УДК 519.21

А. И. ИЛЬИНСКИЙ

О ХРЕБТОВЫХ ФУНКЦИЯХ С ОДИНАКОВЫМИ НУЛЯМИ

И. В. Островский поставил перед автором следующий вопрос: определяются ли (с точностью до множителя вида $\exp(-at^2 + ibt)$, $a \geqslant 0$, $\operatorname{Im} b = 0$) целые характеристические функции конечного порядка своими нулями? Цель настоящей заметки — показать, что ответ на несколько более простой вопрос, получающийся заменой класса характеристических функций (х.ф.) классом хребтовых функций, отрицательный. (По поводу используемой здесь терминологии см. монографию [1].) Именно, существует целая х. ф. $\varphi(t)$ порядка, сколь угодно мало отличающегося от 4, такая, что функция

$$\psi(t) = e^{-t^4}\varphi(t) \tag{1}$$

является хребтовой. Отметим, что ранее А. А. Гольдбергом [2] было доказано существование решений уравнения (1) в классе бесконечно дифференцируемых финитных х. ф., причем с любым четным полиномом $P(t)$ $(P(0) = 0)$ с действительными коэффициентами в показателе экспоненты.

Предложение. *Для всякого* $\delta > 0$ *существует целая х. ф.* $\varphi(t)$, *порядка не выше* $4 + \delta$, *такая, что функция* $\psi(t)$ *из (1) является хребтовой.*

Доказательство. Пусть $\varepsilon > 0$ такое, что $4(1-\varepsilon)/(1-2\varepsilon) < 4 + \delta$. В качестве искомой функции $\varphi(t)$ можно взять

$$\varphi(t) = Q \sum_{n=N}^{\infty} q_n e^{-b_n t^2}, \tag{2}$$

где

$$b_n = \exp(a^n), \quad 1 < a < (1-\varepsilon)^{-1/2} \quad \textbf{(3)}; \quad q_n = \exp(-b_n^{2-\varepsilon}); \quad \textbf{(4)}$$

$Q = (\sum_{n=N}^{\infty} q_n)^{-1}$, N — достаточно большое натуральное число. Выбор N мы уточним позже.

Покажем сначала, что х.ф. $\varphi(t)$ является целой, порядка не выше $4(1-\varepsilon)/(1-2\varepsilon)$. Действительно,

$$\varphi(iy) = Q \sum_{n=N}^{\infty} q_n e^{b_n y^2}. \tag{5}$$

Используя неравенство Юнга, получаем

$$\varphi(iy) \leqslant Q \exp(y^{2\beta}/\beta) \sum_{n=N}^{\infty} q_n \exp(b_n^{\gamma}/\gamma),$$

где $\gamma = 2-2\varepsilon$, а $\beta = 2(1-\varepsilon)/(1-2\varepsilon)$ — число, сопряженное по Юнгу с γ, причем последний ряд сходится в силу (3) и (4).

Докажем теперь, что функция $\psi(t) = \exp(-t^4)\varphi(t)$ является хребтовой, т. е.

$$|\psi(x+iy)| \leqslant \psi(iy), \quad -\infty < x, \ y < \infty. \tag{6}$$

В силу (5) и

$$|\psi(x+iy)| \leqslant Q \exp(-x^4 - y^4 + 6x^2y^2) \sum_{n=N}^{\infty} q_n e^{b_n(y^2-x^2)},$$

достаточно убедиться, что при $x \geqslant 0$, $y \geqslant 0$

$$\sum_{n=N}^{\infty} q_n e^{b_n y^2} [1 - \exp(-b_n x^2 - x^4 + 6x^2y^2)] \geqslant 0. \tag{7}$$

Заметим, что область отрицательности квадратной скобки левой части (7) в первом квадранте есть $\{(x, y): x > 0, \ y > \sqrt{(x^2+b_n)/6}\}$, и обозначим $D_{n-1} = \{(x, y): 0 \leqslant x \leqslant \sqrt{b_{n-1}}, \sqrt{b_{n-2}/6} \leqslant y \leqslant \sqrt{b_{n-1}/6}\}$. Тогда, как легко видеть, (7) выполняется, если для всех $n \geqslant N+2$ при $(x, y) \in D_{n-1}$

$$q_n e^{b_n y^2} [1 - \exp(-b_n x^2 - x^4 + 6x^2y^2)] \geqslant$$
$$\geqslant \sum_{k=N}^{n-2} q_k e^{b_k y^2} [\exp(-b_k x^2 - x^4 + 6x^2y^2) - 1]. \tag{8}$$

Оценим снизу левую часть (л. ч.) неравенства (8) в D_{n-1}:

$$\text{Л. ч. } (8) \geqslant q_n e^{b_n y^2} [1 - e^{-x^2(b_n - 6y^2)}] \geqslant$$
$$\geqslant q_n e^{b_{n-2} b_n / 6} [1 - e^{-x^2(b_n - b_{n-1})}]. \tag{9}$$

Оценим сверху правую часть (пр. ч.) неравенства (8) в D_{n-1}:

$$\text{Пр. ч. } (8) \leqslant q_N (n-1-N)\, e^{b_{n-2} y^2} [e^{6x^2y^2} - 1] \leqslant$$
$$\leqslant q_N e^{c_1 b_{n-2} b_{n-1}} [e^{x^2 b_{n-1}} - 1]. \tag{10}$$

(Через c_j в дальнейшем обозначаются положительные абсолютные постоянные.) Учитывая (9), (10), видим, что (8) вытекает из справедливости при $0 \leqslant x \leqslant \sqrt{b_{n-1}}$ неравенства

$$q_n e^{c_2 b_{n-1} b_n} [e^{x^2(b_n - b_{n-1})} - 1] \geqslant$$
$$\geqslant q_N [e^{x^2 b_{n-1}} - 1] e^{x^2(b_n - b_{n-1})}. \tag{11}$$

Рассмотрим теперь два случая: а) $0 \leqslant x \leqslant b_{n-1}^{-1/2}$; б) $b_{n-1}^{-1/2} \leqslant x \leqslant \leqslant b_{n-1}^{1/2}$.

а) Так как $e^t \geqslant 1 + t \, (t \in R)$, то в силу (4) Л. ч. $(11) \geqslant \geqslant q_n e^{c_3 b_{n-2} b_n} x^2 = x^2 \exp [b_n (c_3 b_{n-2} - b_n^{1-\varepsilon})]$. Поскольку $e^t \leqslant 1 + (e - 1) t$ при $0 \leqslant t \leqslant 1$, то Пр. ч. $(11) \leqslant q_N x^2 e^{c_4 b_n}$. Учитывая (3) и последние оценки, убеждаемся, что (11) выполняется для всех $n \geqslant N + 2$, если только $N = N(\varepsilon)$ достаточно велико.

б) В этом случае

$$\text{Л. ч. } (11) \geqslant c_5 q_n \exp [c_2 b_{n-2} b_n + x^2 (b_n - b_{n-1})], \tag{12}$$
$$\text{Пр. ч. } (11) \leqslant q_N \exp (x^2 b_n). \tag{13}$$

В силу (12) и (13) справедливость (11) вытекает из неравенства (здесь $b_{n-1}^{-1/2} \leqslant x \leqslant b_{n-1}^{1/2}$)

$$c_5 q_n \exp [c_2 b_{n-2} b_n - x^2 b_{n-1}] \geqslant q_N. \tag{14}$$

Так как (см. (3), (4)) Л. ч. $(14) \geqslant c_5 q_n \exp [c_2 b_{n-2} b_n - b_{n-1}^2] \geqslant \geqslant c_5 \exp [b_n (c_6 b_{n-2} - b_n^{1-\varepsilon})]$, то (14) выполняется для всех $n \geqslant N + 2$, если $N = N(\varepsilon)$ достаточно велико.

Предложение доказано.

Замечание. Рассуждения, близкие к приведенным выше, показывают, что аналогичное утверждение имеет место, если в (1) взять вместо $-t^4$ любой четный полином $P(t)$ с действительными коэффициентами ($P(0) = 0$) и отрицательным старшим коэффициентом.

Автор выражает глубокую благодарность профессору И. В. Островскому за внимание к работе.

Список литературы: 1. *Линник Ю. В., Островский И. В.* Разложения случайных величин и векторов.— М.: Наука, 1972.— 480 с. 2. *Гольдберг А. А.* Об одном вопросе Ю. В. Линника.— Докл. АН СССР, 1973, **211**, № 1, с. 31—33.

Поступила 5 января 1980 г.