Тогда функция* $w(z)$ *имеет вид* (I_R), *где мера* $d\sigma \geqslant 0$ *удовлетворяет* $(\boldsymbol{r}_2)$, α *— вещественная константа,* $\beta = 0$, *и функция* $S(t)$ *при* $t \in (-l, l)$ *допускает интегральное представление* (I_G) *с этими* α *и* $d\sigma(\lambda)$.

Теорема $\boldsymbol{W}$. *1) Пусть функция* $S(t)$ *допускает при* $t \in [0, 2l$ *интегральное представление* (I_W), *где мера* $d\sigma(\lambda) \geqslant 0$ *удовлетворяет* $(\boldsymbol{r}_0^-)$ *и* $(\boldsymbol{w}_l)$. *Тогда для функции* $S(t)$ *и ассоциированной с* $d\sigma(\lambda)$ *функции* $w(z)$ *всюду в* $\operatorname{Im} z \neq 0$ *выполняется ОМН* $(\boldsymbol{W}_l)$.

2) Пусть непрерывная на $[0, 2l)$ *функция* $S(t)$ *и аналитическая в полуплоскости* $\operatorname{Im} z > 0$ *функция* $w(z)$ *таковы, что всюду в этой полуплоскости для них выполняется ОМН* $(\boldsymbol{W}_l)$. *Тогда функция* $w(z)$ *имеет вид* (I_{R_1}), *где мера* $d\sigma(\lambda) \geqslant 0$ *удовлетворяет* $(\boldsymbol{r}_0^-)$ *и* $(\boldsymbol{w}_l)$, *и эта мера дает интегральное представление* (I_W) *функции* $S(t)$ *при* $t \in [0, 2l)$.

Теорема $\boldsymbol{K}^0$. *1) Пусть функция* $S(t)$ *допускает при* $t \in [0, 2l$ *интегральное представление* (I_{K^0}), *где мера* $d\sigma(\lambda) \geqslant 0$ *удовлетворяет-*

---

* Но не для $k = 2n$ (см. замечание к доказательству части 2 теоремы $\boldsymbol{H}$).

ряет $(\boldsymbol{r}_0^+)$ *и* $(\boldsymbol{k}_l)$. *Тогда для функции* $S(t)$ *и ассоциированной с* $d\sigma(\lambda)$ *функции* $w(z)$ *всюду в* $\operatorname{Im} z \neq 0$ *выполняется ОМН* $(\boldsymbol{K}_l^0)$.

2) Пусть непрерывная на $[0,\ 2l)$ *функция* $S(t)$ *и аналитическая в полуплоскости* $\operatorname{Im} z > 0$ *функция* $w(z)$ *таковы, что всюду в этой полуплоскости для них выполняется ОМН* $(\boldsymbol{K}_l^0)$. *Тогда функция* $w(z)$ *имеет вид* (I_{R_1}), *где мера* $d\sigma(\lambda) \geqslant 0$ *удовлетворяет* $(\boldsymbol{r}_0^-)$ *и* $(\boldsymbol{k}_l)$, *и эта мера дает интегральное представление* (I_{K^0}) *функции* $S(t)$ *при* $t \in [0,\ 2l)$.

Теорема $\boldsymbol{K}^\infty$. *1) Пусть функция* $S(t)$ *допускает при* $t \in [0,\ 2l)$ *интегральное представление* (I_{K^∞}), *где мера* $d\sigma(\lambda) \geqslant 0$ *удовлетворяет* $(\boldsymbol{r}_1^+)$ *и* $(\boldsymbol{k}_l)$. *Тогда для функции* $S(t)$ *и ассоциированной с* $d\sigma(\lambda)$ *функции* $w(z)$ *всюду в* $\operatorname{Im} z \neq 0$ *выполняется ОМН* $(\boldsymbol{k}_l^\infty)$.

2) Пусть непрерывная на $[0,\ 2l)$ *функция* $S(t)$ *и аналитическая в полуплоскости* $\operatorname{Im} z > 0$ *функция* $w(z)$ *таковы, что всюду в этой полуплоскости для них выполняется ОМН* $(\boldsymbol{k}_l^\infty)$. *Тогда функция* $w(z)$ *имеет вид* (I_{R_1}), *где мера* $d\sigma\,\lambda \geqslant 0$ *удовлетворяет условиям* $(\boldsymbol{r}_1^+)$ *и* $(\boldsymbol{k}_l)$, *и эта мера дает интегральное представление* (I_{K^∞}) *функции* $S(t)$ *при* $t \in [0,\ 2l)$.

Подчеркнем, что сформулированные теоремы утверждают равносильность возможности интегрального представления функции (последовательности) и разрешимости соответствующего ОМН относительно аналитической в $\operatorname{Im} z > 0$ функции $w(z)$: эти теоремы сводят вопрос об описании множества всех представляющих мер к вопросу об описании совокупности всех аналитических в $\operatorname{Im} z > 0$ функций $w(z)$, удовлетворяющих ОМН.

§ 5. 1°. Каждая из теорем $\boldsymbol{H}$, $\boldsymbol{P}$, $\boldsymbol{G}$, $\boldsymbol{W}$, $\boldsymbol{K}^0$, $\boldsymbol{K}^\infty$ состоит из двух частей. В первой из этих частей утверждается, что выполнение ОМН является необходимым условием представимости последовательности или функции интегралом по положительной мере от «элементарных ядер» — простейших последовательностей или функций — соответствующего класса. Эти элементарные ядра таковы:

$e(k,\ \lambda) = \lambda^k$ $(k = 0,\ 1,\ 2,\ 3,\ \ldots;\ -\infty < \lambda < \infty)$ для класса $\boldsymbol{H}$;
$e(t,\ \lambda) = e^{-it\lambda}$ $(-\infty < t < \infty;\ -\infty < \lambda < \infty)$ для класса $\boldsymbol{P}$;
$$e(t,\ \lambda) = \frac{1 - it\lambda - e^{-it\lambda}}{\lambda^2} + it\,\frac{\lambda}{\lambda^2 + 1} \quad (-\infty < t < \infty;\ -\infty < \lambda < \infty)$$
для класса $\boldsymbol{G}$; $e(t,\ \lambda) = e^{t\lambda}$ $(0 \leqslant t < \infty, -\infty < \lambda < \infty)$ для класса $\boldsymbol{W}$;
$e(t,\ \lambda) = \cos t\sqrt{\lambda}$ $(0 \leqslant t < \infty,\ -\infty < \lambda < \infty)$ для класса $\boldsymbol{K}^0$;
$$e(t,\ \lambda) = \frac{1 - \cos t\sqrt{\lambda}}{\lambda} \quad (0 \leqslant t < \infty,\ -\infty < \lambda < \infty)$$ для класса $\boldsymbol{K}^\infty$.

Первая часть каждой из теорем устанавливается несложно, если заранее известно интегральное предста ление последовательности или функции соответствующего класса. При этом ОМН устанавливается на «атомарном уровне» — для элементарного ядра $e(t,\ \lambda)$ при произвольном фиксированном λ, а затем производится интегрирование по представляющей мере $d\sigma(\lambda)$. На этом пути приходится пользоваться лишь несложно проверяемыми (и легко угадываемыми) тождествами, связанными с элементарными ядрами (этим тождествам посвящен § 6).

Гораздо сложнее обстоит дело со вторыми частями теорем, особенно, теорем $\boldsymbol{H}$, $\boldsymbol{W}$, $\boldsymbol{K}^0$, $\boldsymbol{K}^\infty$. Общая схема доказательства вторых частей теорем такова. Если аналитическая функция $w(z)$ удовлетворяет ОМН в полуплоскости $\operatorname{Im} z > 0$, то неотрицателен блок C (см. (2.1.2)) матрицы (2.1.1). Таким образом, функция $w(z)$ принадлежит классу ($\boldsymbol{R}$), а, значит, элемент C ограничен при $z \to \infty$ равномерно внутри любого фиксированного угла $\sigma < \arg z < \pi - \sigma$. В неотрицательной матрице (2.1.1) элемент B оценивается сверху: $|B|^2 \leqslant AC$. (В континуальных задачах в качестве функции $\varphi(t)$ обычно подставляют дельта-функцию: $\varphi(t) = \sigma_{t_0}(t)$). Следовательно, элемент B матрицы есть $O(1)$ при $|z| \to \infty$, $\sigma < \arg z < \pi - \sigma$. Напомним, что в элементе B завязаны данные задачи и входящая в него линейно функция $w(z)$. Именно в этом месте в задаче $\boldsymbol{H}$ используется теорема Гамбургера — Неванлинны, а в каждой из задач $\boldsymbol{P}$, $\boldsymbol{G}$, $\boldsymbol{W}$, $\boldsymbol{K}^0$, $\boldsymbol{K}^\infty$ — теорема, которую можно рассматривать как соответствующий континуальный аналог. Эта теорема позволяет из ограниченности элемента B при $z \to \infty$ сделать надлежащие выводы о поведении меры $d\sigma(\lambda)$, участвующей в представлении (I_R) функции $w(z)$, удовлетворяющей ОМН и о том, что эта мера дает соответствующее интегральное представление функции $S(t)$ (последовательности s_k). При этом в тех из рассмотренных задач, где в эрмитово-положительное ядро (матрицу) $K(t, \tau)$ входят значения функций (последовательности) от суммы аргументов t, τ — именно, в задачах H, W, K^0, K^∞ — Основное Матричное Неравенство нужно предварительно подвергнуть еще специальному преобразованию с тем, чтобы элемент $B_{\text{преобр}}$ Преобразованного Основного Матричного Неравенства (ПОМН) содержал интеграл по промежутку $[0, 2l)$, а не по промежутку $[0, l)$ как элемент B в ОМН.

Мера $d\sigma(\lambda)$, участвующая в представлении (I_R) функции $w(z)$ класса ($\boldsymbol{R}$) всегда удовлетворяет условию ($\boldsymbol{r}_2$). Нетрудно убедиться, что во всех рассмотренных задачах, кроме задачи $\boldsymbol{G}$, мера $d\sigma(\lambda)$ удовлетворяет более жесткому условию ($\boldsymbol{r}_1$) или даже ($\boldsymbol{r}_0$), а функция $w(z)$ допускает более специальное, чем (I_R), интегральное представление (I_{R_1}). Однако, в тех из задач, где в эрмитово-положительное ядро $\boldsymbol{K}(t, \tau)$ входят значения функции (последовательности) от суммы аргументов $t + \tau$, представляющая $w(z)$ мера $d\sigma(\lambda)$ должна удовлетворять не только «обычным» условиям типа ($\boldsymbol{r}_1$) или ($\boldsymbol{r}_0$), но и несравненно более жестким — «особым» — условиям убывания на бесконечности, а именно, условию $\int\limits_{-\infty}^{\infty} (1 + \lambda^{2n})\, d\sigma(\lambda) < \infty$ ($\boldsymbol{h}_n$) в задаче $\boldsymbol{H}_n$; условию $\int\limits_0^{\infty} e^{2l'\lambda} d\sigma(\lambda) < \infty$ $(\forall l' < l)$ ($\boldsymbol{w}_l$) в задаче

$\boldsymbol{W}_l$; условию $\int\limits_{-\infty}^{0} e^{2l'\sqrt{|\lambda|}} d\sigma(\lambda) < \infty \;\; (\forall l' < l)$ $(\boldsymbol{k}_l)$ в задачах $\boldsymbol{K}_l^0$, $\boldsymbol{K}_l^\infty$.

Убывание меры $d\sigma(\lambda)$ связано с тем, что элементарные ядра задач H, W, K быстро растут при $\lambda \to \pm\infty$, $\lambda \to +\infty$, $\lambda \to -\infty$ соответственно.

Основная трудность в доказательстве вторых частей теорем H, W, K^0, K^∞, и заключается именно в извлечении из ОМН информации о быстром убывании меры на бесконечности. В задаче H с этой трудностью помогает справиться сформулированная в § 1, пункт 3 теорема Гамбургера — Неванлинны, а в задачах W, K^0, K^∞ — ее континуальные аналоги. Можно сформулировать континуальные аналоги теорем Гамбургера — Неванлинны и в задачах P и G. Это несложные теоремы, мы приводим их доказательства, чтобы подчеркнуть общность некоторых элементов рассуждений во всех рассматриваемых задачах.

2^0. При доказательстве быстрого убывания меры в каждой из задач W, K^0, K^∞ имеется, конечно, некоторая специфика, однако, идея всех доказательств одна и та же. Мы продемонстрируем ее в ситуации, не отягощенной техническими деталями. Идейная общность предложений, накладывающих в упомянутых задачах конкретные ограничения на убывание $d\sigma(\lambda)$, формируется следующей, типичной для этого круга вопросов теоремой.

Теорема. *Пусть вещественная суммируемая на* $[0, L]$, $L > 0$, *функция* $S(t)$ *и сосредоточенная на* $[1, \infty)$ *мера* $d\sigma(\lambda) \geqslant 0$ *класса* (r_1^+) *таковы, что для функции* $w(z)$:

$$w(z) = \int\limits_1^\infty \frac{d\sigma(\lambda)}{\lambda - z} \tag{5.2.1}$$

хотя бы на одном луче $\arg z = \theta \left(0 < \theta < \frac{\pi}{2}\right)$ *выполняется асимптотика*

$$e^{Lz} w(z) + \int\limits_0^L e^{(L-\xi)z} S(\xi)\, d(\xi) = O(1) \;\; (\arg z = \theta,\ |z| \to \infty). \tag{5.2.2}$$

Тогда мера $d\sigma(\lambda)$ *экспоненциально убывает на бесконечности:*

$$\int\limits_1^\infty e^{l'\lambda}\, d\sigma(\lambda) < \infty \;(\forall l' < L). \tag{5.2.3}$$

Важную роль в доказательстве этой и более общих теорем играет следующая

Лемма *(Основная лемма об убывании меры). Пусть* $d\rho(\lambda) \geqslant 0$ — *мера, сосредоточенная на* $[0, \infty)$, *такая, что*

$$\int\limits_0^\infty e^{-(L+\varepsilon)\lambda} d\rho(\lambda) < \infty \;\; (\forall \varepsilon > 0) \tag{5.2.4}$$

(здесь $L > 0$ — некоторое число), и пусть функция $F(\zeta)$ определена в полуплоскости $\mathrm{Re}\,\zeta < -L$ интегралом

$$F(\zeta) = \int_0^\infty e^{\zeta\lambda}\, d\rho(\lambda) \quad (\mathrm{Re}\,\zeta < -L) \tag{5.2.5}$$

Пусть известно, что функция $F(\zeta)$ (заведомо аналитическая в полуплоскости $\mathrm{Re}\,\zeta < -L$) аналитически продолжается в некоторую область, содержащую эту полуплоскость и отрицательную полуось $(-\infty, 0)$. Тогда условие (5.2.4) усиливается следующим образом:

$$\int_0^\infty e^{-\varepsilon\lambda}\, d\rho(\lambda) < \infty \quad (\forall \varepsilon > 0). \tag{5.2.6}$$

Доказательство. Пусть $\zeta_0 = -L$ — некоторая точка луча $(-\infty, -L)$. Вследствие (5.2.4) производные $F^{(k)}(\zeta_0)$ можно получить, дифференцируя (5.2.5) под знаком интеграла:

$$F^{(k)}(\zeta_0) = \int_0^\infty \lambda^k e^{\zeta_0\lambda} d\rho(\lambda). \tag{5.2.7}$$

Отсюда видно, что $F^{(k)}(\zeta_0) \geqslant 0$ $(k = 0, 1, 2, \ldots)$. Круг $|\zeta - \zeta_0| < |\zeta_0| - L$ содержится в полуплоскости аналитичности $\mathrm{Re}\,\zeta < -L$, и поэтому функция $F(\zeta)$ есть в этом круге сумма своего ряда Тейлора $F(\zeta) = \sum\limits_{0 \leqslant k < \infty} \frac{1}{k!} F^{(k)}(\zeta_0) \cdot (\zeta - \zeta_0)^k$.

Коэффициенты этого ряда Тейлора неотрицательны, и по условию леммы функция $F(\zeta)$ аналитически продолжается вправо от точки ζ_0 по крайней мере до точки $\zeta = 0$.

По теореме Прингсгейма о степенных рядах с неотрицательными коэффициентами [15, гл. 3, § 6, с. 326] радиус сходимости рассматриваемого ряда Тейлора не меньше, чем $|\zeta_0|$. Поэтому ряд сходится при подстановке в него $\zeta = -\varepsilon$ $(0 < \varepsilon < |\zeta_0|)$, $\sum\limits_{0 \leqslant k < \infty} \frac{1}{k!} F^{(k)}(\zeta_0)(-\varepsilon - \zeta_0)^k < \infty$. Подставляя сюда выражение (5.2.7.) для $F^{(k)}(\zeta_0)$ и меняя порядок суммирования и интегрирования (это можно — все неотрицательно), получим

$$\int_0^\infty \left\{ \sum_{0 \leqslant k < \infty} \frac{1}{k!} (-\varepsilon - \zeta_0)^k \lambda^k \right\} \cdot e^{\zeta_0\lambda} d\rho(\lambda) < \infty \quad (\forall \varepsilon > 0).$$

Суммируя ряд в подынтегральном выражении, мы получим (5.2.6). Лемма доказана.

Доказательство теоремы. Положим

$$F(\zeta) = \int_1^\infty e^{\zeta\lambda} e^{L\lambda} d\sigma(\lambda). \tag{5.2.8}$$

Интеграл в правой части сходится в полуплоскости $\operatorname{Re}\zeta < -L$ (напомним, что $d\sigma$ удовлетворяет (r_1^+)) и определяет в этой полуплоскости аналитическую функцию $F(\zeta)$. Пусть Γ — контур, образованный лучами $\arg z = -\theta$ и $\arg z = \theta$ и ориентированный «снизу вверх». Ввиду вещественности функции S асимптотика (5.2.2) будет выполняться и на луче $\arg z = -\theta$, т. е. функция $w_L(z) = e^{Lz}w(z) + \int\limits_0^L e^{(L-\xi)z}S(\xi)\,d\xi$, аналитическая на контуре Γ ($w(z)$, аналитична вне $[1, \infty)$ ввиду условия на носитель $d\sigma(\lambda)$) удовлетворяет условию

$$w_L(z) = O(1) \quad (z \in \Gamma,\ |z| \to \infty). \tag{5.2.9}$$

Рассмотрим

$$G(\zeta) = \frac{1}{2\pi i}\int\limits_\Gamma w_L(z) \cdot e^{\zeta z}dz. \tag{5.2.10}$$

Вследствие условия (5.2.9) интеграл справа сходится равномерно на каждом компакте, лежащем внутри угла $|\arg\zeta - \pi| < \frac{\pi}{2} - \theta$, и, таким образом, функция $G(\zeta)$ аналитична внутри этого угла. Покажем, что функция $G(\zeta)$ совпадает с функцией $F(\zeta)$ внутри «сдвинутого» угла $|\arg(\zeta + L) - \pi| < \frac{\pi}{2} - \theta$. В самом деле, для точек ζ, принадлежащих сдвинутому углу, интеграл в правой части (5.2.10) можно разбить в сумму двух интегралов $G(\zeta) =$

$$= \frac{1}{2\pi i}\int\limits_\Gamma w(z) \cdot e^{Lz}e^{\zeta z}dz + \frac{1}{2\pi i}\int\limits_\Gamma \left\{\int\limits_0^L e^{(L-\xi)z}S(\xi)\,d\xi\right\} e^{\zeta z}dz.$$

При ζ, лежащих внутри «сдвинутого» угла, целая функция переменного z $\int\limits_0^L e^{(L-\xi)z}S(\xi)\,d\xi \cdot e^{\zeta z}$ быстро стремится к нулю, когда $|z| \to \infty$, $-\theta \leqslant \arg z \leqslant \theta$. Поэтому

$$\frac{1}{2\pi i}\int\limits_\Gamma \left\{\int\limits_0^L e^{(L-\xi)z}S(\xi)\,d\xi\right\} \cdot e^{\zeta z}dz = 0$$

и

$$G(\zeta) = \frac{1}{2\pi i}\int\limits_\Gamma w(z) \cdot e^{Lz}e^{\zeta z}\,dz \quad \left(|\arg(\zeta + L) - \pi| < \frac{\pi}{2} - \theta\right).$$

Подставим сюда выражение (5.2.1) для $w(z)$ и поменяем порядок интегрирования $G(\zeta) = \int\limits_1^\infty d\sigma(\lambda) \cdot \left(\frac{1}{2\pi i}\int\limits_\Gamma \frac{e^{Lz} \cdot e^{\zeta z}}{\lambda - z}\,dz\right)$. (Перемена порядка интегрирования возможна по теореме Фубина). Внутренний интеграл вычисляется, и его значение равно $e^{L\lambda} \cdot e^{\zeta\lambda}$, поэтому

$G(\zeta)=\int\limits_1^\infty e^{\zeta\lambda}\cdot e^{L\lambda}d\sigma(\lambda)$. Сравнивая это с (5.2.8), получим, что $G(\zeta)=F(\zeta)$ $\left(|\arg(\zeta+L)-\pi|<\frac{\pi}{2}-\theta\right)$. Таким образом, интеграл (5.2.10) дает аналитическое продолжение функции $F(\zeta)$ в область D, являющуюся объединением полуплоскости $\mathrm{Re}\zeta<-L$ и угла $|\arg\zeta-\pi|<\frac{\pi}{2}-\theta$. Применив теперь основную лемму об убывании меры к мере $d\rho(\lambda)=e^{L\lambda}d\sigma(\lambda)$, получим утверждение теоремы. Теорема доказана.

§ 6. В этом параграфе приведем тождества, связанные с элементарными ядрами, и докажем первые части теорем $\boldsymbol{H}$, $\boldsymbol{P}$, $\boldsymbol{G}$, $\boldsymbol{W}$, $\boldsymbol{K}^0$, $\boldsymbol{K}^\infty$.

1°. С элементарными ядрами $e(t,\lambda)$ каждой из рассматриваемых задач связаны два тождества. Первое из этих тождеств дает представление ядра $k(t,\tau,\lambda)$ — соответствующей линейной комбинации элементарных ядер от надлежащих аргументов — через произведения: $k(t,\tau,\lambda)=u(t,\lambda)\cdot\overline{u(\tau,\lambda)}$ (A), второе из тождеств имеет вид $u(t,\lambda)\cdot\frac{1}{\lambda-z}=u(t,z)\frac{1}{\lambda-z}+\int\limits_0^t G(t-\xi,z)\,e(\xi,\lambda)\,d\xi$ (B), здесь $k(t,\tau;\lambda)$, $u(t,\lambda)$, $G(t,z)$ — функции, имеющие в рассмотренных задачах вид:

1). Задача $\boldsymbol{P}$: $k(t,\tau;\lambda)=e(t-\tau,\lambda)$; $e(t,\lambda)=e^{-it\lambda}$; $u(t,\lambda)=e^{-it\lambda}$; $G(t,z)=-ie^{-itz}$.

2) Задача $\boldsymbol{G}$:

$$k(t,\tau,\lambda)=e(t,\lambda)+\overline{e(\tau,\lambda)}-e(t-\tau,\lambda);\ e(t,\lambda)=$$
$$=\frac{1-it\lambda-e^{-it\lambda}}{\lambda^2}+it\frac{\lambda}{\lambda^2+1};\ u(t,\lambda)=\frac{1-e^{-it\lambda}}{\lambda};$$
$$G(t,z)=-iz\cdot e^{-itz}.$$

В задаче $\boldsymbol{G}$ тождество (B) имеет вид, несколько отличный от вида этого тождества в иных задачах. Именно, в задаче $\boldsymbol{G}$ роль тождества (B) играет группа из двух тождеств

$$u(t,\lambda)\cdot\frac{1}{\lambda-z}=u(t,z)\left(\frac{1}{\lambda-z}-\frac{\lambda}{\lambda^2+1}\right)+$$
$$+\int\limits_0^t G(t-\xi,z)\,e(\xi,\lambda)\,d\xi+e(t,\lambda); \qquad (B_G^1)$$

$$u(t,z)\cdot\alpha+\int\limits_0^t G(t-\xi,z)\cdot(-i\alpha\xi)\,d\xi-i\alpha t=0. \qquad (B_G^2)$$

Это отличие задачи $\boldsymbol{G}$ от других рассмотренных континуальных задач связано с тем, что задача $\boldsymbol{G}$ — единственная, в которой ассоциированная функция $w(z)$ представляется не в виде (I_{R_1}), а в виде (I_R).

3) Задача $\boldsymbol{W}$: $k(t,\tau,\lambda)=e(t+\tau,\lambda)$; $e(t,\lambda)=e^{t\lambda}$; $u(t,\lambda)=e^{t\lambda}$; $G(t,z)=e^{tz}$.

4) Задача K^0: $k(t, \tau, \lambda) = \frac{1}{2}\{e(t+\tau, \lambda) + e(|t-\tau|, \lambda)\}$; $e(t, \lambda) = \cos t\sqrt{\lambda}$; $u(t, \lambda) = \cos t\sqrt{\lambda}$; $G(t, z) = -\frac{\sin t\sqrt{z}}{\sqrt{z}}$.

5) Задача K^∞: $k(t, \tau, \lambda) = \frac{1}{2}\{e(t+\tau, \lambda) - e(|t-\tau|, \lambda)\}$; $e(t, \lambda) = \frac{1-\cos t\sqrt{\lambda}}{\lambda}$; $u(t, \lambda) = \frac{\sin t\sqrt{\lambda}}{\sqrt{\lambda}}$; $G(t, z) = -\cos t\sqrt{z}$.

Отметим еще, что в задаче $\boldsymbol{H}$ тождества приобретают вид $k(t, \tau, \lambda) = e(t+\tau, \lambda)$; $e(t, \lambda) = \lambda^t$; $u(t, \lambda) = \lambda^t$ $(t, \tau = 0, 1, 2, \ldots; -\infty < \lambda < \infty)$;

$$k(t, \tau, \lambda) = u(t, \lambda)\cdot\overline{u(\tau, \lambda)}; \tag{A}$$

$$u(t, \lambda)\cdot\frac{1}{\lambda - z} = u(t, z)\cdot\frac{1}{\lambda - z} + \sum_{0\leqslant\xi<t} z^{t-\xi-1}e(\xi, \lambda). \tag{B}$$

Тождества (A), (B) в каждой из задач проверяются непосредственно. Осмысливание этих тождеств с единой точки зрения — тема специального исследования.

Отметим, что тождество (A) связано с элементом A основного матричного неравенства:

$$K(t, \tau) = \int_{-\infty}^{\infty} k(t, \tau, \lambda)\,d\sigma(\lambda) = \int_{-\infty}^{\infty} u(t, \lambda)\overline{u(\tau, \lambda)}\,d\sigma(\lambda);$$

$$\int_0^l\int_0^l K(t, \tau)\,\varphi(t)\overline{\varphi(\tau)}\,dt\,d\tau = \int_{-\infty}^{\infty}\left|\int_0^l u(t, \lambda)\,\varphi(t)\,dt\right|^2 d\sigma(\lambda).$$

2°. Покажем, как доказываются первые части теорем $\boldsymbol{H}$, $\boldsymbol{P}$, $\boldsymbol{G}$, $\boldsymbol{W}$, $\boldsymbol{K}^0$, $\boldsymbol{K}^\infty$ параграфа 4. Все теоремы доказываются единообразно с помощью тождеств (A) и (B).

Пусть $\varphi(t)$ — произвольная финитная на $[0, l)$ функция. Неравенство

$$\left|\int_0^l u(t, \lambda)\,\varphi(t)\,dt + \frac{1}{\lambda - z}\right|^2 \geqslant 0\ (-\infty < \lambda < \infty),$$

справедливое при всех невещественных z, ввиду произвольности функции $\varphi(t)$ влечет эрмитову неотрицательность матрицы

$$\left[\begin{array}{c|c} \int_0^l\int_0^l u(t, \lambda)\cdot\overline{u(\tau, \lambda)}\,\varphi(t)\overline{\varphi(\tau)}\,dt\,d\tau & \int_0^l u(t, \lambda)\,\varphi(t)\,dt\cdot\frac{1}{\lambda - z} \\ \hline * & \frac{1}{|\lambda - z|^2} \end{array}\right] \geqslant 0.$$

Преобразуем это неравенство, используя для преобразования элемента a_{11} тождество (A), элемента a_{12} — тождество (B), элемента C — тождество $\frac{1}{|\lambda - z|^2} = \frac{1}{z - \bar{z}}\left(\frac{1}{\lambda - z} - \frac{1}{\lambda - \bar{z}}\right)$.

Элемент $a_{11}(\lambda)$ преобразуется к виду $\int\limits_0^l\int\limits_0^l k(t, \tau; \lambda)\varphi(t)\overline{\varphi(\tau)}\,dt\,d\tau$, элемент $a_{12}(\lambda)$ преобразуется к виду $\int\limits_0^l \left\{u(t, z)\cdot\frac{1}{\lambda-z}+\int\limits_0^t G(t-\xi, z)\,e(\xi, \lambda)\,d\xi\right\}\varphi(t)\,dt$. Интегрируя теперь это матричное неравенство по представляющей мере $d\sigma(\lambda)$, учитывая, что $\int\limits_{-\infty}^{\infty} k(t, \tau; \lambda)\,d\sigma(\lambda)=K(t, \tau)$; $\int\limits_{-\infty}^{\infty} e(\xi, \lambda)\,d\sigma(\lambda)=S(\xi)$; $\int\limits_{-\infty}^{\infty}\frac{1}{\lambda-z}\,d\sigma(\lambda)=w(z)$ и получим ОМН. При получении ОМН задачи G имеется ньюанс, связанный с тем, что при преобразовании элемента a_{12} нужно использовать тождества (B_G^1) и (B_G^2), а также пользоваться формулами $S(\xi)=-i\alpha\xi+\int\limits_{-\infty}^{\infty} e(\xi, \lambda)\,d\sigma(\lambda)$, $w(z)=\alpha+\int\limits_{-\infty}^{\infty}\left(\frac{1}{\lambda-z}-\frac{\lambda}{\lambda^2+1}\right)d\sigma(\lambda)$.

Список литературы: 1. *Ахиезер Н. И.* Классическая проблема моментов.— М. Физматгиз, 1961.— 310 с. 2. *Березанский Ю. М.* Разложение по собственным функциям самосопряженных операторов.— Киев: Наук. думка. 1965.— 798 с. 3. *Потапов В. П.* Мультипликативная структура J-растягивающих матриц-функций.— Тр. Моск. мат. о-ва, 1975, 4, с. 125—236. 4. *Ефимов А. В., Потапов В. П.* J-растягивающие матрицы-функции и их роль в теории электрических цепей.— Усп. мат. наук, 1973, **28**, вып. 1, с. 65—130. 5. *Ковалишина И. В., Потапов В. П.* Иедефинитная метрика в проблеме Неванлинны—Пика.—Докл. Арм. ССР, 1974, 59, № 1, с. 17—21. 6. *Ковалишина И. В.* J-растягивающие матрицы-функции в задаче Каратеодори.— Докл. Арм. ССР, 1974, **59**, № 3, с. 129—135. 7. *Ковалишина И. В.* J-растягивающие матрицы-функции в классической проблеме моментов.— Докл. Арм. ССР, 1975, **60**, № 1, с. 3—10. 8. *Ковалишина И. В.* Аналитическая теория одного класса интерполяционных задач.— Изв. АН СССР. Сер. мат., 1980, **273**, № 13, с. 25—30. 9. *Крейн М. Г.* К проблеме продолжения эрмитово-положительных непрерывных функций.— Докл. АН СССР, 1940, 26, № 21, с. 17—21. 10. *Крейн М. Г.* О логарифме бесконечно разложенной эрмитово-положительной функции.— Докл. АН СССР, 1944, 45, № 3, с. 99—102. 11. *Крейн М. Г.* Об одном общем методе разложения положительно-определенных ядер на элементарные произведения.— Докл. АН СССР, 1946, **53**, № 1. с. 3—6. 12. *Повзнер А. Я.* Об уравнениях типа Штурма — Лиувилля и позитивных функциях.— Докл. АН СССР, 1944, 43, № 9, с. 387—391. 13. *Левитан Б. М.* Теория операторов обобщенного сдвига.—М.: Наука, 1973.— 312 с. 14. *Кац И. С., Крейн М. Г.* R-функции — аналитические функции, отображающие верхнюю полуплоскость в себя.— Доп. 1 к кн. Ф. Аткинсона «Дискретные и непрерывные граничные задачи».— М.: Мир, 1968, с. 629—647. 15. *Маркушевич А. И.* Теория аналитических функций, Т. 1.— М.: Наука, 1967.— 486 с.

Поступила 5 января 1980 г.