УДК 517.547

Ю. М. ДЮКАРЕВ, В. Э. КАЦНЕЛЬСОН

МУЛЬТИПЛИКАТИВНЫЕ И АДДИТИВНЫЕ КЛАССЫ СТИЛТЬЕСА АНАЛИТИЧЕСКИХ МАТРИЦ-ФУНКЦИЙ И СВЯЗАННЫЕ С НИМИ ИНТЕРПОЛЯЦИОННЫЕ ЗАДАЧИ. I

1⁰. Элементарные матрицы-функции класса $\mathbf{W}_S$

Пусть матрица J удо летворяет условиям $J^* = J$, $J^2 = I$, где I — единичная матрица m-го порядка.

С матрицей J стандартным образом связана индефинитная метрика в пространстве векторов. Поэтому матрицу J называют метризующей.

В дальнейшем потребуются следующие конкретизации метризующей матрицы J:

$$J_H = \begin{bmatrix} 0 & -iI \\ iI & 0 \end{bmatrix},\quad J_\pi = \begin{bmatrix} 0 & I \\ I & 0 \end{bmatrix},\quad j = \begin{bmatrix} -I & 0 \\ 0 & I \end{bmatrix}.$$

Матрицу ω будем называть J-растягивающей, если $\omega^* J \omega - J \geqslant 0$, и J-унитарной, если $\omega^* J \omega - J = 0$.

Определение 1.1. *Мероморфная в комплексной плоскости с разрезом по отрицательной полуоси* $(-\infty, 0]$ *матрица-функция* $\omega(z)$ *называется матрицей-функцией класса* W_S, *если:*

1) $\omega(z)$ *является* J_H*-растягивающей в верхней полуплоскости и* J_H*-унитарной на вещественной оси:* $\omega^*(z) J_H \omega(z) - J_H \geqslant 0$, $\operatorname{Im} Z > 0$, $\omega^*(z) J_H \omega(z) - J_H = 0$, $\operatorname{Im} z = 0$;

2) $\omega(z)$ *является* J_π*-растягивающей на положительной полуоси:* $\omega^*(x) J_\pi \omega(x) - J_\pi \geqslant 0$, $x > 0$.

Можно доказать, что всякая матрица-функция $\omega(z) \in \mathbf{W}_S$ является J_π-растягивающей в правой полуплоскости $\omega^*(z) J_\pi \omega(z) - J_\pi \geqslant 0$, $\operatorname{Re} z > 0$.

В дальнейшем ограничимся изучением простейших представителей класса $\mathbf{W}_S$ — так называемых элементарных матриц-функций.

Определение 1. 2. $\omega(z) \in \mathbf{W}_S$ *называется элементарной, если* $\omega(z)$ *является рациональной матрицей-функцией, и единственными ее особенностями являются простые полюсы в точках* $z_1, \ldots, z_n$, *причем* $z_j \neq \bar{z}_k$ $(1 \leqslant j,\ k \leqslant n)$.

Отметим, что последнее условие запрещает, в частности, иметь элементарной матрице-функции класса $\boldsymbol{W}_S$ вещественные полюсы.

Следующая теорема показывает, что существуют матрицы-функции класса $\boldsymbol{W}_S$, и устанавливает их структуру.

Теорема 1.1. *Пусть последовательность комплексных чисел* $z_1, \ldots, z_n$ $(z_j \neq z_k,\ 1 \leqslant j,\ k \leqslant n)$ *и последовательность квадратных матриц* m*-го порядка* $s_1, \ldots, s_n$ *таковы, что* $A_0 > 0$, $A_1 > 0$, *где*

$$A_0 = \begin{pmatrix} \dfrac{s_1 - s_1^*}{z_1 - \bar{z}_1} & \cdots & \dfrac{s_1 - s_n^*}{z_1 - \bar{z}_n} \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ \dfrac{s_n - s_1^*}{z_n - \bar{z}_1} & \cdots & \dfrac{s_n - s_n^*}{z_n - \bar{z}_n} \end{pmatrix}; \tag{1.1}$$

$$A_1 = \begin{pmatrix} -z_1 \dfrac{z_1^{-1}s_1 - \bar{z}_1^{-1}s_1^*}{z_1 - \bar{z}_1}\bar{z}_1 & \cdots & -z_1 \dfrac{z_1^{-1}s_n - \bar{z}_1^{-1}s_n^*}{z_1 - \bar{z}_n}\bar{z}_n \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ -z_n \dfrac{z_n^{-1}s_n - \bar{z}_1^{-1}s_1^*}{z_n - \bar{z}_1}\bar{z}_1 & \cdots & -z_n \dfrac{z_n^{-1}s_n - \bar{z}_n^{-1}s_n^*}{z_n - \bar{z}_n}\bar{z}_n \end{pmatrix}. \tag{1.2}$$

Тогда:

1. *Матрица-функция*

$$\omega(z) = I_2 + iJ_H D^* A^{-1}\Omega(z) D \tag{1.3}$$

является элементарной матрицей-функцией класса $\mathbf{W}_S$.

Здесь

$$D = \begin{pmatrix} 0 & I \\ \vdots & \vdots \\ 0 & I \\ s_1 & 0 \\ \vdots & \vdots \\ s_n & 0 \end{pmatrix}, \quad A = \begin{pmatrix} A_0 & 0 \\ 0 & A_1 \end{pmatrix}, \quad I_2 = \begin{pmatrix} I & 0 \\ 0 & I \end{pmatrix};$$

$$\Omega(z) = \begin{pmatrix} I_n & I_n \\ -Z & -zI_n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} (zI_n - Z)^{-1} & 0 \\ 0 & (zI_n - Z)^{-1} \end{pmatrix};$$

$$Z = \begin{pmatrix} z_1 I & & & \\ & \cdot & & \\ & & \cdot & \\ & & & \cdot \\ & & & z_n I \end{pmatrix}, \quad I_n = \begin{pmatrix} I & & & \\ & \cdot & & \\ & & \cdot & \\ & & & \cdot \\ & & & I \end{pmatrix}.$$

2. *В точке* $z = \infty$ $\omega(z)$ *имеет нормировку вида*

$$\omega(\infty) = \begin{pmatrix} I & 0 \\ M & I \end{pmatrix}, \quad M > 0, \tag{1.4}$$

именно

$$M = (s_1^* \ \ldots \ s_n^*)\, A_1^{-1} \begin{pmatrix} s_1 \\ \vdots \\ s_n \end{pmatrix}.$$

Доказательство. При вычислении J-форм нам потребуются следующие матричные тождества:

$$D \begin{pmatrix} 0 & I \\ -I & 0 \end{pmatrix} D^* = \begin{pmatrix} 0 & -I_n \\ Z & 0 \end{pmatrix} A - A \begin{pmatrix} 0 & Z^* \\ -I_n & 0 \end{pmatrix}; \tag{1.5}$$

$$I_{2n} + \begin{pmatrix} 0 & -I_n \\ Z & 0 \end{pmatrix} \Omega(z) = \begin{pmatrix} zI_n & 0 \\ 0 & -I_n \end{pmatrix} \Omega(z); \tag{1.6}$$

$$DJ_\pi D^* = \begin{pmatrix} 0 & I_n \\ Z & 0 \end{pmatrix} A + A \begin{pmatrix} 0 & Z^* \\ I_n & 0 \end{pmatrix}; \tag{1.7}$$

$$\begin{pmatrix} I_n & 0 \\ 0 & -I_n \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 & I_n \\ Z & 0 \end{pmatrix} \Omega(z) = \begin{pmatrix} zI_n & 0 \\ 0 & I_n \end{pmatrix} \Omega(z). \tag{1.8}$$

Справедливость этих тождеств проверяется непосредственно.

Вычислим J_H-форму $\omega(z)$:

$$\omega^*(z)J_H\omega(z)-J_H=iD^*A^{-1}\Omega(z)D-iD^*\Omega^*(z)A^{-1}D-iD^*\Omega^*(z)A^{-1}D\begin{pmatrix}0 & I\\ -I & 0\end{pmatrix}\times$$
$$\times D^*A^{-1}\Omega(z)D=iD^*\left\{I_{2n}+\Omega^*(z)\begin{pmatrix}0 & Z^*\\ -I_n & 0\end{pmatrix}\right\}A^{-1}\Omega(z)D-iD^*\Omega^*(z)A^{-1}\times$$
$$\times\left\{I_{2n}+\begin{pmatrix}0 & -I_n\\ Z & 0\end{pmatrix}\Omega(z)\right\}D=iD^*\Omega^*(z)\begin{pmatrix}\bar zI_n & 0\\ 0 & -I_n\end{pmatrix}A^{-1}\Omega(z)D-iD^*\Omega^*(z)A^{-1}\times$$
$$\times\begin{pmatrix}zI_n & 0\\ 0 & -I_n\end{pmatrix}\Omega(z)D=iD^*\Omega^*(z)\left\{\begin{pmatrix}\bar zA_0^{-1} & 0\\ 0 & -A_1^{-1}\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}zA_0^{-1} & 0\\ 0 & -A_1^{-1}\end{pmatrix}\right\}\Omega(z)D=i(\bar z-$$
$$-z)D^*\Omega^*(z)\begin{pmatrix}I_n\\ 0\end{pmatrix}A_0^{-1}(I_n,0)\Omega(z)D,$$

где второе равенство этой цепочки равенств вытекает из тождества (1.5), а третье — из тождества (1.6).

Таким образом,

$$\omega^*(z)J_H\omega(z)-J_H=i(\bar z-z)D^*\Omega^*(z)\begin{pmatrix}I_n\\ 0\end{pmatrix}A_0^{-1}(I_n,0)\Omega(z)D. \tag{1.9}$$

Отсюда следует, что $\omega(z)$ является J_H — растягивающей в верхней полуплоскости и J_H-унитарной на вещественной оси: $\omega^*(z)J_H\omega(z)-J_H\geqslant 0$, $\operatorname{Im}z>0$; $\omega^*(z)J_H\omega(z)-J_H=0$, $\operatorname{Im}z=0$.

Далее вычислим J_Π-форму $\omega(z)$:

$$\omega^*(z)J_\Pi\omega(z)-J_\Pi=jD^*A^{-1}\Omega(z)D+D^*\Omega^*(z)A^{-1}Dj-D^*\Omega^*(z)A^{-1}DJ_\Pi D^*\times$$
$$\times A^{-1}\Omega(z)D=jD^*A^{-1}\Omega(z)D+D^*\Omega^*(z)A^{-1}Dj-D^*\Omega^*(z)A^{-1}\begin{pmatrix}0 & I_n\\ Z & 0\end{pmatrix}\Omega(z)D-$$
$$-D^*\Omega^*(z)\begin{pmatrix}0 & Z^*\\ I_n & 0\end{pmatrix}A^{-1}\Omega(z)D=D^*\left\{\begin{pmatrix}I_n & 0\\ 0 & -I_n\end{pmatrix}-\Omega^*(z)\begin{pmatrix}0 & Z^*\\ I_n & 0\end{pmatrix}\right\}A^{-1}\Omega(z)D+$$
$$+D^*\Omega^*(z)A^{-1}\left\{\begin{pmatrix}I_n & 0\\ 0 & -I_n\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}0 & I_n\\ Z & 0\end{pmatrix}\Omega(z)\right\}D=D^*\Omega^*(z)\begin{pmatrix}\bar zI_n & 0\\ 0 & I_n\end{pmatrix}A^{-1}\Omega(z)D+$$
$$+D^*\Omega^*(z)A^{-1}\begin{pmatrix}zI_n & 0\\ 0 & I_n\end{pmatrix}\Omega(z)D=D^*\Omega^*(z)\left\{\begin{pmatrix}\bar zI_n & 0\\ 0 & I_n\end{pmatrix}A^{-1}+A^{-1}\begin{pmatrix}zI_n & 0\\ 0 & I_n\end{pmatrix}\right\}\Omega(z)D=$$
$$=(z+\bar z)D^*\Omega^*(z)\begin{pmatrix}I_n\\ 0\end{pmatrix}A_0^{-1}(I_n,0)\Omega(z)D+2D^*\Omega^*(z)\begin{pmatrix}0\\ I_n\end{pmatrix}A_1^{-1}(0,I_n)\Omega(z)D,$$

где второе равенство этой цепочки равенств вытекает из тождества (1.7), а четвертое из тождества (1.8).

Окончательно

$$\omega^*(z)J_\Pi\omega(z)-J_\Pi=(z+\bar z)D^*\Omega^*(z)\begin{pmatrix}I_n\\ 0\end{pmatrix}A_0^{-1}(I_n,0)\Omega(z)D+2D^*\Omega^*(z)\times$$
$$\begin{pmatrix}0\\ I_n\end{pmatrix}A_1^{-1}(0,I_n)\Omega(z)D. \tag{1.10}$$

Отсюда следует, что $\omega(z)$ является J_Π-растягивающей в правой полуплоскости $\omega^*(z)J_\Pi\omega(z)-J_\Pi\geqslant 0$, $\operatorname{Re}z>0$. Равенства (1.9), (1.10) показывают, что $\omega(z)\in W_S$.

Утверждение 2 теоремы о нормировке $\omega(\infty)$ очевидно.

Замечание. Можно доказать, что определяемая равенством (1.3) матрица-функция $\omega(z)$ является матрицей-функцией полного ранга (определение понятия «полный ранг» см. [2, § 2, пункт 4]).

В случае полного ранга справедливо и обратное утверждение: для всякой элементарной матрицы-функции $\omega(z) \in W_S$ полного ранга с простыми полюсами в точках $z_1, \ldots, z_n$, имеющей в точке $z=\infty$ нормировку вида (1.4), однозначно определены «параметры» — квадратные матрицы m-го порядка $s_1, \ldots, s_n$ такие, что выполняются условия (1.1), (1.2), и матрица-функция $\omega(z)$ допускает представление (1.3).

В дальнейшем будет удобно перейти от $J_{\text{П}}$-формы матрицы-функции $\omega(z)$ к $J_{\text{Н}}$-форме матрицы-функции

$$\omega_P(z) = P(z)\,\omega(z)\,P^{-1}(z), \tag{1.11}$$

где

$$P(z) = \begin{pmatrix} zI & 0 \\ 0 & I \end{pmatrix}.$$

Имеет место следующая

Теорема 1.2. *Для того чтобы J_H-растягивающая в верхней полуплоскости и J_H-унитарная на вещественной оси матрица — функция $\omega(z)$ была $J_{\text{П}}$-растягивающей в правой полуплоскости, необходимо и достаточно, чтобы $\omega_P(z)$ удовлетворяла неравенству* $\omega_P^*(z)\,J_H\omega_P(z) - J_H \leqslant 0$, $\operatorname{Im} z > 0$. Эта теорема доказана в [3, гл. IV, теорема 6].

Пусть $\omega(z)$ допускает представление (1.3). Используя (1.3), (1.11) и коммутируя $P(z)$, получаем

$$\omega_P(z) = I_2 + iJ_H D^* A^{-1}\Omega_P(z)\,D, \tag{1.12}$$

где

$$\Omega_P(z) = \begin{pmatrix} zI_n & I_n \\ -Z & -I_n \end{pmatrix}\begin{pmatrix} (zI_n - Z)^{-1} & 0 \\ 0 & (zI_n - Z)^{-1} \end{pmatrix}.$$

При вычислении J_H-формы $\omega_P(z)$ используется аналогичное тождеству (1.6) тождество

$$I_{2n} + \begin{pmatrix} 0 & -I_n \\ Z & 0 \end{pmatrix}\Omega_P(z) = \begin{pmatrix} I_n & 0 \\ 0 & -zI_n \end{pmatrix}\Omega_P(z).$$

В остальном вычисление J_H-формы $\omega_P(z)$ повторяет вычисление J_H-формы $\omega(z)$. Окончательный результат имеет вид

$$\omega_P^*(z)\,J_H\omega_P(z) - J_H = i(z-\bar{z})\,D^*\Omega_P^*(Z)\begin{pmatrix} 0 \\ I_n \end{pmatrix}A_1^{-1}(0, I_n)\,\Omega_P(z)\,D. \tag{1.13}$$

Теорема 1.2 позволяет рассматривать вместо пары J-форм (1.9) (1.10) пару J-форм (1.9), (1.13). Рассмотрение последней пары J-форм удобнее по ряду причин, которые будут понятны из дальнейшего изложения.

2°. Мультипликативная структура элементарных матриц-функций класса W_S

Определение 2.1. *Будем говорить, что* $v_1(z) \in W_S$ *отщепляется справа в классе* W_S *от матрицы-функции* $\omega(z) \in W_S$, *если*

$$\omega(z) = v_2(z)\, v_1(z), \tag{2.1}$$

причем $v_2(z) \in W_S$.

Теорема 2.1. *Для того чтобы* $v_1(z) \in W_S$ *отщеплялась справа в классе* W_S *от матрицы-функции* $\omega(z) \in W_S$, *необходимо и достаточно, чтобы выполнялись следующие неравенства:*

$$\omega^*(z)\, J_H \omega(z) - J_H \geqslant v_1^*(z)\, J_H v_1(z) - J_H, \quad \operatorname{Im} z > 0. \tag{2.2}$$

$$\omega^*(z)\, J_{\Pi} \omega(z) - J_{\Pi} \geqslant v_1^*(z)\, J_{\Pi} v_1(z) - J_{\Pi}, \quad \operatorname{Re} z > 0. \tag{2.3}$$

Доказательство этой теоремы очевидно.

Воспользовавшись теоремой 1.2, можем заменить систему условий (2.2)—(2.3) эквивалентной системой (2.4)—(2.5)

$$\omega^*(z)\, J_H \omega(z) - J_H \geqslant v_1^*(z)\, J_H v_1(z) - J_H, \quad \operatorname{Im} z > 0; \tag{2.4}$$

$$\omega_P^*(z)\, J_H \omega_P(z) - J_H \leqslant v_{1,\,P}^*(z)\, J_H v_{1,\,P}(z) - J_H, \quad \operatorname{Im} z > 0. \tag{2.5}$$

Рассмотрим элементарную матрицу-функцию класса W_S с полюсами в точках $z_1, \ldots, z_n$ $(z_j \neq \bar{z}_k,\ 1 \leqslant j, k \leqslant n)$ и «параметрами» $s_1, \ldots, s_n$, заданную посредством (1.3), причем $A_0 > 0$, $A_1 > 0$. Ее обозначим через $\omega_n(z)$, а «усеченную» матрицу-функцию, определяемую аналогично матрице-функции $\omega_n(z)$ полюсами $z_1, \ldots, z_{n-1}$ и «параметрами» $s_1, \ldots, s_{n-1}$,— через $\omega_{n-1}(z)$.

Теорема 2.2. *Матрица-функция* $\omega_{n-1}(z)$ *отщепляется справа в классе* W_S *от матрицы-функции* $\omega_n(z)$

$$\omega_n(z) = b_n(z)\, \omega_{n-1}(z), \tag{2.6}$$

причем

$$b_n(z) = \begin{pmatrix} I & 0 \\ M_n & I \end{pmatrix} \left\{ I_2 + \frac{1}{z - z_n} i J_H \left[D_n^* \begin{pmatrix} I_n \\ I_n \end{pmatrix} A_{0,\,n}^{-1}(I_n, I_n)\, D_n - \right.\right.$$

$$\left.\left. - D_{n-1}^* \begin{pmatrix} I_{n-1} \\ I_{n-1} \end{pmatrix} A_{0,\,n-1}^{-1}(I_{n-1}, I_{n-1})\, D_{n-1} \right] \right\} \begin{pmatrix} I & 0 \\ -M_{n-1} & I \end{pmatrix}, \tag{2.7}$$

где

$$M_n = (s_1 \ \ldots \ s_n)\, A_{1,\,n}^{-1} \begin{pmatrix} s_1^* \\ \vdots \\ s_n^* \end{pmatrix}, \quad M_{n-1} = (s_1, \ \ldots, \ s_{n-1})\, A_{1,\,n-1}^{-1} \begin{pmatrix} s_1^* \\ \vdots \\ s_{n-1}^* \end{pmatrix}.$$

Матрица-функция $b_n(z)$ *является элементарной матрицей-функцией класса* W_S *с единственным простым полюсом в точке* z_n.

Доказательство. Прежде всего покажем, что $\omega_{n-1}(z)$ отщепляется справа от $\omega_n(z)$. J_H-форма $\omega_n(z)$ имеет вид (1.9)

$$\frac{\omega_n^*(z)\, J_H \omega_n(z) - J_H}{i(\bar{z} - z)} = D_n^* \Omega_n^*(z) \begin{pmatrix} I_n \\ 0 \end{pmatrix} A_{0,\,n}^{-1}(I_n, 0)\, \Omega_n(z)\, D_n,$$

а J_H-форма $\omega_{n-1}(z)$ —

$$\frac{\omega_{n-1}^*(z)\,J_H\omega_{n-1}(z)-J_H}{i(\bar z - z)} = D_{n-1}^*\Omega_{n-1}^*(z)\begin{pmatrix} I_{n-1} \\ 0 \end{pmatrix}\times$$
$$\times A_{0,\,n-1}^{-1}(I_{n-1},\,0)\,\Omega_{n-1}(z)\,D_{n-1}.$$

Введем обозначение $A_{0,\,n}=\begin{pmatrix} A_{n-1} & B_n \\ B_n^* & C_n \end{pmatrix}$.

Так как $A_{0,\,n}>0$, по лемме о неотрицательной блок-матрице [3, глава 2, § 2]

$$C_n - B_n^*A_{n-1}^{-1}B_n > 0. \tag{2.8}$$

Несложно проверяется, что

$$A_{0,\,n}^{-1}=\begin{pmatrix} A_{n-1}^{-1} & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}+\begin{pmatrix} -A_{n-1}^{-1} & B_n \\ & I \end{pmatrix}\{C_n - B_n^*A_{n-1}^{-1}B_n\}\,(-B_n^*A_{n-1}^{1},\,I). \tag{2.9}$$

Из соотношения (2.9) вытекает, что справедливо равенство

$$\frac{\omega_n^*(z)\,J_H\omega_n(z)-J_H}{i(\bar z - z)}-\frac{\omega_{n-1}^*(z)\,J_H\omega_{n-1}(z)-J_H}{i(\bar z - z)}=$$
$$=D_n^*\Omega_n^*(z)\begin{pmatrix} I_n \\ 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -A_{n-1}^{-1} & B_n \\ & I \end{pmatrix}\{C_n - B_n^*A_{n-1}^{-1}B_n\}^{-1}\times$$
$$\times(-B_n^*A_{n-1}^{-1},\,I)\,(I_n,\,0)\,\Omega_n(z)\,D_n.$$

Вследствие (2.8) J_H-форма матрицы-функции $\omega_n(z)$ можарирует J_H-форму $\omega_{n-1}(z)$:

$$\frac{\omega_n^*(z)\,J_H\omega_n(z)-J_H}{i(\bar z - z)}\geqslant\frac{\omega_{n-1}^*(z)\,J_H\omega_{n-1}(z)-J_H}{i(\bar z - z)}. \tag{2.10}$$

Аналогичным образом доказывается неравенство

$$\frac{\omega_{P,\,n}^*(z)\,J_H\omega_{P,\,n}(z)-J_H}{i(\bar z - z)}\leqslant\frac{\omega_{p,\,n-1}^*(z)\,J_H\omega_{P,\,n-1}(z)-J_H}{i(\bar z - z)}. \tag{2.11}$$

В силу теоремы 2.1 неравенства (2.10), (2.11) означают, что $\omega_{n-1}(z)$ отщепляется от $\omega_n(z)$ справа: $\omega_n(z)=b_n(z)\,\omega_{n-1}(z)$. Частное $b_n(z)=\omega_n(z)\,\omega_{n-1}^{-1}(z)$ может быть найдено непосредственным вычислением. Оно имеет вид (2.7). По теореме 2.1 $b_n(z)\in \boldsymbol{W}_S$. Очевидно, что единственной особенностью $b_n(z)$ является простой полюс в точке z_n. Теорема 2.2 доказана.

Последовательное применение теоремы 2.2 (формула (2.6)) приводит к представлению $\omega_n(z)$ в виде произведения простейших сомножителей

$$\omega_n(z)=b_n(z)\ \ldots\ b_1(z)\,L, \tag{2.12}$$

где $b_j(z)$ — элементарная матрица-функция класса $\boldsymbol{W}_S$ с единственным полюсом в точке z_j $(1\leqslant j\leqslant n)$, так называемый двучленный множитель; L — постоянная матрица класса $\boldsymbol{W}_S$.

Покажем, что в представлении (2.12) $L = I_2$. Из равенства (2.7) вытекает, что

$$b_j(\infty) = \begin{pmatrix} I & 0 \\ M_j - M_{j-1} & I \end{pmatrix} \; (1 \leqslant j \leqslant n)$$

(M_0 условимся считать равным нулю).

Далее

$$b_n(\infty) \ldots b_1(\infty) = \prod_{j=1}^{\overset{n}{\curvearrowleft}} \begin{pmatrix} I & 0 \\ M_j - M_{j-1} & I \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} I & 0 \\ \sum\limits_{j=1}^{n} (M_j - M_{j-1}) & I \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} I & 0 \\ M_n & I \end{pmatrix}.$$

Но с другой стороны, $\omega_n(\infty) = \begin{pmatrix} I & 0 \\ M_n & I \end{pmatrix}$.

Следовательно, $\omega_n(z) = b_n(z) \ldots b_1(z)$ **(2.13).**

3°. Интерполяционная задача в классе S

Определение 3.1. *Голоморфная в верхней полуплоскости матрица-функция $w(z)$ называется неванлинновской, если* $\dfrac{w(z) - w^*(z)}{2i} \geqslant 0$, $\operatorname{Im} z > 0$.

Класс всех неванлинновских матриц-функций обозначим $\boldsymbol{N}$.

Определение 3.2. *Голоморфная в комплексной плоскости с разрезом по полуоси* $(-\infty, 0]$ *матрица-функция* $s(z)$ *называется стилтьесовской, если*

1) $\dfrac{s(z) - s^*(z)}{z - \bar{z}} \geqslant 0$, $\operatorname{Im} z \neq 0$; 2) $s(x) \geqslant 0$, $x > 0$.

Класс всех стилтьесовских матриц-функций обозначим $\boldsymbol{S}$.

Отметим, что из $s(z) \in \boldsymbol{S}$ следует $s^*(z) + s(z) \geqslant 0$, $\operatorname{Re} z > 0$.

Сформулируем две теоремы. Они доказаны в работе [4] (приложение).

Теорема 3.1. *Для того чтобы* $s(z) \in \boldsymbol{S}$, *необходимо и достаточно, чтобы* $s(z)$ *допускала следующее интегральное представление:*

$$s(z) = Az + B + \int\limits_0^\infty \frac{z}{z+t} \, d\sigma(t), \tag{3.1}$$

где $A \geqslant 0$, $B \geqslant 0$, $\sigma(t)$ — *монотонно возрастающая матрица-функция такая, что* $\displaystyle\int\limits_0^\infty \frac{d\sigma(t)}{1+t} < \infty$.

Теорема 3.2. *Для того чтобы* $s(z) \in \boldsymbol{S}$, *необходимо и достаточно, чтобы* $s(z) \in \boldsymbol{N}$, $-z^{-1}s(z) \in \boldsymbol{N}$.

В классе $\boldsymbol{S}$ рассмотрим следующую интерполяционную задачу:

Дана последовательность точек $z_1, \ldots, z_n$ такая, что $\operatorname{Im} z_j > 0$ $(1 \leqslant j \leqslant n)$, и последовательность квадратных матриц $s_1, \ldots, s_n$.

Требуется выяснить, при каких условиях существует матрица-функция $s(z) \in \boldsymbol{S}$ такая, что $s(z_j) = s_j$, $(1 \leqslant j \leqslant n)$ (I), *а также описать множество всех решений.*

Следующая теорема позволяет переформулировать интерполяционную задачу в классе $\boldsymbol{S}$ в терминах матричных неравенств.

Теорема 3.3. *Для того чтобы матрица-функция $s(z) \in \boldsymbol{S}$ была решением интерполяционной задачи* (I) *в классе* $\boldsymbol{S}$, *необходимо и достаточно, чтобы $s(z)$ удовлетворяла системе матричных неравенств:*

$$\begin{pmatrix} A_0 & B_0 \\ B_0^* & C_0 \end{pmatrix} = \left(\begin{array}{c|c} & \dfrac{s_1 - s^*(z)}{z_1 - \bar{z}} \\ A_0 & \cdots\cdots \\ & \dfrac{s_n - s^*(z)}{z_n - \bar{z}} \\ \hline * & \dfrac{s(z) - s^*(z)}{z - \bar{z}} \end{array}\right) \geqslant 0; \tag{3.2}$$

$$\begin{pmatrix} A_1 & B_1 \\ B_1^* & C_1 \end{pmatrix} = \left(\begin{array}{c|c} & -z_1 \dfrac{z_1^{-1} s_1 - \bar{z}^{-1} s^*(z)}{z_1 - \bar{z}} \\ A_1 & \cdots\cdots\cdots \\ & -z_n \dfrac{z_n^{-1} s_n - \bar{z}^{-1} s^*(z)}{z_n - \bar{z}} \\ \hline * & -\dfrac{z^{-1} s(z) - \bar{z}^{-1} s^*(z)}{z - \bar{z}} \end{array}\right) \geqslant 0. \tag{3.3}$$

где A_0 и A_1 определены соответственно в (1.1), (1.2).

Доказательство. Необходимость может быть получена с помощью рассуждений, аналогичных тем, что приведены в [3, гл. 2, § 1]. При этом используется интегральное представление (3.1).

Займемся доказательством достаточности. Пусть голоморфная матрица-функция $s(z)$ удовлетворяет системе матричных неравенств (3.2), (3.3). Тогда имеют место неравенства

$$\frac{s(z) - s^*(z)}{z - \bar{z}} \geqslant 0, \quad -\frac{z^{-1} s(z) - \bar{z}^{-1} s^*(z)}{z - \bar{z}} \geqslant 0.$$

Из этих неравенств, в силу теоремы 3.2 вытекает, что $s(z) \in \boldsymbol{S}$. Далее, из неравенства (3.2) следует неотрицательность блок-миноров:

$$\begin{pmatrix} \dfrac{s_j - s_j^*}{z_j - \bar{z}_j} & \dfrac{s_j - s^*(z)}{z_j - \bar{z}} \\ \dfrac{s(z) - s_j^*}{z - \bar{z}_j} & \dfrac{s(z) - s^*(z)}{z - \bar{z}} \end{pmatrix} \geqslant 0 \quad (1 \leqslant j \leqslant n).$$

Переходя в этих неравенствах к пределу при $z \to \bar{z}_j$, получаем $s^*(\bar{z}_j) = s_j$ $(1 \leqslant j \leqslant n)$. Или, в силу того, что стилтьесовские матрицы-функции принимают эрмитово-неотрицательные значения на полуоси $(0, \infty)$, $s(z_j) = s_j$ $(1 \leqslant j \leqslant n)$, что и требовалось доказать.

В дальнейшем ограничимся изучением вполне неопределенной ситуации (строгой положительности матриц A_0, A_1):

$$A = \begin{pmatrix} A_0 & 0 \\ 0 & A_1 \end{pmatrix} > 0. \tag{3.4}$$

Будет показано, что во вполне неопределенной ситуации существует бесконечно много решений интерполяционной задачи (I) в классе $\boldsymbol{S}$, или, что тоже самое, бесконечно много решений относительно $s(z)$ системы матричных неравенств (3.2), (3.3). Множество всех таких решений $s(z)$ допускает параметрическое описание посредством дробно-линейного преобразования вида

$$s(z) = (p(z)\,\beta(z) + q(z)\,\delta(z))^{-1}\,(p(z)\,\alpha(z) + q(z)\,\gamma(z)), \tag{3.5}$$

где матрица коэффициентов дробно-линейного преобразования будет построена по данным задачи (I), а «параметр» $(p(z), q(z))$ является произвольной так называемой стилтьесовской парой матриц-функций. Введем теперь необходимые определения.

Определение 3.3. *Пару мероморфных в комплексной плоскости с разрезом по отрицательной полуоси* $(-\infty, 0]$ *матриц-функций* $(p(z), q(z))$ *назовем стилтьесовской, если*

1) $\Delta(z) = \det(p(z)\,p^*(z) + q(z)\,q^*(z)) \not\equiv 0$ *(невырожденность пары)*;

2) $(p(z), q(z))\dfrac{J_H}{i(\bar{z}-z)}\begin{pmatrix} p^*(z) \\ q^*(z) \end{pmatrix} \geqslant 0, \quad \operatorname{Im} z > 0;$

3) $(p(x), q(x))\,J_{\text{п}}\begin{pmatrix} p^*(x) \\ q^*(x) \end{pmatrix}, \quad x > 0.$

Для стилтьесовских пар имеет место утверждение, аналогичное теореме 3.2.

Теорема 3.4. *Для мероморфных в комплексной плоскости с разрезом по отрицательной полуоси* $(-\infty, 0]$ *пар* $(p(z), q(z))$ *система условий 1, 2, 3 определения 3.3 эквивалентна системе условий 1, 2, 3′, где*

3′. $(-z^{-1}p(z), q(z))\dfrac{J_H}{i(\bar{z}-z)}\begin{pmatrix} -\bar{z}^{-1}p^*(z) \\ q^*(z) \end{pmatrix} \geqslant 0, \quad \operatorname{Im} z \neq 0.$

На множестве стилтьесовских пар введем отношение эквивалентности: *пара* $(p(z), q(z))$ *называется эквивалентной паре* $(p_1(z), q_1(z))$, *если существует мероморфная в плоскости с разрезом по отрицательной полуоси матрица-функция* $Q(z)$ $(\det Q(z) \not\equiv 0)$ *такая, что* $p_1(z) = Q(z)\,p(z)$, $q_1(z) = Q(z)\,q(z)$.

Очевидно, что введенное отношение является отношением эквивалентности, и, следовательно, множество стилтьесовских пар разбивается на классы эквивалентности. Мы будем отождествлять пары из одного класса. Смысл этого отождествления ясен, так как эквивалентные пары $(p(z), q(z))$ и $(p_1(z), q_1(z))$ в результате дробно-линейного преобразования (3.5) приводят к одной и той же матрице-функции $s(z)$.

Следующая теорема дает структуру общего решения интерполяционной задачи (I) в классе $\boldsymbol{S}$.

Теорема 3.5. *1. Пусть матрица-функция $s(z) \in \boldsymbol{S}$ является решением интерполяционной задачи* (I) *в классе $\boldsymbol{S}$. Тогда существует некоторая стилтьесовская пара $(p(z), q(z))$ такая, что $s(z)$ представляется в виде дробно-линейного преобразования*

$$s(z) = (p(z)\beta(z) + q(z)\delta(z))^{-1}(p(z)\alpha(z) + q(z)\gamma(z)). \tag{3.6}$$

Матрица коэффициентов этого преобразования строится согласно (1.3):

$$\omega(z) = \begin{pmatrix} \alpha(z) & \beta(z) \\ \gamma(z) & \delta(z) \end{pmatrix} = I_2 + iJ_H D^* A^{-1}\Omega(z) D \tag{3.7}$$

и является элементарной матрицей-функцией класса $\boldsymbol{W}_S$ с полюсами в узлах интерполяции.

2. Если $(p(z), q(z))$ — произвольная стилтьесовская пара, а матрица-функция $\omega(z)$ построена по формуле (3.7), то дробно-линейное преобразование (3.6) определяет матрицу-функцию $s(z) \in \boldsymbol{S}$, являющуюся решением интерполяционной задачи (I).

3. Преобразование (3.6) над парами $(p(z), q(z))$ и $(p_1(z), q_1(z))$ приводит к одной и той же матрице-функции $s(z)$ тогда и только тогда, когда пары $(p(z), q(z))$ и *$(p_1(z), q_1(z))$ эквивалентны.*

Доказательство. 1. Согласно теореме 3.3 интерполяционная задача (I) в классе $\boldsymbol{S}$ адекватна системе матричных неравенств (3.2), (3.3), которую мы и будем решать относительно матрицы-функции $s(z)$. Итак, пусть $s(z)$ удовлетворяет системе (3.2), (3.3). По лемме о неотрицательной блок-матрице [3, гл. 2, § 2] система (3.2), (3.3) эквивалентна системе $C_0 - B_0^* A_0^{-1} B_0 \geqslant 0$, $C_1 - B_1^* A_1^{-1} B_1 \geqslant 0$.

Или, пользуясь введенными выше обозначениями,

$$(s(z), I)\left\{\frac{J_H}{i(\bar{z}-z)} - J_H D^* \Omega^*(\bar{z}) \begin{pmatrix} I_n \\ 0 \end{pmatrix} A_0^{-1}(I_n, 0)\,\Omega(\bar{z}) D J_H\right\} \begin{pmatrix} s^*(z) \\ I \end{pmatrix} \geqslant 0, \tag{3.8}$$

$$(z^{-1}s(z), I)\left\{\frac{-J_H}{i(\bar{z}-z)} - J_H D^* \Omega_P^*(\bar{z}) \begin{pmatrix} 0 \\ I_n \end{pmatrix} A_1^{-1} \times \right.$$
$$\left. \times (0, I_n)\,\Omega_P(\bar{z}) D J_H\right\} \begin{pmatrix} \bar{z}^{-1}s^*(z) \\ I \end{pmatrix} \geqslant 0. \tag{3.9}$$

Построим матрицы-функции: $\omega(z) = I_2 + iJ_H D^* A^{-1}\Omega(z) D$, $\omega_P(z) = I_2 + iJ_H D^* A^{-1}\Omega_P(z) D$.

Обратные матрицы-функции могут быть найдены по принципу симметрии [3, гл. 2, § 1]: $\omega^{-1}(z) = J_H \omega^*(\bar{z}) J_H = I_2 - iJ_H D^* \Omega^*(\bar{z}) A^{-1} D$, $\omega_P^{-1}(z) = J_H \omega_P^*(\bar{z}) J_H = I_2 - iJ_H D^* \Omega_P^*(\bar{z}) A^{-1} D$.

Их J_H-формы имеют вид

$$\frac{J_H - \omega^{-1}(Z) J_H \omega^{-1^*}(z)}{i(\bar{z}-z)} = J_H D^* \Omega^*(\bar{z}) \begin{pmatrix} I_n \\ 0 \end{pmatrix} A_0^{-1} (I_n, 0)\, \Omega(\bar{z}) D J_H, \tag{3.10}$$

$$\frac{J_H - \omega_P^{-1}(z) J_H \omega_P^{-1^*}(z)}{i(\bar{z}-z)} = - J_H D^* \Omega_P^*(\bar{z}) \begin{pmatrix} 0 \\ I_n \end{pmatrix} A_1^{-1} (0, I_n)\, \Omega_P(\bar{z}) D J_H. \tag{3.11}$$

Сравнивая (3.10) и (3.11) с ядрами неравенств (3.8) и (3.9), получаем, что эти неравенства факторизуются, т. е. (3.8) записывается в виде

$$(s(z), I) \frac{\omega^{-1}(z) J_H \omega^{-1*}(z)}{i(\bar{z}-z)} \begin{pmatrix} s^*(z) \\ I \end{pmatrix} \geqslant 0, \tag{3.12}$$

а (3.9) — в виде

$$-(z^{-1}s(z), I) \frac{\omega_P^{-1}(z) J_H \omega_P^{-1*}(z)}{i(\bar{z}-z)} \begin{pmatrix} \bar{z}^{-1}s^*(z) \\ I \end{pmatrix} \geqslant 0. \tag{3.13}$$

Вследствие связи (1.11) между $\omega(z)$ и $\omega_P(z)$ система (3.12), (3.13) эквивалентна системе

$$(s(z), I) \frac{\omega^{-1}(z) J_H \omega^{-1*}(z)}{i(\bar{z}-z)} \begin{pmatrix} s^*(z) \\ I \end{pmatrix} \geqslant 0; \tag{3.14}$$

$$-(s(z), I) \frac{\omega^{-1}(z) P^{-1}(z) J_H P^{-1*}(z) \omega^{-1*}(z)}{i(\bar{z}-z)} \begin{pmatrix} s^*(z) \\ I \end{pmatrix} \geqslant 0. \tag{3.15}$$

Таким образом, система матричных неравенств (3.2), (3.3) эквивалентна системе (3.14), (3.15).

Определим теперь пару матриц-функций $(p(z), q(z))$, полагая

$$(p(z), q(z)) = (s(z), I)\, \omega^{-1}(z). \tag{3.16}$$

Очевидно, что эта пара мероморфна в комплексной плоскости с разрезом по полуоси $(-\infty, 0]$.

Невырожденность пары вытекает из неравенства

$$(p(z), q(z)) \begin{pmatrix} p^*(z) \\ q^*(z) \end{pmatrix} = (s(z), I)\, \omega^{-1}(z)\, \omega^{-1^*}(z) \begin{pmatrix} s^*(z) \\ I \end{pmatrix} > 0, \tag{3.17}$$

которое справедливо всюду в комплексной плоскости с разрезом по полуоси $(-\infty, 0]$ за исключением некоторого множества изолированных точек.

Далее имеют место неравенства

$$(p(z), q(z)) \frac{J_H}{i(\bar{z}-z)} \begin{pmatrix} p^*(z) \\ q^*(z) \end{pmatrix} = (s(z), I) \frac{\omega^{-1}(z) J_H \omega^{-1*}(z)}{i(\bar{z}-z)} \begin{pmatrix} s^*(z) \\ I \end{pmatrix} \geqslant 0; \tag{3.18}$$

$$(-z^{-1}p(z), q(z)) \frac{J_H}{i(\bar{z}-z)} \begin{pmatrix} -\bar{z}^{-1}p^*(z) \\ q^*(z) \end{pmatrix} = -(s(z), I) \times$$

$$\times \frac{\omega^{-1}(z) P^{-1}(z) J_H P^{-1*}(z) \omega^{-1*}(z)}{i(\bar{z}-z)} \begin{pmatrix} s^*(z) \\ I \end{pmatrix} \geqslant 0. \tag{3.19}$$

Неравенства (3.17) — (3.19) означают, что определенная равенством (3.16) пара матриц-функций $(p(z), q(z))$ является стилтьесовской, при этом

$$(s(z), I) = (p(z), q(z))\, \omega(z). \tag{3.20}$$

Введем обозначение

$$\omega(z) = \begin{pmatrix} \alpha(z) & \beta(z) \\ \gamma(z) & \delta(z) \end{pmatrix}.$$

Тогда (3.20) примет вид $(s(z), I) = (p(z)\alpha(z) + q(z)\gamma(z),\ p(z)\beta(z) + q(z)\delta(z))$, или $s(z) = (p(z)\beta(z) + q(z)\delta(z))^{-1}(p(z)\alpha(z) + q(z)\gamma(z))$.

Таким образом доказано, что всякое решение системы матричных неравенств (3.2), (3.3) представляется в виде дробно-линейного преобразования (3.6) с некоторой стилтьесовской парой $(p(z), q(z))$. Тем самым доказано утверждение 1 теоремы 3.5.

2. Пусть теперь $(p(z), q(z))$ произвольная стилтьесовская пара. Введем в рассмотрение пару

$$(u(z), v(z)) = (p(z), q(z))\, \omega(z). \tag{3.21}$$

Имеют место следующие неравенства:

$$(u(z), v(z))\, \frac{\omega^{-1}(z)\, J_H \omega^{-1*}(z)}{i(\bar{z} - z)} \begin{pmatrix} u^*(z) \\ v^*(z) \end{pmatrix} \geqslant 0; \tag{3.22}$$

$$-(u(z), v(z))\, \frac{\omega^{-1}(z)\, P^{-1}(z)\, J_H P^{-1*}(z)\, \omega^{-1*}(z)}{i(\bar{z} - z)} \begin{pmatrix} u^*(z) \\ v^*(z) \end{pmatrix} \geqslant 0. \tag{3.23}$$

Неравенства (3.22), (3.23) являются очевидным следствием равенства (3.21) и того факта, что $(p(z), q(z))$ — стилтьесовская пара.

Покажем, что матрица-функция $v(z)$ обратима во всех точках комплексной плоскости с разрезом по лучу $(-\infty, 0]$. Для этого достаточно убедиться в том, что существует хотя бы одна точка z, в которой $v(z)$ обратима. Мы покажем, что такие точки существуют в верхней и в нижней полуплоскостях.

Действительно, пусть точка z и вектор-строка $e \neq 0$ длины m таковы, что $ev(z) = 0$. Тогда из (3.25) вытекает неравенство

$$(eu(z), 0)\, \frac{-J_H + \omega^{-1}(z)\, J_H \omega^{-1*}}{i(\bar{z} - z)} \begin{pmatrix} u^*(z)\, e^* \\ 0 \end{pmatrix} \geqslant 0.$$

Последнее неравенство можно переписать в виде

$$(eu(z), 0)\, \frac{-J_H + \omega^{-1}(z)\, J_H \omega^{-1*}(z)}{i(\bar{z} - z)} \begin{pmatrix} u^*(z)\, e^* \\ 0 \end{pmatrix} +$$
$$+ (eu(z), 0)\, \frac{J_H}{i(\bar{z} - z)} \begin{pmatrix} u^*(z)\, e^* \\ 0 \end{pmatrix} \geqslant 0.$$

Или, учитывая равенство нулю второго слагаемого, преобразовав ядро первого слагаемого по формуле (3.13), получим

$$-(eu(z), 0)\frac{D^*\Omega^*(z)\begin{pmatrix} I_n \\ 0 \end{pmatrix} A_0^{-1}(I_n, 0)\,\Omega(z)\,D}{i(\bar{z}-z)}\begin{pmatrix} u^*(z)\,e^* \\ 0 \end{pmatrix} \geqslant 0.$$

Но ядро последнего неравенства строго положительно для всех точек z, кроме узлов интерполяции и сопряженных им точек. Следовательно, $eu(z) = 0$, $z \neq z_j$, $z \neq \bar{z}j$, $(1 \leqslant j \leqslant n)$. Отсюда $e(p(z), q(z)) = e(u(z), v(z))\,\omega^{-1}(z) = (0, 0)$.

Последнее равенство, в силу невырожденности пары $(p(z), q(z))$ может иметь место лишь для множества изолированных точек. Следовательно, всюду вне этого исключительного множества точек матрица-функция $v^{-1}(z)$ существует.

Таким образом, имеет смысл матрица-функция $s(z) = v^{-1}(z)\,u(z)$, и эта матрица-функция мероморфна в комплексной плоскости с исключенной полуосью $(-\infty, 0]$.

Из (3.22), (3.23) непосредственно вытекает, что $s(z)$ удовлетворяет системе матричных неравенств (3.14), (3.15), которая эквивалентна системе (3.2), (3.3). Матрица-функция $s(z)$ таким образом удовлетворяет неравенству (3.2) и является мероморфной. Отсюда следует, что все ее особенности устранимы. Но тогда мы вправе считать, что $s(z)$ является голоморфной матрицей-функцией, удовлетворяющей системе матричных неравенств (3.2), (3.3). Таким образом, $s(z)$ является решением интерполяционной задачи (I) в классе $\boldsymbol{S}$.

Из равенства (3.21) вытекает $s(z) = (p(z)\,\beta(z) + q(z)\,\delta(z))^{-1} \times \times (p(z)\,\alpha(z) + q(z)\,\gamma(z))$, что и доказывает утверждение 2 теоремы 3.5.

3. Тот факт, что дробно-линейное преобразование (3.6), примененное к эквивалентным парам $(p(z), q(z))$ и $(p_1(z), q_1(z))$, приводит к одной и той же матрице-функции $s(z)$, очевиден.

Докажем обратное утверждение. Пусть стилтьесовские пары $(p(z), q(z))$ и $(p_1(z), q_1(z))$ в результате дробно-линейного преобразования (3.6) приводят к одной и той же матрице-функции $s(z)$.

Введем в рассмотрение пары

$$(u(z), v(z)) = (p(z), q(z))\,\omega(z); \quad (u_1(z), v_1(z)) = (p_1(z), q_1(z))\,\omega(z). \tag{3.24}$$

Как уже отмечалось, $v(z)$ и $v_1(z)$ являются обратными вне некоторых изолированных множеств матрицами-функциями. Поэтому равенства (3.24) можно записать в виде

$$(v^{-1}(z)\,u(z), I)\,\omega^{-1}(z) = (v^{-1}(z)\,p(z), v^{-1}(z)\,q(z)); \tag{3.25}$$

$$(v_1^{-1}(z)\,u_1(z), I)\,\omega^{-1}(z) = (v_1^{-1}(z)\,p_1(z), v_1^{-1}(z)\,q_1(z)). \tag{3.26}$$

В силу условия теоремы имеем $v^{-1}(z)\,u(z) = s(z)$; $v_1^{-1}(z)\,u_1(z) = s(z)$. Тогда из (3.25) и (3.26) вытекает равенство $(v^{-1}(z)\,p(z), v^{-1}(z)\,q(z)) = (v_1^{-1}(z)\,p_1(z), v_1^{-1}(z)\,q_1(z))$, откуда

$$p(z) = v(z)\,v_1^{-1}(z)\,p_1(z); \quad q(z) = v(z)\,v_1^{-1}(z)\,q_1(z). \tag{3.27}$$

Так как матрица-функция $v(z)\,v_1^{-1}(z)$ является мероморфной, то (3.27) означает, что пары $(p(z), q(z))$ и $(p_1(z), q_1(z))$ эквивалентны. Доказав теорему 3.5, мы также доказали, что во вполне неопределенном случае ($A_0 > 0$, $A_1 > 0$) интерполяционная задача (I) в классе $\boldsymbol{S}$ разрешима (вследствие непустоты множества стилтьесовских пар: в него входят, например, все пары вида (P, I), где $P \geqslant 0$ — постоянная матрица).

Далее, так как любые интерполяционные данные $s_1, \ldots, s_n$ можно сколь угодно точно аппроксимировать интерполяционными данными, создающими вполне неопределенную ситуацию, то из нормальности семейства соответствующих интерполирующих аналитических функций вытекает

Теорема 3.6. *Условие*

$$A = \begin{pmatrix} A_0 & 0 \\ 0 & A_1 \end{pmatrix} \geqslant 0,$$

где A_0, A_1 определены в (1.1), (1.2), необходимо и достаточно для разрешимости интерполяционной задачи (I) *в классе* $\boldsymbol{S}$.

Определение 3.4. *Матрица дробно-линейного преобразования, дающего описание всех решений интерполяционной задачи, называется резольвентной матрицей этой задачи.*

Формула (3.7), таким образом, дает явное выражение резольвентной матрицы для интерполяционной задачи в классе $\boldsymbol{S}$.

Замечание 1. Формула (3.6) дает описание всех решений интерполяционной задачи (I) в классе $\boldsymbol{S}$. Свободным параметром здесь является произвольный класс эквивалентности стилтьесовских пар. В скалярном случае формула (3.6) может быть записана в виде $s(z) = (t(z)\,\beta(z) + \delta(z))^{-1}(t(z)\,\alpha(z) + \gamma(z))$, так как любая стилтьесовская пара в этом случае эквивалентна «канонической» паре $(t(z), I)$, где $t(z)$ пробегает класс Стилтьеса, пополненный «несобственным» элементом $t(z) \equiv \infty$. Однако в матричном случае такая трактовка несобственных элементов затруднительна.

Замечание 2. Простейшим представителем интерполяционных задач является так называемая задача Неванлинны — Пика — интерполяционная задача (I) в классе $\boldsymbol{N}$. Критерием разрешимости задачи Неванлинны — Пика является неотрицательность матрицы A_0. Во вполне неопределенном случае $A_0 > 0$ множество всех решений может быть описано посредством дробно-линейного преобразования, резольвентная матрица которого построена в [1] (подробное изложение см. в [2]).

Разумеется, если разрешима интерполяционная задача (I) в классе $\boldsymbol{S}$, то она и подавно разрешима в классе $\boldsymbol{N}$, и если вполне неопределенная ситуация имеет место в классе $\boldsymbol{S}$, то она имеет место и в классе $\boldsymbol{N}$. В классе $\boldsymbol{N}$ множество всех решений интерполяционной задачи (I) в случае $A_0 > 0$, $A_1 > 0$ описывается дробно-линейным преобразованием с той же резольвентной матрицей $\omega(z)$ (3.7), что и в классе $\boldsymbol{S}$, только пара $(p(z), q(z))$ пробегает теперь множество всех неванлинновских пар. Одна и та же резольвентная матрица обслуживает обе эти интерполяционные задачи.

Замечание 3. Критерий разрешимости $A_0 \geqslant 0$, $A_1 \geqslant 0$ интерполяционной задачи в классе S не нов: для скалярного случая его получили М. Г. Крейн и А. А. Нудельман [4]. Однако описание всех решений для $A_0 > 0$, $A_1 > 0$, даже для скалярного варианта, насколько нам известно, ранее не было выполнено.

Список литературы: **1.** *Ковалишина И. В., Потапов В. П.* Индефинитная метрика в проблеме Неванлинны—Пика.— Докл. АН Арм. ССР, 1974, **LIX**, № 1, с. 17—22. **2.** *Ковалишина И. В.* Аналитическая теория одного класса интерполяционных задач.— Изв. АН СССР. Сер. Мат., 1980, **273**, № 13, с. 73—138. **3.** *Ефимова А. В., Потапов В. П.* J-растягивающие матрицы-функции и их роль в аналитической теории электрических цепей.— Усп. мат. наук, 1973, **XXVIII**, вып. I (169), с. 65—130. **4.** *Крейн М. Г., Нудельман А. А.* Проблема моментов Маркова и экстремальные задачи.— М.: Наука, 1973.— 551 с.

Поступила 18 января 1980 г.