УДК 517.4 *И. Д. ЧУЕШОВ*

О СУЩЕСТВЕННЫХ ОБЛАСТЯХ ОПРЕДЕЛЕНИЯ ОПЕРАТОРА ШРЕДИНГЕРА С ВЫСОКОСИНГУЛЯРНЫМ ПОТЕНЦИАЛОМ ПАРНОГО ВЗАИМОДЕЙСТВИЯ

Рассматривается N-частичный оператор Шредингера, задаваемый дифференциальной операцией

$$H = -\Delta_{N\nu} + \sum_{r=1}^{N} v_r(x_r) + \sum_{k<l} v_{kl}(x_k - x_l), \tag{1}$$

где Δ_d — оператор Лапласа в $L^2(R^d)$; $v_r(x)$, $v_{kl}(x)$ — некоторые измеримые вещественные функции на R^ν, $v_{kl}(-x) = v_{kl}(x)$. При некоторых предположениях относительно множества сингулярностей потенциалов мы показываем, что сужение операции (1) на пространство финитных бесконечно дифференцируемых функций, обращающихся в нуль в окрестности сингулярностей потенциалов определяет единственным образом некоторый самосопряженный оператор. Это означает, что указанное пространство является существенной областью определения оператора, задаваемого операцией (1).

В разделе 2 предполагается, что каждый из потенциалов v лежит в $L^2_{\text{loc}}(R^\nu \setminus S)$, где $\nu \geqslant 4$, а S — некоторое достаточно «тонкое» множество (см. данные ниже определения), что потенциалы ограничены снизу некоторой отрицательной не слишком сингулярной функцией. Никаких других условий на потенциалы не накладывается. Основным результатом этого раздела является доказательство существенной самосопряженности оператора (1) на $C_0^\infty(R^{N\nu} \setminus S_N)$, где

$$S_N = \{x = (x_1, \ldots, x_N) : (\exists i, x_i \in S_i) \vee (\exists (k, l), x_k - x_l \in S_{kl})\}, \tag{2}$$

S_i, S_{kl} — множества сингулярностей потенциалов $v_i(x)$ и $v_{kl}(x)$, $1 \leqslant i \leqslant N$, $1 \leqslant k < l \leqslant N$. Этот результат при $N = 1$ усиливает ряд известных теорем Като, Саймона и других авторов [1], а в многочастичном случае обобщает результаты, полученные в [2, 3],

В разделе 3 предполагается, что потенциалы v лежат в $L^1_{\mathrm{loc}}(R^\nu \setminus S)$, $\nu \geqslant 2$. Оператор H в этом случае определяется как форм-сумма. Мы доказываем, что $C_0^\infty(R^{N\nu} \setminus S_N)$ является существенной областью определения полуторалинейной формы h, отвечающей операции (1), т. е. замыкание полуторалинейной формы, определяемой на $C_0^\infty(R^{N\nu} \setminus S_N)$ выражением (1) совпадает с формой h. В частности, это означает, что в том случае, когда потенциалы лежат в $L^2_{\mathrm{loc}}(R^\nu \setminus S)$ форм-сумма совпадает с расширением по Фридрихсу оператора (1) с областью определения $C_0^\infty(R^{N\nu} \setminus S_N)$. Теоремы этого раздела обобщают некоторые утверждения, доказанные в [2—4].

В заключительнном разделе, опираясь на результаты разделов 2, 3, установим ряд утверждений, относящихся к вопросу о регуляризации оператора Шредингера с высокосингулярным потенциалом. Рассмотрена также задача о возмущении оператора Шредингера потенциалами с малым носителем.

1. Некоторые предварительные сведения

Для характеристики малости множества сингулярностей используем следующее понятие нулевой M^k-емкости ($k = 1, 2$). Пусть S — компакт в R^ν. Будем говорить, что S имеет M^k-емкость нуль (k либо 1, либо 2), если существует последовательность функций $\varphi_n(x) \in C_0^\infty(R^\nu)$ такая, что а) $0 \leqslant \varphi_n(x) \leqslant 1$; б) $\varphi_n(x) = 1$ в некоторой окрестности множества S; в) $\lim\limits_{n\to\infty} \times$ $\times \|(-\Delta_\nu + 1)^{k/2}\varphi_n\|_{L^2} = 0$. Понятие M^k-емкости обсуждалось и эффективно использовалось различными авторами [5—7], Можно показать, что любое компактное множество, лежащее на гладком многообразии коразмерности не менее $2k$ имеет нулевую M^k-емкость (k — либо 1, либо 2). В частности, M^k-емкость одноточечного множества в R^ν равна нулю, если $\{k = 1, \nu \geqslant 2\}$ или $\{k = 2, \nu \geqslant 4\}$. Кроме того, объединение конечного числа множеств нулевой M^k-емкости имеет M^k-емкость нуль. В дальнейшем нам понадобится также следующая

Теорема 1.1. *Пусть S-компакт M^k-емкости нуль (k — либо 1, либо 2) и последовательность $\{\varphi_n\}$ из $C_0^\infty(R^\nu)$ обладает приведенными выше свойствами а—в). Рассмотрим последовательность функций из $C^\infty(R^{N\nu})$*

$$\varphi_n^N(x) = \prod_{k<l} (1 - \varphi_n(x_k - x_l) \prod_{r=1}^{N} (1 - \varphi_n(x_r)). \tag{1.1}$$

Тогда для любой функции $f \in C_0^\infty(R^{N\nu})$

$$\|(-\Delta_{N\nu} + 1)^{k/2} [(1 - \varphi_n^N) f]\|_{L^2} \to 0, \quad n \to \infty. \tag{1.2}$$

Замечание 1.2. Из доказательства будет видно, что при $k=1$ это утверждение справедливо для любой ограниченной финитной функции, лежащей в соболевском пространстве $W_2^1(R^{N\nu})$.

Доказательство. Рассуждения проведем для $k=2$, случай $k=1$ аналогичен. Очевидны следующие неравенства:

$$0 \leqslant 1-\varphi_n^N(x) \leqslant \sum \varphi_n(x_k-x_l)+\sum \varphi_n(x_r);$$

$$\left|\frac{\partial}{\partial x_{k,\,i}}(1-\varphi_n^N(x))\right| \leqslant \sum\left|\frac{\partial}{\partial x_{k,\,i}}\varphi_n(x_k-x_l)\right|+\left|\frac{\partial}{\partial x_{k,\,i}}\varphi_n(x_k)\right|;$$

$$\left|\frac{\partial^2}{\partial x_{k,\,i}^2}(1-\varphi_n^N(x))\right| \leqslant \sum\left|\frac{\partial^2}{\partial x_{k,\,i}}\varphi_n(x_k-x_l)\right|+\left|\frac{\partial^2}{\partial x_{k,\,i}^2}\varphi_n(x_k)\right|+$$

$$+\sum\frac{\partial}{\partial x_{k,\,i}}\varphi_n(x_k-x_l)\frac{\partial}{\partial x_{k,\,i}}\varphi_n(x_k-x_m)\Bigg|+\sum\left|\frac{\partial}{\partial x_{k,\,i}}\varphi_n\times\right.$$

$$\left.\times(x_k-x_l)\frac{\partial}{\partial x_{k,\,i}}\varphi_n(x_k)\right|,$$

где $x=(x_1,\ \ldots,\ x_N)$, $x_k=(x_{k,\,1},\ \ldots,\ x_{k,\,\nu})$, а все суммы вычисляются по некоторому конечному множеству индексов. Но каждая из функций $\varphi_n(x)$, $\frac{\partial}{\partial x_i}\varphi_n(x)$, $\frac{\partial^2}{\partial x_i^2}\varphi_n(x)$ стремится к нулю в $L^2(R^\nu)$ при $n\to\infty$. Поэтому для того чтобы проверить соотношение (1.2), достаточно доказать для любой функции $f(x)\in C_0^\infty\times(R^{N\nu})$ и последовательностей $\{\psi_n^i(x)\}_{n=1}^\infty$, $i=0,\ 1,\ 2$ из $L^2(R^\nu)$ таких, что $\|\psi_n^i\|_{L^2}\to 0$ при $n\to\infty$ следующие интегралы: $I_n^1=$ $=\int_{R^{N\nu}}\left|\psi_n^0(x_k-x_l)f(x)\right|^2dx$, $I_n^2=\int_{R^{N\nu}}\left|\psi_n^0(x_r)f(x)\right|^2dx$; $I_n^3=$ $=\int_{R^{N\nu}}\left|\psi_n^1(x_k-x_l)\psi_n^2(x_k-x_m)f(x)\right|^2dx$; $I_n^4=\int_{R^{N\nu}}\left|\psi_n^1(x_k-\right.$ $\left.-x_l)\psi_n^2(x_k)f(x)\right|^2dx$ стремятся к нулю. Провер[им], например, что $I_n^3\to 0$ при $n\to\infty$ (остальные интегралы оцениваются аналогично). Пусть ради простоты $k=1$, $l=2$, $m=3$. Сделаем замену переменных $x_1\to\eta=x_1-x_3$, $x_2\to\tau=x_1-x_2$, остальные переменные — без изменений. Интеграл I_n^3 перепишем в виде $I_n^3=\int_{R^{N\nu}}|\psi_n^1(\tau)|^2\times$ $\times|\psi_n^2(\eta)|^2|f(x_3+\eta,\ x_3+\eta-\tau,\ x_3,\ \ldots)|^2\,d\tau d\eta dx_3\ldots dx_N$.

Поэтому $I_n^3\leqslant\|\psi_n^1\|_{L^2}^2\cdot\|\psi_n^2\|_{L^2}^2\cdot\int_{R^{(N-2)\nu}}\max\limits_{x_1,\ x_2}|f(x_1,x_2,\ldots,x_N)|^2\times$ $\times dx_3\ldots dx_N$. Отсюда вытекает, что $I_n^3\to 0$ при $n\to\infty$.

2. Существенная самосопряженность оператора Шредингера на $C_0^\infty(R^{N\nu}\diagdown S_N)$, $\nu\geqslant 4$.

Основным результатом этого раздела является

Теорема 2.1. *Пусть* $v_{kl}(x)=v_{kl}(-x)$ *и* $v_r(x)$ $(1\leqslant k<l\leqslant N,$ $1\leqslant r\leqslant N)$ *функции из* $L_{\text{loc}}^2(R^\nu\diagdown S_{kl})$ *и* $L_{\text{loc}}^2(R^\nu\diagdown S_r)$ *соответст-*

венно, где S_{kl} *и* S_r *— компактные множества* M^2*-емкости нуль. Предположим, что на* S_{kl} *и* S_r *заданы единичные меры* μ^{kl} *и* μ^r $(1\leqslant k<l\leqslant N,\ 1\leqslant r\leqslant N)$ *такие, что* $v_{kl}(x)\geqslant -\frac{1}{4}\nu(\nu-4)\times\beta_N q_0(\mu^{kl};\ x)$ *почти всюду на* $R^\nu\setminus S_{kl}$; $v_r(x)\geqslant -\frac{1}{4}\nu(\nu-4)\times\beta_N q_0(\mu^r;\ x)$ *почти всюду на* $R^\nu\setminus S_{kl}$, *где* $q_0(\mu;\ x)=\int|x-y|^{-2}\,d\mu(y)$, $\beta_N=1$ *при* $N=1$ *и* β_N *— любое число меньшее, чем* $\frac{2}{\sqrt{N}(N+1)}$ *при* $N\geqslant 2$. *Тогда оператор*

$$-\Delta_{N\nu}+\sum_{r=1}^{N}v_r(x_r)+\sum_{k<l}v_{kl}(x_k-x_l)\tag{2.1}$$

существенно самосопряжен на $C_0^\infty(R^{N\nu}\setminus S_N)$, где S_N *задается формулой (2).*

Не нарушая общности можем считать, что все множества S_{kl} и S_r $(1\leqslant k<l\leqslant N,\ 1\leqslant r\leqslant N)$ совпадают между собой. В противном случае следует ввести $S=(\bigcup\limits_{k<l}S_{kl})\bigcup(\bigcup\limits_{r=1}^{N}S_r)$ и рассматривать его в качестве сингулярного множества каждого из потенциалов v_{kl} и v_r. Очевидно, что S — компакт и имеет нулевую M^2-емкость. Точно также можно предполагать, что $S=-S$. Кроме того, в дальнейшем будем символом U_N обозначать оператор умножения на функцию

$$U_N(x)=\sum_{r=1}^{N}v_r(x_r)+\sum_{k<l}v_{kl}(x_k-x_l)\tag{2.2}$$

Предварительно докажем более слабый вариант теоремы 2.1.

Теорема 2.2. *Пусть потенциалы* $v_{kl}(x)$ *и* $v_r(x)$ *почти всюду в* R^ν *неотрицательны и удовлетворяют условиям теоремы 2.1. Тогда оператор (2.1) существенно самосопряжен на* $C_0^\infty\times(R^{N\nu}\setminus S_N)$.

Доказательство этой теоремы опирается на следующую лемму, являющуюся модификацией неравенства Т. Като (см., например [1]).

Лемма 2.3. *Пусть* $u\in L^2(R^{N\nu})$, $\Delta u\in L^1_{\mathrm{loc}}(R^{\nu N}\setminus S_N)$. *Тогда в смысле обобщенных функций из* $D'(R^{N\nu})$ *имеет место неравенство*

$$\varphi_n^N\Delta u\geqslant \operatorname{Re}[(\operatorname{sgn}u)\,\varphi_n^N\Delta u]\tag{2.3}$$

где $\operatorname{sgn}u=\bar{u}/|u|$, *если* $u\neq 0$, $\operatorname{sgn}u=0$, *если* $u=0$, *а* $\{\varphi_n^N\}$ *— последовательность функций, построенная в теореме 1.1 по сингулярному множеству* S.

Доказательство. Не составляет особого труда проверить, что в условиях леммы $\nabla u\in L^1_{\mathrm{loc}}(R^{N\nu}\setminus S_N)$. Пусть $0\leqslant\tilde{\varphi}_n^N\leqslant 1$

функция из $C^{\infty}(R^{N\nu})$, построенная по формуле (1.1), равная нулю в некоторой окрестности S_N и такая, что $\tilde{\varphi}_n^N(x)=1$ при $x\in\in\operatorname{supp}\varphi_n^N$. Существование такой функции $\tilde{\varphi}_n^N$ вытекает из того, что найдется функция $\tilde{\varphi}_n(x)\in C_0^\infty(R^\nu)$, равная 1, в некоторой окрестности множества S и обращающаяся в нуль на дополнении к множеству $\{x:\varphi_n(x)=1\}$. Очевидно, что $\tilde{\varphi}_n^N(x)\,u(x)\in L^2(R^{N\nu})$ и $\Delta(\tilde{\varphi}_n^N(x)\,u(x))\in L^1_{\mathrm{loc}}(R^{N\nu})$. Поэтому, используя неравенство Като [1], имеем $\Delta(\tilde{\varphi}_n^N u)\geqslant\operatorname{Re}[(\operatorname{sgn}u\tilde{\varphi}_n^N)\,\Delta(\tilde{\varphi}_n^N u)]$. Умножая это равенство на $\varphi_n^N(x)$ и пользуясь тем, что $\varphi_n^N(x)\,\Delta(\tilde{\varphi}_n^N(x)\,v(x))=\varphi_n^N(x)\,\Delta v(x)$, $\varphi_n^N(x)\,\tilde{\varphi}_n^N(x)=\varphi_n^N(x)$ получаем неравенство (2.3).

Докажем теперь теорему 2.2. Доказательство аналогично рассуждениям, приведенным в [1] при доказательстве теоремы X.28. Предположим, что оператор (2.1) не является существенно самосопряженным на $C_0^\infty(R^{N\nu}\setminus S_N)$. Тогда существует $u\in L^2(R^{N\nu})$, такой, что $(-\Delta_{N\nu}+U_N+1)^*u=0$. Поэтому в смысле обобщенных функций на $D(R^{N\nu}\setminus S_N)$ получаем, что $(-\Delta_{N\nu}+U_N+1)\times\times u=0$. Следовательно, $\Delta u=(U_N+1)\,u$, а поэтому $\Delta u\in L^1_{\mathrm{loc}}\times\times(R^{N\nu}\setminus S_N)$.

Используя неравенство Като, получаем $\varphi_n^N\Delta|u|\geqslant\varphi_n^N(U_N++1)|u|\geqslant0$. Отсюда вытекает, что $\Delta|u|\geqslant0$. Действительно, пусть $\psi(x)\in D(R^{N\nu})$ и $\psi(x)\geqslant0$, тогда $0\leqslant(\varphi_n^N\Delta|u|,\ \psi)=(|u|,\ \Delta(\varphi_n^N\psi))$. Устремляя в этом равенстве $n\to\infty$ и пользуясь теоремой 1.1, получаем $(|u|,\ \Delta\psi)\geqslant0$. Поэтому $\Delta|u|\geqslant0$. Отсюда и вытекает, что $|u|\equiv0$ (детали см. в [1]). Это, в свою очередь, означает существенную самосопряженность оператора $-\Delta_{N\nu}++U_N$, в случае положительных потенциалов.

Отметим, что при $\nu=4$ теоремы 2.1 и 2.2 совпадают.

Для доказательства теоремы 2.1 при $\nu\geqslant5$ понадобится также следующее утверждение.

Теорема 2.4. *Пусть* $\nu\geqslant5$, $Q_N^0(x)=\sum\limits_{r=1}^{N}q_0(\mu^r;\ x^r)+\sum\limits_{k<l}q_0\times(\mu^{kl};\ x_k-x_l)\equiv Q^0_{N,1}+Q^0_{N,2}$, *потенциалы* $v_{kl}(x)$ *и* $v^r(x)$ *неположительны и удовлетворяют условиям теоремы 2.1. Тогда при некотором* $a>0$ *имеет место неравенство*

$$\|(U_N-aQ_N^0)\,u\|\leqslant\|(-\Delta_{N\nu}+aQ_N^0)\,u\| \tag{2.4}$$

для $u\in C_0^\infty(R^{N\nu}\setminus S_N)$.

Для доказательства этой теоремы используем следующее неравенство.

Лемма 2.5. *Пусть* $Q_N^1=\sum\limits_{r=1}^{N}q_1(\mu^r;\ x_r)+\sum\limits_{k<l}q_1(\mu^{kl},\ x_k-x_l)\equiv\equiv Q^1_{N,1}+Q^1_{N,2}$, *где* $q_1(\mu^r;x_r)=\int\limits_S|x_r-y|^{-4}\,d\mu^r(y)$, $q_1(\mu^{kl};\ x_k-$

$- x_l)$ — *определяется аналогично. Тогда для любого* $S \in \left[-\frac{1}{4}\nu \times \right.$ $\times (\nu - 4), \infty)$ и $u(x) \in C_0^\infty(R^{N\nu} \setminus S_N)$ *имеет место неравенство*

$$\frac{N+1}{2} \int_{R^{N\nu}} |\Delta u|^2 dx \geqslant -s \int_{R^{N\nu}} |\nabla u|^2 Q_N^0(x)\, dx + \frac{(\nu-4)^2}{16}(\nu^2 + 4s) \times$$

$$\times \int_{R^{N\nu}} |u|^2 Q_N^1(x)\, dx. \tag{2.5}$$

Доказательство. Для $u \in C_0^\infty(R^\nu \setminus \{0\}$ и $s \in \left[-\frac{1}{4}\nu(\nu-4), \infty\right)$ справедливо неравенство Реллиха (см., например, [8]): $\int_{R^\nu} |\Delta u|^2 dx \geqslant -s \int_{R^\nu} \frac{|\nabla u|^2}{|x|^2} dx + \frac{(\nu-4)^2}{16}(\nu^2 + 4s) \int_{R^\nu} \frac{|u|^2}{|x|^4} dx$. Поэтому, если $u \in C_0^\infty(R^{N\nu} \setminus S_N)$, $y \in S$, то

$$\int_{R^\nu} |\Delta_{x_i} u|^2 dx_i \geqslant -s \int_{R^\nu} \frac{|\nabla_{x_i} u|^2 dx_i}{|x_i - x_j - y|^2} + \frac{(\nu-4)^2}{16}(\nu^2 + 4s) \times$$

$$\times \int_{R^\nu} \frac{|u|^2 dx_i}{|x_i - x_j - y|^4} \tag{2.6}$$

для всех $i \neq j$. Будем считать, что $\mu^{ij} = \mu^{ji}$ при $i > j$. Так как $|\nabla_{x_i} u| \leqslant |\nabla u|$, то интегрируя (2.6) по мере $d\mu^{ij}(y)$ для всех $i \neq j$, получаем $\int_{R^\nu} |\Delta_{x_i} u|^2 dx_i \geqslant -s \int_{R^\nu} |\nabla u|^2 q_0(\mu^{ij};\ x_i - x_j)\, dx_i + \frac{(\nu-4)^2}{16}(\nu^2 + 4s) \int_{R^\nu} |u|^2 q_1(\mu^{ij},\ x_i - x_j)\, dx_i$. Интегрируя по оставшимся переменным и суммируя по множеству $\{(i, j) : i \neq j\}$, нетрудно обнаружить, что $\frac{N-1}{2} \int_{R^{N\nu}} |\Delta u|^2 dx \geqslant -s \int_{R^{N\nu}} |\nabla u|^2 Q_{N,2}^0 \times (x)\, dx + \frac{(\nu-4)^2}{16}(\nu^2 + 4s) \int_{R^{N\nu}} |u|^2 Q_{N,2}^1(x)\, dx$. Точно так же можно показать, что $\int_{R^{N\nu}} |\Delta u|^2 dx \geqslant -s \int_{R^{N\nu}} |\nabla u|^2 Q_{N,1}^0(x)\, dx + \frac{(\nu-4)^2}{16} \times (\nu^2 + 4s) \int_{R^{N\nu}} |u|^2 Q_{N,1}^1(x)\, dx$. Складывая последние две оценки, получаем (2.5).

Доказательство теоремы 2.4. Пользуясь равенством $\bar{u}\Delta u + u\Delta\bar{u} = \Delta(|u|^2) - 2|\nabla u|^2$ и формулой Грина для любого $a > 0$ получаем соотношение $D \equiv \|(-\Delta_{N\nu} + aQ_N^0)u\|^2 - \|(U_N - aQ_N^0)u\|^2 \geqslant \int\limits_{R^{N\nu}} |\Delta u|^2 dx + 2a \int\limits_{R^{N\nu}} Q_N^0(x)|\nabla u|^2 dx + \int\limits_{R^{N\nu}} [a^2 Q_N^{02} - a\Delta Q_N^0 - (U_N - aQ_N^0)^2|u|^2 dx$. Далее, нетрудно проверить, что $|U_N - aQ_N^0| \leqslant bQ_N^0(x)$, $[Q_N^0(x)]^2 \leqslant \frac{N(N+1)}{2} Q_N^1(x)$, где $b = a + \frac{1}{4}\nu(\nu-4)\beta_N > a$. А в силу равенства $\Delta|x|^{-2} = -2(\nu-4) \times |x|^{-4}$ имеем, что $-\Delta Q_N^0(x) \geqslant 2(\nu-4)Q_N^1(x)$. Следовательно, $D \geqslant \int |\Delta u|^2 dx + 2a\int Q_N^0(x)|\nabla u|^2 dx + \left[(a^2 - b^2)\frac{(N+1)N}{2} + 2a(\nu - 4)\right]\int Q_N^1(x)|u|^2 dx$. Применим лемму 2.5 при $s = a(N+1)$ и положим $a = \frac{1}{8}\nu(\nu-4)(\gamma_N - \beta_N)$, где γ_N — некоторая константа, $\gamma_N > \beta_N$. Нетрудно проверить, что в этом случае $D \geqslant k_{\nu, N}\int Q_N^1(x)|u(x)|^2 dx$, где

$$k_{\nu, N} = \nu^2\frac{(\nu-4)^2}{16}\left[\frac{2}{N+1} - \beta_N + \gamma_N\left(1 - \beta_N\frac{N(N+1)}{2}\right)\right]. \quad (2.7)$$

Докажем существование константы γ_N такой, что $\gamma_N > \beta_N$ и $k_{\nu, N} \geqslant 0$. При $N = 1$, $\beta_1 = 1$ получаем $k_{\nu, N} = 0$ для любого $\gamma_N > \beta_N$. Если же $N \geqslant 2$, то, полагая в (2.7) $\gamma_N = \frac{2}{\sqrt{N(N+1)}}$; $\beta_N = \alpha_N\gamma_N$, $0 \leqslant \alpha_N < 1$, нетрудно проверить, что $k_{\nu, N} \geqslant 0$ Таким образом, для всех $\nu \geqslant 5$ и $N \geqslant 1$ существует $a > 0$ такое что $D \geqslant 0$.

Теперь можем доказать теорему 2.1 и при $\nu \geqslant 5$.

Пусть $v^+(x) = \max(v, (x), 0)$, $v^-(x) = \min(v(x), 0)$. Тогда $U_N(x) = U_N^+(x) + U_N^-(x)$, где

$$U_N^{\pm}(x) = \sum_{r=1}^{N} v_r^{\pm}(x_r) + \sum_{k<l} v_{kl}^{\pm}(x_k - x_l). \quad (2.8)$$

Рассмотрим операторы $H_0 = -\Delta + aQ_N^0$; $W = U_N^- - aQ_N^0$; $H = -\Delta + aQ_N^0 + U_N^+$, где $a > 0$ — константа, фигурирующая в теореме 2.4. В силу теоремы 2.2 операторы H_0 и H существенно самосопряжены на $C_0^\infty \times (R^{N\nu} \setminus S_N)$, а теорема 2.4 утверждает, что $\|Wu\| \leqslant \|H_0 u\|$. Кроме того, пользуясь представлением Троттера для $\exp(-tH_0)$, можно доказать, что $\exp(-tH_0)$ сохраняет положительность. Поэтому в силу теоремы Дэвиса—Фари [1, гл. X] для $u \in C_0^\infty \times (R^{N\nu} \setminus S_N)$ имеем оценку $\|Wu\| \leqslant \|Hu\|$. А значит, в силу теоремы Вюста [1, гл. X], оператор $H + W = -\Delta_{N\nu} + U_N$ существенно самосопряжен на $C_0^\infty(R^{N\nu} \setminus S_N)$. Теорема 2.1 полностью доказана.

Отметим, что в случае одной частицы ($N=1$) полученный результат является усилением ряда известных утверждений о самосопряженности оператора Шредингера с высокосингулярным потенциалом [1]. В частности, из теоремы 2.1 и некоторых дополнительных рассмотрений можно извлечь следующее утверждение, обобщающее при $\nu \geqslant 4$ теорему Като и некоторых других авторов.

Следствие 2.6. Пусть $v(x) \in L^2_{\text{loc}}(R^\nu \setminus S)$, где $\nu \geqslant 4$, S — компакт нулевой M^2-емкости с единичной мерой $d\mu$ на нем, причем $v(x) \geqslant \frac{1}{4}\nu(\nu-4)\,q_0(\mu;\ x) - c|x|^2 - d$ для некоторых c и d. Тогда оператор $-\Delta_\nu + v(x)$ существенно самосопряжен на $C_0^\infty \times (R^\nu \setminus S)$.

Использование стандартной техники [1] позволяет так же получать утверждение о существенной самосопряженности другого типа. Например, в следствии 2.6 можно предполагать, что $v(x) \in L^2_{\text{loc}}(R^\nu \setminus S)$ и функция $v^-(x) = \min(v(x),\ 0)$ подчинена с верхней гранью меньшей 1 оператору Δ_ν, т. е. существуют $0 \leqslant a < 1$ и $b > 0$ такие, что $\| v^- u \| \leqslant a \| \Delta_\nu u \| + b \| u \|$ для любого $u \in C_0^\infty(R^\nu)$.

Некоторые другие следствия теоремы 2.1 будут приведены в разделе 4.

В заключение отметим, что в приведенных выше утверждениях предполагать множество S более «массивным» нельзя. Дело в том, что в силу следствия 2.6 оператор $-\Delta_\nu$ существенно самосопряжен на $C_0^\infty(R^\nu \setminus S)$. Но не трудно показать, что это может быть тогда и только тогда, когда S-множество нулевой M^2-емкости.

3. Оператор Шредингера как полуторалинейная форма.

В этом разделе мы предполагаем, что потенциалы неотрицательны и $v_{kl}(x) \in L^1_{\text{loc}}(R^\nu \setminus S_{kl})$; $v_r(x) \in L^1_{\text{loc}}(R^\nu \setminus S_r)$, $\nu \geqslant 2$, где S_{kl}, S_r — компактные множества M^1 — емкости нуль ($1 \leqslant k < l \leqslant N$, $1 \leqslant r \leqslant N$). Оператор Шредингера в этом случае следует определять в терминах полуторалинейных форм.

Пусть $h_0[\psi,\ \varphi]$ — полуторалинейная форма с областью определения $Q(h_0) = C_0^\infty(R^{N\nu})$, отвечающая оператору $-\Delta_{N\nu}$, а $u[\psi,\ \varphi]$ — форма с областью определения $Q(u) = C_0^\infty(R^{N\nu} \setminus S_N)$, задаваемая равенством

$$u[\psi,\ \varphi] = \int_{R^{N\nu}} U_N(x)\,\psi(x)\,\overline{\varphi(x)}\,dx, \tag{3.1}$$

где $U_N(x)$ — функция вида (2.2). Так как $-\Delta_{N\nu}$ симметричен, то [9] форма h_0 замыкаема. Нетрудно также проверить, что существует замыкание $\tilde{u}$ формы u и доказать, что

$$Q(\tilde{u}) = \{\psi \in L^2(R^{N\nu}) : \int_{R^{N\nu}} U_N(x) |\psi(x)|^2 dx < \infty\}. \qquad (3.2)$$

При этом $\tilde{u}[\psi, \varphi]$ задается формулой (3.1). Символом $\tilde{t}$ обозначим замыкание формы t.

Рассмотрим форму $h = \tilde{h}_0 + \tilde{u}$ с областью определения $Q(h) = Q(\tilde{h}_0) \cap Q(\tilde{u})$. Эта форма замкнута и положительна. Поэтому в силу теоремы о представлении [9] существует единственный самосопряженный оператор H такой, что $D(H) \subset Q(h)$ и $h[\psi, \varphi] = (H\psi, \varphi)$, $\psi \in D(H)$, $\varphi \in Q(h)$. Оператор H принято называть форм-суммой операторов $-\Delta_{N\nu}$ и U_N. В настоящем разделе изучаются некоторые свойства формы h и оператора H. Основным результатом является

Теорема 3.1. *Множество $C_0^\infty(R^{N\nu} \setminus S_N)$ — существенная область определения формы $h = \tilde{h}_0 + \tilde{u}$, т. е. замыкание сужения формы h на $C_0^\infty(R^{N\nu} \setminus S_N)$ совпадает с h.*

Прежде чем приступить к доказательству теоремы, укажем некоторые ее следствия. Рассмотрим на $Q(h_0) \cap Q(u) = C_0^\infty \times (R^{N\nu} \setminus S_N)$ форму $h_0 + u$. Так как формы h_0, u замыкаемы, то форма $h_0 + u$ является замыкаемой [9]. Кроме того, очевидно, что $(h_0 + u)^\sim \subseteq \tilde{h}_0 + \tilde{u}$. Поэтому из теоремы 3.1 вытекает

Следствие 3.2. $(h_0 + u)^\sim = \tilde{h}_0 = \tilde{u}$. Из этого утверждения и определения фридрихсова расширения полуограниченного симметрического оператора [9] нетрудно извлечь

Следствие 3.3. Пусть $v_{kl}(x) \in L^2_{\text{loc}}(R^\nu \setminus S_{kl})$, $v_r(x) \in L^2_{\text{loc}} \times (R^\nu \setminus S_r)$, $\nu \geqslant 2$, где S_{kl}, S_r — компактные множества нулевой M^1-емкости ($1 \leqslant k < l \leqslant N$, $1 \leqslant r \leqslant N$). Предположим также, что потенциалы $v_{kl}(x)$, $v_r(x)$ неотрицательны и U_N — оператор умножения на функцию, задаваемую формулой (2.2). Тогда расширение по Фридрихсу оператора $-\Delta_{N\nu} + U_N$ с областью определения $C_0^\infty(R^{N\nu} \setminus S_N)$ совпадает с форм-суммой операторов $-\Delta_{N\nu}$ и U_N.

Отметим, что это утверждение в одночастичном случае усиливает результаты, полученные в [3, 10], а в многочастичном — обобщает теоремы, доказанные в [2, 4].

Некоторые другие следствия теоремы 3.1 будут получены в разделе 4.

Докажем теорему 3.1. Для этого мы должны проверить, что $C_0^\infty(R^{N\nu} \setminus S_N)$ плотно в $Q(h) = Q(\tilde{h}_0) \cap Q(\tilde{u})$ по норме

$$|\psi|^2 = \tilde{h}_0[\psi, \psi] + \tilde{u}[\psi, \psi] + \|\psi\|^2. \qquad (3.3)$$

Напомним, что $Q(\tilde{h}_0)$ совпадает с соболевским пространством $W_2^1(R^{N\nu})$, а $Q(\tilde{u})$ задается формулой (3.2).

Так же как и при доказательстве теоремы 2.1, не нарушая общности, можно считать, что $S_{kl} = S_r = S$, где ($1 \leqslant k < l \leqslant N$, $1 \leqslant r \leqslant N$), S — компакт M^1-емкости нуль. Доказательство того, что $C_0^\infty(R^{N\nu} \setminus S_N)$ плотно в $Q(h)$ проведем в несколько этапов.

1. Каждую ограниченную финитную функцию ψ из $Q(h)$ можно аппроксимировать по норме (3.3) функциями из $C_0^\infty(R^{N\nu} \setminus S_N)$. Действительно, пусть $\varphi_n^N(x)$ функция, построенная в теореме 1.1. Тогда в силу теоремы 1.1 и замечания 1.2

$$\| (-\Delta_{N\nu} + 1)^{1/2} [(1 - \varphi_n^N)\psi] \| \to 0, \ n \to \infty. \tag{3.4}$$

Отсюда, в частности, вытекает, что $(1 - \varphi_{n_k}^N)\psi \to 0$ п. в. при $k \to \infty$, $\{n_k\}$ — некоторая последовательность. Поэтому, в силу теоремы Лебега

$$\tilde{u}[(1 - \varphi_{n_k}^N)\psi, \ \ (1 - \varphi_{n_k}^N)\psi] \to 0, \ \ k \to \infty. \tag{3.5}$$

Из (3.4), (3.5) вытекает, что по норме (3.3) $\varphi_{n_k}^N \psi \to \psi$. Очевидно, каждую функцию $\varphi_{n_k}^N(x)\psi(x)$ можно приблизить последовательностью функций из $C_0^\infty(R^{N\nu} \setminus S_N)$.

2. Пусть ψ — ограниченная функция из $Q(h)$, а функция $\chi(x)$ лежит в $C_0^\infty(R^{N\nu})$ и такова, что $\chi(x) = 1$ при $|x| \leqslant 1$, $\chi(x) = 0$, $|x| \geqslant 2$, $0 \leqslant \chi \leqslant 1$. Тогда последовательность $\{\chi(x/M)\psi(x)\}$ при $M \to \infty$ по норме (3.3) сходится к функции $\psi(x)$.

3. Каждую функцию $\psi \in Q(h)$ можно приблизить ограниченными. Действительно, пусть $\{\alpha_m(\tau)\}$ — последовательность из $C^\infty(R^1)$ такая, что а) $|\alpha_m(\tau)| \leqslant m$, $0 \leqslant \alpha_m'(\tau) \leqslant 1$; б) $\alpha_m(\tau) = \tau$ при $|\tau| \leqslant m - 1$; в) $\alpha_m(\tau) = m$ при $\tau \geqslant m + 1$, $\alpha_m(\tau) = -m$ при $\tau \leqslant -(m+1)$.

Очевидно, что $\psi_m(x) = \alpha_m(\psi(x))$ лежит в $Q(h)$ и является ограниченной. Покажем, что $\psi_m(x) \to \psi(x)$ при $m \Rightarrow \infty$ по норме (3.3). Так как $\frac{\partial}{\partial x_{k,i}} \psi_m(x) = \alpha_m'(\psi) \frac{\partial}{\partial x_{k,i}} \psi(x)$ п. в., то $\psi_m(x) \to \psi(x)$ в $W_2^1(R^{N\nu})$ при $m \to \infty$. А в силу того, что $\psi_m(x) \to \psi(x)$ п. в. и $|\psi_m(x)| \leqslant |\psi(x)|$ получаем, что $\tilde{u}[\psi_m - \psi, \ \psi_m - \psi] \to 0$ при $m \to \infty$. Следовательно, $\psi_m(x) \to \psi(x)$ по норме (3.3). Теорема 3.1 полностью доказана.

Замечание 3.4. Теорема 3.1 остается справедливой в том случае, когда потенциалы $v_r(x)$, $v_{kl}(x)$ могут принимать отрицательные значения. Для этого нужно потребовать, чтобы оператор U_N^- умножения на функцию $U_N^-(x)$, задаваемую формулой (2.8), на $C_0^\infty(R^{N\nu})$ обладал свойством $-\alpha\Delta_{N\nu} + U_N^- + \beta \geqslant 0$ для некоторых $0 < \alpha < 1$ и $\beta \geqslant 0$. По поводу того, какие условия для этого нужно наложить на потенциалы см. [1].

Отметим также, что наши результаты справедливы в том случае, когда $\Delta_{N\nu}$ рассматривается в $L^2(\Omega)$, с нулевыми граничными условиями на границе $\partial\Omega$ ограниченной области Ω при услови что область Ω имеет кусочногладкую границу. В этом случае, как и в [4] можно показать, что форм-сумма H имеет дискретный спектр и установить аналоги некоторых других утверждений, содержащихся в [4].

4. Применение полученных результатов, свойства регуляризаций оператора Шредингера с высокосингулярным потенциалом

Рассмотрим на $C_0^\infty(R^{N\nu}\setminus S_N)$ N-частичный оператор Шредингера в виде

$$H(\lambda) = -\Delta_{N\nu} + \lambda U_N(x), \tag{4.1}$$

где $U_N(x) = \sum\limits_{k<l} v(x_k - x_l)$, $v(x) \in L^p(R^\nu\setminus S)$, p либо 1, либо 2. В этом случае, $S_N\{(x_1, \ldots, x_n) \in R^{N\nu} : \exists (i, j),\ x_i - x_j \in S\}$. Условия на множество S и отрицательную часть потенциала $v(x)$ сформулируем ниже.

Дадим необходимые определения.

Последовательность ограниченных функций $\{v_n(x)\}$ называется L^p-регуляризацией $(p \geqslant 1)$ потенциала $v(x)$ с множеством сингулярностей S, если для любого компакта $K \subset R^\nu\setminus S$ $\int\limits_K |v_n(x) - v(x)|^p\, dx \to 0$, $n \to \infty$.

Пусть $\{v_n(x)\}$ — L^p-регуляризация потенциала $v(x)$, H_0 — оператор $-\Delta_{N\nu}$ с естественной областью определения $D(H_0)$, U_N^n — оператор умножения на ограниченную функцию $U_N^n(x) = \sum\limits_{k<l} v_n(x_k - x_l)$, $H_n(\lambda) = H_0 + \lambda U_N^n$. Тогда регуляризация $\{v_n\}$ называется сходящейся, если $H_n(\lambda)$ при $n \to \infty$ сходится в сильном резольвентном смысле к некоторому самосопряженному оператору H_λ. Регуляризация называется устойчивой, если $H_\lambda \to H_0$ в сильном резольвентном смысле при $\lambda \to +0$.

Отметим, что требование сильной резольвентной сходимости в приведенных выше определениях вполне естественно, так как [9] эта сходимость эквивалентна сильной сходимости соответствующих унитарных групп, т. е. сходимости решений соответствующих уравнений Шредингера.

В приведенных ниже теоремах содержатся условия при которых регуляризация $\{v_n(x)\}$ оказывается сходящейся.

Теорема 4.1. *Пусть $v(x) \in L^2_{\mathrm{loc}}(R^\nu\setminus S)$, $\nu \geqslant 4$, где S — компакт нулевой M^2-емкости с единичной мерой μ. Предположим, что $v(x) \geqslant -\frac{1}{4}\nu(\nu-4)\beta_N q_0(\mu;\ x)$, где β_N и $q_0(\mu;\ x)$ определены в теореме 2.1. Тогда для любой L^2-регуляризации $\{v_n(x)\}$ потенциала $v(x)$ последовательность операторов $H_n(\lambda)$ в сильном резольвентном смысле при $n \to \infty$ сходится к самосопряженному* *оператору $\tilde{H}(\lambda)$, где $\tilde{H}(\lambda)$ — замыкание оператора $H(\lambda)$, задаваемого на $C_0^\infty(R^{N\nu}\setminus S_N)$ выражением (4.1).*

Доказательство. Очевидно, что для $\psi \in C_0^\infty(R^{N\nu}\setminus S_N)$ $H_n(\lambda)\psi$ сильно сходится к $H(\lambda)\psi$ при $n\to\infty$. Но в силу теоремы 2.1 $H(\lambda)$ существенно самосопряжен на $C_0^\infty(R^{N\nu}\setminus S_N)$. Поэтому [9] $H_n(\lambda)$ сходится к $\tilde{H}(\lambda)$ в сильном резольвентном смысле.

Теорема 4.2. *Пусть $v(x)\in L^1_{\mathrm{loc}}(R^\nu\setminus S)$, $v(x)\geqslant 0$, $\nu\geqslant 2$, S — компакт нулевой лебеговой меры. Тогда для любой монотонно неубывающей L^1-регуляризации $\{v_n(x)\}$ потенциала $v(x)$ операторы $H_n(\lambda)$ при $n\to\infty$ сходятся к форм-сумме H_λ^{f} операторов $-\Delta_{N\nu}$ и U_N в сильном резольвентном смысле. В частности, если в этом случае $v(x)\in L^2_{\mathrm{loc}}(R^\nu\setminus S)$, где S — компакт M^1-емкости нуль, то $H_n(\lambda)$ сходятся к фридрихсову расширению оператора (4.1).*

Доказательство. Пусть u_n (соответственно u) полуторалинейная форма, отвечающая оператору умножения на $U_N^n(x)$ (соответственно на $U_N(x)$); h_0 — форма, отвечающая оператору $-\Delta_{N\nu}$, где $Q(u_n)=L^2(R^{N\nu})$, $Q(u)=C_0^\infty(R^{N\nu}\setminus S_N)$, $Q(h_0)=C_0^\infty\times$ $\times(R^{N\nu})$. Положим $h_\lambda=\tilde{h}_0+\lambda\tilde{u}$, $h_n=\tilde{h}_0+\lambda u_n$. Отметим, что с формами h_n ассоциированы операторы $H_n(\lambda)$. Нетрудно проверить, что последовательность форм $\{h_n\}$ монотонна и $h_n\leqslant h_\lambda$ на $Q(h_\lambda)=$ $=Q(\tilde{h}_0)\cap Q(\tilde{u})$. Поэтому, в силу теоремы 3.13 [9, гл. VIII], существует замкнутая ограниченная снизу форма h'_λ такая, что $H_n(\lambda)$ сходится при $n\to\infty$ в сильном резольвентном смысле к оператору H'_λ, ассоциированному с формой h'_λ. Причем $Q(h'_\lambda)\supseteq$ $\supseteq Q(h_\lambda)$ и

$$\lim_{n\to\infty} h_n[\psi,\psi]=h'_\lambda[\psi,\psi] \tag{4.2}$$

для $\psi\in Q(h'_\lambda)$. Покажем, что $h'_\lambda=h_\lambda$. Так как почти всюду $U_N^n(x)\nearrow U_N(x)$ при $n\to\infty$, то $u_n[\psi,\psi]\to\tilde{u}[\psi,\psi]$, если $\psi\in Q(h_\lambda)$. Поэтому для $\psi\in Q(h_\lambda)$ $\lim\limits_{n\to\infty}h_n[\psi,\psi]=h_\lambda[\psi,\psi]$. Следовательно, $h_\lambda\subseteq h'_\lambda$. Покажем теперь, что $Q(h'_\lambda)=Q(h_\lambda)$. Если $\psi\in Q(h'_\lambda)$, то $\psi\in Q(h_0)$. Поэтому из (4.2) вытекает существование $\lim\limits_{n\to\infty}u_n[\psi,$ $\psi]=\lim\limits_{n\to\infty}\int\limits_{R^{N\nu}}U_N^n(x)\,|\psi(x)|^2\,dx$. Но при $n\to\infty$ почти всюду $U_N^n\times$ $\times(x)\nearrow U_N(x)$. Поэтому в силу теоремы Леви $U_N(x)\,|\psi(x)|^2\in$ $\in L^1(R^{N\nu})$ и стало быть $\psi\in Q(\tilde{u})$. Следовательно, $\psi\in Q(h_\lambda)$. Таким образом, $h'_\lambda=h_\lambda$. Поэтому H'_λ совпадает с форм-суммой H_λ.

Отметим, что теоремы 4.1, 4.2 усиливают соответствующие утверждения, доказанные в [2, 4].

Результаты, полученные в разделах 2, 3 позволяют показать, что регуляризации, построенные в теоремах 4.1, 4.2 являются устойчивыми. А именно верно следующее утверждение.

Теорема 4.3. *1. Пусть потенциал $v(x)$ удовлетворяет условиям теоремы 4.1. Тогда любая L^2-регуляризация потенциала $v(x)$ является сходящейся и устойчивой.*

2. Если $v(x)$ удовлетворяет условиям теоремы 4.2, где S — компакт нулевой M^1-емкости, то любая монотонная L'-регуляризация потенциала $v(x)$ является сходящейся и устойчивой.

Доказательство. 1. В силу теоремы 4.1 достаточно показать, что операторы $\tilde{H}(\lambda)$ при $\lambda \to +0$ в сильном резольвентном смысле сходятся к оператору $H_0 = -\Delta_{N\nu}$. Но из результатов раздела 2 вытекает, что $C_0^\infty(R^{N\nu} \setminus S_N)$ является областью существенной самосопряженности операторов $\tilde{H}(\lambda)$ и H_0. А так как для $\psi \in C_0^\infty(R^{N\nu} \setminus S_N)$, $\tilde{H}(\lambda)\psi \to H_0\psi$ при $\lambda \to +0$, то (см. [9]) получаем нужную сходимость.

2. В этом случае полуторалинейная форма, отвечающая предельному оператору H_λ есть $h_\lambda[\psi, \psi] = \tilde{h}_0[\psi, \psi] + \lambda\tilde{u}[\psi, \psi]$. При $\lambda \to +0$ положительные формы h_λ на $C_0^\infty(R^{N\nu} \setminus S_N)$ сходятся к форме h_0. Так как $C_0^\infty(R^{N\nu} \setminus S_N)$ существенная область определения формы $\tilde{h}_0$, то [9] операторы H_λ в сильном резольвентном смысле сходятся к H_0.

Отметим, что утверждения, аналогичные теореме 4.3, были ранее другим методом доказаны автором в случае одной частицы в работе [11], а в многочастичном случае в — [12]. В этих работах предполагалось, что $v(x) \in L^2_{\mathrm{loc}}(R^\nu \setminus S)$, где S — компакт M^k-емкости нуль (k — либо 1, либо 2) и рассматривались L^2-регуляризации. Кроме того, в работах [11, 12] второе утверждение теоремы 4.3 доказано для любой положительной L^2-регуляризации (т. е. последовательность $v_n(x)$, начиная с некоторого n неотрицательна). Отметим также, что существуют потенциалы не имеющие устойчивых регуляризаций [13].

В заключение покажем как теоремы разделов 2, 3 могут быть использованы для изучения возмущений оператора Шредингера потенциалами с малым носителем.

Пусть S — компакт в R^ν. Будем говорить, что последовательность множеств S_n стягивается к S, если для любой окрестности O множества S все S_n, начиная с некоторого, лежат в O.

Теорема 4.4. *Предположим, что последовательность потенциалов $v_n(x)$ такова, что $\operatorname{supp} v_n$ стягивается к S, а W_N — оператор умножения на функцию $W_N(x) = \sum_{r=1}^{N} w_r(x_r) + \sum_{k<l} w_{kl}(x_k - x_l)$.*

Тогда 1. Если потенциалы w_r и w_{kl} $(1 \leqslant r \leqslant N,\ 1 \leqslant k < l \leqslant N)$ удовлетворяют условиям теоремы 2.1, а функция $v_n(x) \in L^2_{\mathrm{loc}} \times (R^\nu \setminus S)$ полуограничены снизу, где S — компакт нулевой M^2-емкости, то последовательность операторов

$$H_n = -\Delta_{N\nu} + \sum_{i<j} v_n(x_i - x_j) + W_N(x) \tag{4.3}$$

в сильном резольвентном смысле сходится к оператору $H = -\Delta_{N\nu} + W_N$.

2. *Если же* $v_n(x) \in L^1_{\mathrm{loc}}(R^\nu \setminus S)$, $v_n(x) \geqslant 0$. S — *компакт нулевой* M^1-*емкости, а потенциалы* w_r *и* w_{kl} $(1 \leqslant r \leqslant N,\ 1 \leqslant k < l \leqslant N)$ *удовлетворяют условиям, приведенным в разделе 3, то последовательность операторов в (4.3), определенных как форм-сумма, сходится в сильном резольвентном смысле к форм-сумме* $-\Delta_{N\nu} + W_N$.

Доказательство. Как и ранее можно считать, что все потенциалы имеют общее множество сингулярностей S.

1. Очевидно, что $H_n\psi$ сильно сходится $H\psi$ при $\psi \in C_0^\infty \times (R^{N\nu} \setminus S_N)$. А так как в силу теоремы 2.1 $C_0^\infty(R^{N\nu} \setminus S_N)$ — область существенной самосопряженности оператора H, то H_n сходится к H в сильном резольвентном смысле.

2. В этом случае следует воспользоваться теоремой 3.6 [9 гл. VIII] и тем обстоятельством, что $C_0^\infty(R^{N\nu} \setminus S_N)$, согласно теореме 3.1, является существенной областью определения полуторалинейной формы, отвечающей оператору H.

Вопрос о возмущении уравнения Шредингера потенциалами с малым носителем обсуждался ранее. В работах [6, 7] рассматривался одночастичный оператор, правда, с потенциалом, зависящим от времени, а в [12] доказано некоторое утверждение, являющееся частным случаем второй части теоремы 4.4.

Список литературы: **1.** *Рид М., Саймон Б.* Методы современной математической физики. Т. 2. — М.: Мир, 1978. — 395 с. **2.** *Ferrero P., Pazzis O. de, Robinson D. W.* Scattering theory with singular potentials, II. The n-body problem and hard cores.— Ann. Inst. H. Poincare, 1974 (1975), **A21**, w 3, p. 217—231. **3.** *Ginibre J.* Auto—Adjontion essentielle du hamiltonien de schrödinger avec potential singulier.— Preprint LPTHE, 75/22, 1975, p. 1—17. **4.** *Zagrebnov V. A.* On statistical mechanics of systems with highly singular twobody potentials.— Ann. Phys., 1976, **102**, № 1, p. 108—128. **5.** *Мазья В. Г.* О (p, l)-емкости, теоремах вложения и спектре эллиптического самосопряженного оператора.— Изв. АН СССР. Сер. мат., 1973, **37**, № 2, с. 356—385. **6.** Friedman C. N. Perturbations of the Schroedinger equation by potentials with small.—J. Funct. Anal., 1972, **10**, p. 346—360. **7.** *Чуешов И. Д.* О возмущении уравнения Шредингера потенциалами с малым носителем.— Мат. заметки, 1976, **20**, № 5, с. 675—680. **8.** *Schmincke U.-W.* Essential selfadjointness of Schrödinger operator with strongly singular potential.— Math. Zeitschrift, 1972, **124**, p. 47—50. **9.** *Като Т.* Теория возмущений линейных операторов.—М.: Мир, 1972.— 740 с. **10.** *Robinson D. W.* Scattering theory with singular potentials, I. The two-body problem.— Ann. Inst. H. Poincare, 1974 (1975), **A21**, № 3, p. 185—215. **11.** *Чуешов И. Д.* Устойчивость регуляризаций оператора Шредингера с сингулярным отталкивающим потенциалом.— Журн. теор. мат. физика, 1978, **37**, № 2, с. 237—242. **12.** *Чуешов И. Д.* Устойчивость регуляризаций многочастичного оператора Шредингера с сингулярным отталкивающим потенциалом парного взаимодействия.— Журн. теорет. мат. физика, 1979, **42**, № 2, с. 216—220. **13.** *Ezawa N., Klauder J. R., Shepp L. A.* Vestigial effects of singular potentials in diffusion theory and quantum mechanics.— Journ. Math. Phys., 1975, **16**, № 4, p. 783—799.

Поступила 7 января 1980 г.