КРИТЕРИИ РАЦИОНАЛЬНОСТИ И ПСЕВДОРАЦИОНАЛЬНОСТИ ФУНКЦИЙ

М. З. Кореневский

Рассмотрим функции $F(w, z)$, где $w \in C^p$, $z \in C^q$. Функцию $F(w, z)$, представимую в виде

$$\sum_{\mu=0}^{m} A_\mu(w) \cdot z^\mu,$$

где $\mu = (\mu_1, \ldots, \mu_q)$, $z^\mu = z_1^{\mu_1}, \ldots z_q^{\mu_q}$, $A_\mu(w)$ — функции, голоморфные в области Δ_w, будем называть *псевдополиномом* (относительно z в области Δ_w).

Подобно тому, как отношение двух полиномов называют рациональной функцией, отношение двух псевдополиномов назовем *псевдорациональной функцией.*

В работах Осгуда [1], Бохнера и Мартина [2], Рудина [3], Сичака [4] устанавливается рациональность функции при условии, что она рациональна на некоторых специальных системах комплексно одномерных либо комплексно многомерных аналитических плоскостей. В качестве примера приведем следующую теорему.

Теорема Осгуда [1]. *Пусть функция* $\Phi(z_1, \ldots, z_n)$ *голоморфна в полицилиндре* $D = \{z: |z_k| < r_k,\ k = 1, \ldots, n\}$. *Если при каждом* $i = 1, \ldots, n$ *и при каждом фиксированном* $(z_1^0, \ldots, z_{i-1}^0, \ldots, z_{i+1}^0, \ldots, z_n^0)$, где $|z_k^0| < r_k$, *функция* $\Phi(z_1^0, \ldots, z_{i-1}^0, z_i, z_{i+1}^0, \ldots, z_n^0)$ по z_i *является рациональной функцией, то* $\Phi(z_1, \ldots z_n)$ — *рациональная функция.*

Используя по существу тот же метод, что и в [1, 2], получаем здесь некоторые критерии рациональности функций, более сильные чем в [1, 2], а также критерии псевдорациональности функций причем результаты являются неулучшаемыми.

Для точной формулировки результатов данной работы нам понадобятся следующие определения.

Множество K пространства C^n переменного $z = (z_1, \ldots, z_n)$ будем называть a-множеством, если не существует двух различных многочленов от $z_1, \ldots, z_n$, принимающих на K равные значения.

Пусть область $D \subset C^n$. Множество $K \subset D$ будем называть b-множеством (относительно области D), если не существует двух различных функций, голоморфных в D, принимающих на K равные значения.

Множество $K \subset C^n$ будем называть c-множеством, если какова бы ни была последовательность многочленов

$$\{Q_i(z)\}_{i=1}^{\infty} \quad (Q_i(z) \not\equiv \text{const}\ \forall i = 1, 2, \ldots), \quad K \not\subset \bigcup_{i=1}^{\infty} A_{Q_i},$$

где

$$A_{Qi} = \{ z : z \in C^n, \ Q_i(z) = 0 \}.$$

Пусть область $D \subset C^n$. Множество $K \subset D$ будем называть d-множеством (относительно области D), если какова бы ни была последовательность функций

$\{ f_i(z) \}_{i=1}^{\infty} \, (f_i(z) \not\equiv \mathrm{const} \ \forall i = 1, \ 2 \ \ldots)$, голоморфных в области D,

$$K \not\subset \bigcup_{i=1}^{\infty} A_{fi},$$

где

$$A_{fi} = \{ z : z \in D, \quad f_i(z) = 0 \}.$$

Очевидна справедливость следующих утверждений.

1) Каждое d-множество является также b-множеством (относительно той же области) и c-множеством. В свою очередь любое b-множество и любое c-множество являются a-множествами.

2) Если множество K является $a(c)$-множеством и множество $K_1 \supset K$, то $K_1 - a(c)$-множество. Если множество K является $b(d)$-множеством относительно области D и $D \supseteq K_1 \supset K$, множество $K_1 - b(d)$-множество относительно той же области D.

3) Если множество K является $b(d)$-множеством относительно области D и область $D_1 \supset D$, то $K - b(d)$-множество области D_1.

Приведем примеры введенных выше множеств.

Пример 1. Пусть $E_1, \ E_2, \ \ldots, \ E_n$ — счетные множества на комплексной плоскости. Тогда множество $K = E_1 \times \cdots \times E_n$ является a-множеством.

Пример 2. Пусть $\Delta_{z_1}, \ \Delta_{z_2}, \ \ldots \ \Delta_{z_n}$ — произвольные области на комплексной плоскости. Пусть, далее, $E_1, \ E_2, \ \ldots, \ E_n$ — более чем счетные множества, соответственно, в $\Delta_{z_1}, \ \Delta_{z_2}, \ \ldots, \ \Delta_{z_n}$. Множество $K = E_1 \times \cdots \times E_n$ является d-множеством полицилиндра $\Delta = \Delta_{z_1} \times \cdots \times \Delta_{z_n}$, а следовательно, также b-множеством полицилиндра Δ и c-множеством.

Отсюда следует, что любая область D содержит свое d-множество и, в частности, сама является собственным d-множеством.

Пусть функция $F(w, \ z)$ определена в полицилиндре $\Delta = \Delta_w \times \Delta_z$ так, что при каждом фиксированном z из некоторого множества $L \subset \Delta_z$ она голоморфна по w в Δ_w, а при каждом фиксированном w из некоторого множества $P \subset \Delta_w$ рациональна по z в Δ_z. Мы изучаем далее вопрос о том, какими должны быть множества P и L, чтобы функция $F(w, \ z)$ была псевдорациональной.

Прежде всего заметим, что если одновременно $L \neq \Delta_z$ и $P \neq \Delta_w$, утверждение относительно псевдорациональности функции $F(w, \ z)$ заведомо неверно. В самом деле, пусть существуют $z_0 \in (\Delta_z / L)$ и $w_0 \in (\Delta_w / P)$. Тогда функция

$$F(w, \ z) = \begin{cases} 0 & (w, \ z) = (w_0, \ z_0) \\ 1 & (w, \ z) \neq (w_0, \ z_0) \end{cases}$$

голоморфна по w при каждом $z \neq z_0$ и рациональна по z при каждом $w \neq w_0$, но не псевдорациональна.

Поэтому далее рассматриваются два случая: $P = \Delta_w$ (теорема 1) и $L = \Delta_z$ (теорема 2).

Теорема 1. *Пусть множество $L \subset \Delta_z$ является a-множеством. Пусть далее функция $F(w, z)$ определена в полицилиндре $\Delta = \Delta_w \times \Delta_z$. Если при каждом фиксированном $w \in \Delta_w$ функция $F(w, z)$ есть рациональная функция от z в Δ_z, а при каждом фиксированном $z \in L$ — голоморфная функция w в Δ_w, то функция $F(w, z)$ — псевдорациональная.*

Доказательство. По условию теоремы для каждого $w \in \Delta_w$

$$F(w, z) \cdot \sum_{\mu_i=0}^{m_w} a_\mu(w) \cdot z^\mu = \sum_{\mu_i=0}^{m_w} b_\mu(w) \cdot z^\mu, \tag{1}$$

где

$$\sum_{\mu_i=0}^{m_w} |a_\mu(w)| + \sum_{\mu_i=0}^{m_w} |b_\mu(w)| > 0. \tag{2}$$

Теорема будет доказана, если мы покажем, что при некотором натуральном m, не зависящем от w, справедливо представление

$$F(w, z) \cdot \sum_{\mu_i=0}^{m} A_\mu(w) \cdot z^\mu = \sum_{\mu_i=0}^{m} B_\mu(w) \cdot z^\mu \quad \forall (w, z) \in \Delta, \tag{3}$$

где $A_\mu(w)$, $B_\mu(w)$ — голоморфные функции в Δ_w и хотя бы одна из них не есть тождественный ноль.

Обозначим через T_m множество тех $w \in \Delta_w$, в которых справедливо какое-нибудь представление типа (1) с $m_w \leqslant m$. Так как область Δ_w является собственным d-множеством, то хотя бы одно из множеств T_{m_0} не содержится ни в каком множестве $A_f = \{w \cdot w \in \Delta_w, f(w) = 0\}$, где $f(w) \not\equiv 0$ — голоморфная в Δ_w функция, и, значит, множество T_{m_0} является b-множеством.

Если $F(w, z) \equiv 0$ на множестве $T_{m_0} \times L$, то ввиду голоморфности $F(w, z)$ по w в Δ_w при каждом $z \in L$ и из того, что множество T_{m_0} есть b-множество, следует, что $F(w, z) \equiv 0$ в $\Delta = \Delta_w \times L$.

При каждом фиксированном $w \in \Delta_w$ функция $F(w, z)$ рациональна по z в Δ_z и L есть a-множество, поэтому $F(w, z) \equiv 0$ в $\Delta = \Delta_w \times \Delta_z$ и, следовательно, является псевдорациональной функцией.

Точно таким же образом доказывается, что из справедливости представления (3) на множестве $T_{m_0} \times L$ (с $A_\mu(w)$, $B_\mu(w)$, голоморфными в Δ_w) следует справедливость его в полицилиндре $\Delta = \Delta_w \times \Delta_z$.

Итак, докажем справедливость представления (3) на множества $T_{m_0} \times L$ в предположении, что $F(w, z) \not\equiv 0$ на этом множестве.

Возьмем для каждой точки w из T_{m_0} некоторое представление типа (1), в котором $m_w \leqslant m_0$. Будем называть такие представления представлениями типа (1′).

Рассмотрим представление (1′) для произвольных $N = 2 \cdot (m_0 + 1)^q$ точек $z^{(1)}, \ldots, z^{(N)}$ из L и произвольной точки $w \in T_{m_0}$:

$$F(w, z^{(j)}) \cdot \sum_{\mu_i = 0}^{m_0} a_\mu(w) \cdot (z^{(j)})^\mu = \sum_{\mu_i = 0}^{m_0} b_\mu(w) \cdot (z^{(j)})^\mu.$$
$$1 \leqslant j \leqslant N$$

Получим тогда систему однородных линейных уравнений относительно $a_\mu(w)$, $b_\mu(w)$, которая заведомо имеет решение. Поэтому определитель системы тождественно равен нулю при $z^{(j)} \in L$, $w \in T_{m_0}$. Определитель системы (имеется в виду, что одночлены $z_1^{\mu_1} \cdot \ \cdots \ \cdot z_q^{\mu_q}$ линейно упорядочены некоторым образом) имеет вид:

$$X(w, z^{(1)}, \ldots, z^{(N)}) = \begin{vmatrix} \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdots F(w, z^{(j)}) \cdot (z^{(j)})^\mu \cdots (z^{(j)})^\mu \cdots \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \end{vmatrix}. \qquad (4)$$

Обозначим $z^{(N)}$ через z и разложим этот определитель по элементам последней строки. Имеем тогда

$$F(w, z) \cdot \sum_{\mu_i = 0}^{m_0} A_\mu(w, z^{(1)}, \ldots z^{(N-1)}) \cdot z^\mu =$$
$$= \sum_{\mu_i = 0}^{m_0} B_\mu(w, z^{(1)}, \ldots, z^{(N-1)}) \cdot z^\mu, \qquad (5)$$

где

$$A_\mu(w, z^{(1)}, \ldots, z^{(N-1)}), \quad B_\mu(w, z^{(1)}, \ldots, z^{(N-1)}) \qquad (6)$$

есть взятые с соответствующим знаком $(N-1)$-мерные миноры матрицы

$$\begin{pmatrix} \cdots F(w, z^{(1)}) \cdot (z^{(1)})^\mu \cdots (z^{(1)})^\mu \cdots \\ \cdot \ \cdot \ \cdot \ \cdot \ \cdot \ \cdot \ \cdot \ \cdot \ \cdot \ \cdot \\ \cdots F(w, z^{(N-1)}) \cdot (z^{(N-1)})^\mu \cdots (z^{(N-1)})^\mu \cdots \end{pmatrix}$$

Так как для каждого $z^{(j)} \in L$ функция $F(w, z^{(j)})$ голоморфна по w в Δ_w, то $A_\mu(w, z^{(1)}, \ldots, z^{(N-1)})$ и $B_\mu(w, z^{(1)}, \ldots, z^{(N-1)})$ — голоморфные функции по w в Δ_w при фиксированных $z^{(1)}, \ldots, z^{(N-1)} \in L$.

Предположим, что не все функции (6) тождественно равны нулю при $w \in T_{m_0}$; $z^{(1)}, \ldots, z^{(N-1)} \in L$. Тогда существует такая система значений переменных $z^{(1)} = \alpha^{(1)}, \ldots, z^{(N-1)} = \alpha^{(N-1)}$, что тем же свойством обладают функции

$$A_\mu(w) = A_\mu(w, \alpha^{(1)}, \ldots, \alpha^{(N-1)}), \quad B_\mu(w) = B_\mu(w, \alpha^{(1)}, \ldots, \alpha^{(N-1)}).$$

В этом случае соотношение (5) удовлетворяет всем требованиям, предъявляемым к (3) при $z \in L$, $w \in T_{m_0}$. Но тогда, как было показано ранее, оно выполняется в полицилиндре Δ; тем самым теорема доказана.

Если же все функции (6) тождественно равны нулю, то должен существовать минор, состоящий из элементов первых k строк определителя $X(w, z^{(1)}, \dots, z^{(N)})$

$$X(w, z^{(1)}, \dots, z^{(k)}) = \begin{vmatrix} \cdots F(w, z^{(1)}) \cdot (z^{(1)})^{\mu} \cdots (z^{(1)})^{\nu} \cdots \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ \cdots F(w, z^{(k)}) \cdot (z^{(k)})^{\mu} \cdots (z^{(k)})^{\nu} \cdots \end{vmatrix}$$

равный тождественно (при $z^{(1)}, \dots, z^{(k)} \in L$; $w \in T_{m_0}$) нулю, но имеющий хотя бы один минор порядка $(k-1)$, который содержит элемент первой строки $F(w, z^{(1)})$ и не обращается тождественно в ноль.

Действительно, мы предполагали, что $F(w, z) \not\equiv 0$ в Δ. Тогда, во всяком случае, элемент $F(w, z^{(1)})$ не обращается тождественно в ноль при $w \in T_{m_0}$, $z^{(1)} \in L$.

Рассмотрим определитель $X(w, z^{(1)}, \dots, z^{(k)})$. Действуя аналогично предыдущему, покажем справедливость утверждения теоремы. Теорема доказана.

В том случае, когда L не является a-множеством, утверждение теоремы 1 неверно, что показывает следующий пример.

Пример 3. Пусть L не есть a-множество, тогда существует многочлен $P(z)$ $(z \in C^q)$, обращающийся в ноль на L, но не равный тождественному нулю. Функция

$$F(w, z) = \begin{cases} P(z) & w = (0, 0, \dots, 0) \\ 0 & w \neq (0, 0, \dots, 0), \end{cases}$$

очевидно, не псевдорациональная, но удовлетворяет условию теоремы 1 с данным L (без ограничения общности считаем, что $w = (0, 0, \dots, 0) \in \Delta_w$).

Теорема 2. *Пусть множество $P \subset \Delta_w$ является d-множеством. Пусть далее функция $F(w, z)$ определена в полицилиндре $\Delta = \Delta_w \times \Delta_z$. Если при каждом фиксированном $w \in P$ функция $F(w, z)$ есть рациональная функция z в Δ_z, а при каждом фиксированном $z \in \Delta_z$ функция $F(w, z)$ есть голоморфная функция w в Δ_w, то $F(w, z)$ — псевдорациональная функция.*

Доказательство. По условию, для каждого $w \in P$ справедливо представление типа (1). Обозначим через T_m множество тех $w \in P$, в которых справедливо какое-нибудь представление типа (1) с $m_w \leqslant m$. И далее, рассуждая аналогично тому, как при доказательстве теоремы 1, получаем, что $F(w, z) \equiv 0$ в Δ либо при $w \in T_{m_0}$, $z \in \Delta_z$ справедливо представление

$$F(w, z) \cdot \sum_{\mu_i = 0}^{m_0} A_{\mu}(w) \cdot z^{\mu} = \sum_{\mu_i = 0}^{m_0} B_{\mu}(w) \cdot z^{\mu},$$

где $A_\mu(w)$, $B_\mu(w)$ — голоморфные в Δ_w функции, из которых хотя бы одна не равна тождественно нулю.

Учитывая далее, что функция $F(w, z)$ голоморфна по w в Δ_w при каждом фиксированном $z \in \Delta_z$ и T_{m_0} является b-множеством, получаем, что равенство (5′) имеет место всюду в Δ. Теорема доказана.

В том случае, когда P не является d-множеством, утверждение теоремы 2 неверно, что показывает следующий пример.

Пример 4. Пусть множество P не является d-множеством, т. е. содержится в некотором счетном объединении множеств вида $A_{f_i} = \{ w : f_i(w) = 0 \}$, где $f_i(w) \not\equiv 0$ — голоморфная в Δ_w функция.

Рассмотрим последовательность функций

$$\varphi_1(w) = f_1(w); \quad \varphi_2(w) = f_1(w) \cdot f_2(w); \; \dots \; ;$$
$$\varphi_k(w) = f_1(w), \cdots, \; f_k(w); \dots$$

и соответствующую последовательность аналитических множеств

$$A_{\varphi_1}, \quad A_{\varphi_2}, \; \dots, \; A_{\varphi_k}, \; \dots$$

Ясно, что $A_{\varphi_k} = \bigcup_{i=1}^{k} A_{f_i}$, $\quad \bigcup_{k=1}^{\infty} A_{\varphi k} = \bigcup_{i=1}^{\infty} A_{f_i}$ и $A_{\varphi_i} \subset A_{\varphi_j}$ при $i \leqslant j$.

Выберем теперь числа $\alpha_k \neq 0$ $(k = 1, 2, \dots)$ так, чтобы ряд

$$F(w, z) = \alpha_1 \cdot z_1 \cdot \varphi_1(w) + \alpha_2 \cdot (z_1)^2 \cdot \varphi_2(w) + \cdots$$
$$\cdots + \alpha_k \cdot (z_1)^k \cdot \varphi_k(w) + \cdots, \quad \text{где } z = (z_1, z_2, \dots z_q),$$

равномерно сходился в окрестности каждой точки (w, z) из поли цилиндра $\Delta = \Delta_w \times C^q$ и, следовательно, представлял функцию голоморфную в Δ. Достаточно, например, взять $\alpha_k = \dfrac{1}{M_k \cdot k!}$, где $M_k = \max\limits_{\Phi_k} |\varphi_k(w)|$, а $\{ \Phi_k \}_{k=1}^{\infty}$ — расширяющаяся последовательность компактов, исчерпывающих область Δ_w.

Заметим, что так как $\varphi_i \not\equiv 0 \, (\forall i = 1, 2, \dots)$,

$$\bigcup_{i=1}^{\infty} A_{\varphi_i} \neq \Delta_w.$$

Если бы функция $F(w, z)$ была псевдорациональной, то ввиду голоморфности ее в полицилиндре $\Delta = \Delta_w \times C^q$ следовало бы, что при каждом фиксированном $w \in \Delta_w$ функция $F(w, z)$ является полиномом от z. Но при любом фиксированном w из $(\Delta_w \setminus \bigcup_{i=1}^{\infty} \times \times A_{\varphi_i}) \neq \varnothing$ функция $F(w, z)$ представляется бесконечным степенным рядом.

Кроме того, очевидно, что при каждом фиксированном $w \in P \subset \subset \bigcup_{i=1}^{\infty} A_{\varphi_i}$ функция $F(w, z)$ является полиномом от z.

В следующих ниже теоремах предполагается, что функция $F(w, z)$ голоморфна в полицилиндре $\Delta = \Delta_w \times \Delta_z$ и при каждом фиксированном w из некоторого множества P, содержащегося в области Δ_w, она рациональна по z, а при каждом фиксированном z из некоторого множества L, содержащегося в области Δ_z, рациональна по w. Изучается вопрос о том, какими должны быть множества P и L, чтобы функция $F(w, z)$ была рациональной в Δ.

Теорема 3. *Пусть выполняется одно из двух условий:*

A) *множество L является b-множеством области Δ_z, а множество $P \subset \Delta_w$ является c-множеством;*

B) *множество $L \subset \Delta_z$ является a-множеством, а множество P есть одновременно b-множество области Δ_w и c-множество.*

Если функция $F(w, z)$ голоморфна в полицилиндре $\Delta = \Delta_w \times \times \Delta_z$ и при каждом фиксированном $z \in L$ рациональна по w в Δ_w, а при каждом фиксированном $w \in P$ рациональна по z в Δ_z, то функция $F(w, z)$ рациональна в Δ.

Доказательство. I. Пусть выполняется условие A).

По условию, при каждом фиксированном $w \in P$ функция $F(w, z)$ — рациональная функция z, т. е. $\forall w \in P$ справедливо представление типа (1). Рассматриваем множества T_m тех точек из множества P, для которых справедливо некоторое представление типа (1) с $m_w \leqslant m$. P является c-множеством, а $\bigcup_{m=1}^{\infty} T_m = P$, поэтому для некоторого m_0 множество T_{m_0} не содержится ни в каком множестве вида $A_Q = \{ w : w \in \Delta_w,\ Q(w) = 0 \}$, где $Q(w) \not\equiv 0$ — полином, т. е. T_{m_0} является a-множеством.

Рассмотрим представление типа (1) для произвольных $N = 2 \times \times (m_0 + 1)^q$ точек $z^{(1)}, \ldots, z^{(N)} \in L$ и произвольной точки $w \in T_{m_0}$ (берем то представление типа (1) для точки $w \in T_{m_0}$, в котором $m_w \leqslant m_0$). Имеем систему линейных однородных уравнений; далее, как и при доказательстве теорем 1, 2, получаем представление:

$$F(w, z) \cdot \sum_{\mu_i=0}^{m_0} A_\mu(w) \cdot z^\mu = \sum_{\mu_i=0}^{m_0} B_\mu(w) \cdot z^\mu, \qquad (5')$$

справедливое при $z \in L$, $w \in T_{m_0}$. При этом $A_\mu(w)$, $B_\mu(w)$ есть некоторые миноры определителя

$$X(w, z^{(1)}, \ldots, z^{(N)}) = \begin{vmatrix} \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdots & F(w, z^{(j)}) & \cdot (z^{(j)})^\mu & \cdots & (z^{(j)})^\nu & \cdots \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \end{vmatrix}.$$

Но тогда из рациональности $F(w, z)$ по w при $z \in L$ следует, что $A_\mu(\mu)$, $B_\mu(w)$ — рациональные функции переменного w. Поэтому справедливость (5′) везде в $\Delta=\Delta_w\times\Delta_z$ означает, что $F(w, z)$ рациональна в Δ.

При каждом фиксированном $z\in L$ функция $F(w, z)$ рациональна по w в Δ_w и поскольку T_{m_0} является a-множеством, (5′) справедливо в $L\times\Delta_w$.

По условию $F(w, z)$ голоморфна в Δ и поэтому является голоморфной функцией z при каждом фиксированном $w\in\Delta_w$. Но так как L является b-множеством, представление (5′) справедливо везде в Δ и $F(w, z)$ является рациональной функцией.

II. Пусть выполняется условие В).

Точно таким же образом, как при доказательстве пункта 1 данной теоремы доказывается справедливость представления (5′) с рациональными функциями $A_\mu(w)$, $B_\mu(w)$ при $z\in L$, $w\in T_{m_0}$, где T_{m_0} является a-множеством.

При каждом фиксированном $z\in L$ функция $F(w, z)$ рациональна по w. T_{m_0} есть a-множество, поэтому представление (5′) справедливо в $\Delta_w\times L$, в частности, в $P\times L$.

Далее, при каждом фиксированном $w\in P$ функция $F(w, z)$ рациональна по z и поскольку L является a-множеством, представление (5′) справедливо в $P\times\Delta_z$.

По условию, функция $F(w, z)$ голоморфна в Δ, и значит, является голоморфной функцией w при каждом фиксированном $z\in\Delta_z$. Но P является еще и b-множеством, поэтому (5′) справедливо везде в Δ и $F(w, z)$ является рациональной функцией. Теорема доказана.

Замечание. Теорема 3 может быть сформулирована симметрично относительно переменных w и z, потому что ее утверждение остается в силе, если в условии теоремы переменные w, z, множества P, L, а также области Δ_w и Δ_z поменять местами.

Доказанная теорема 3 дает неулучшаемый критерий рациональности функции в том смысле, что если множества P и L не удовлетворяют ни условию А), ни условию В) (с учетом замечания), из рациональности голоморфной в Δ функции $F(w, z)$ по z при каждом $w\in P$ и рациональности $F(w, z)$ по w при каждом $z\in L$ не следует рациональность функции $F(w, z)$ в Δ.

Покажем это. Вначале проведем классификацию подмножеств каждой из областей Δ_w и Δ_z. В теореме 3 рассматривались следующие виды подмножеств: a-множества, b-множества, c-множества. Каждое b-множество и каждое c-множество является также и a-множеством.

Тогда все подмножества каждой из областей Δ_w и Δ_z можно разделить на пять групп:

I группа — множества, являющиеся одновременно c-множествами и b-множествами (своей области);

II группа — подмножества, являющиеся b-множествами, но не являющиеся c-множествами.

III группа — подмножества, которые есть c-множества, но не являются b-множествами;

IV группа — подмножества, которые есть a-множества, но не являются ни b-множествами, ни c-множествами;

V группа — подмножества, не являющиеся a-множествами.

При произвольном выборе пары множеств L и P соответственно из областей Δ_z, Δ_w возможны 25 случаев в зависимости от того, к какой группе относится множество L и к какой множество P. Каждую комбинацию множеств L и P обозначим парой чисел (i, k), где i, $k = 1, 2, 3, 4, 5$ и множество L из группы i, а множество P из группы k.

Теорема 3 охватывает девять комбинаций: (4, 1); (3, 1); (2, 1); (1, 1); (1, 2); (1, 3); (1, 4); (2, 3); (3, 2).

Для любой другой комбинации утверждение теоремы 3 неверно, что видно из следующих примеров.

Пример 5. Пусть хотя бы одно из множеств L или P принадлежит группе V, т. е. не является a-множеством. Для определенности предположим, что L не есть a-множество. Тогда существует некоторый полином $Q(z)$, обращающийся в ноль на L. Функция $F(w, z) = Q(z) \cdot e^w$ удовлетворяет требованию рациональности по z при каждом фиксированном $w \in \Delta_w$ и рациональности по w при каждом $z \in L$, но не является рациональной.

Этот пример охватывает комбинации: (5, 1); (5, 2); (5, 3); (5,4); (5, 5); (4, 5); (3, 5); (2, 5); (1, 5).

Пример 6. Пусть оба множества P и L не являются b-множествами. Тогда есть голоморфная в Δ_w функция $\varphi(w)$, обращающаяся в ноль на P, и голоморфная в Δ_z функция $\psi(z)$, обращающаяся в ноль на L.

Рассмотрим произведение $\varphi(w) \cdot \psi(z)$. Если это не рациональная функция, то полагаем $F(w, z) = \varphi(w) \cdot \psi(z)$. Если же это рациональная функция, полагаем $F(w, z) = e^w \cdot \varphi(w) \cdot \psi(z)$. Тогда получаем функцию $F(w, z)$, равную нулю, как только $w \in P$ или $z \in L$, т. е. рациональную по z в Δ_z при $w \in P$ и рациональную по w в Δ_w при $z \in L$. Но по построению $F(w, z)$ не является рациональной функцией.

Этот пример охватывает комбинации: (3, 3); (3, 4); (4, 4); (3, 5) (4, 5); (5, 5); (5, 4); (5, 3); (4, 3).

Пример 7. Пусть оба множества P и L не являются c-множествами. Тогда есть две системы многочленов

$\{Q_i(w)\}_{i=1}^{\infty}$, $\{R_i(z)\}_{i=1}^{\infty}$ такие, что $P \subset \bigcup\limits_{i=1}^{\infty} A_{Qi}$ и $L \subset \bigcup\limits_{i=1}^{\infty} A_{Ri}$, где

$$A_{Qi} = \{w : w \in \Delta_w, \quad Q_i(w) = 0\}, \quad A_{Ri} = \{z; \quad z \in \Delta_z, \quad R_i(z) = 0\},$$
$$Q_i(w) \not\equiv \mathrm{const}, \quad R_i(z) \not\equiv \mathrm{const} \quad \forall i = 1, 2, \ldots$$

Образуем новые последовательности многочленов

$$\{\tilde{Q}_i(w)\}_{i=1}^{\infty}, \ \{\tilde{R}_i(z)\}_{i=1}^{\infty}, \quad \text{где} \quad \tilde{Q}_i(w) = Q_1(w) \cdot \ldots \cdot Q_i(w)$$

и $\tilde{R}(z) = R_1(z) \cdot \ldots \cdot R_i(z)$.

Пусть $\{K_i\}_{i=1}^{\infty}$ и $\{\Phi_i\}_{i=1}^{\infty}$ — расширяющиеся последовательности компактов, исчерпывающие соответственно C^p и C^q.

Обозначим

$$M_i = \max_{w \in K_i} |\tilde{Q}_i(w)| \cdot \max_{z \in \Phi_i} |\tilde{R}_i(z)|.$$

Рассмотрим ряд

$$F(w, z) = \sum_{i=1}^{\infty} \frac{\alpha_i}{(i)^2 \cdot M_i} \tilde{Q}_i(w) \cdot \tilde{R}_i(z),$$

где $|\alpha_i| \leqslant 1$. Рассуждениями, аналогичными тем, что применялись при построении примера 2, показывается, что $F(w, z)$ — целая функция, рациональная по w при $z \in L$ и рациональная по z при $w \in P$ (точнее, даже полином от w при $z \in L$ и полином от z при $w \in P$).

Теперь нужно так подобрать α_i, чтобы $F(w, z)$ не была рациональной функцией. Заметим, что так как по определению c-множества $Q_i(w) \not\equiv \text{const}$ и $R_i(z) \neq \text{const}$ для каждого i, то $\tilde{Q}_{i+1}(w) \times \tilde{R}_{i+1}(z)$ — многочлен степени большей, чем $\tilde{Q}_i(w) \cdot \tilde{R}_i(z)$ хотя бы по одному переменному w_k $(k = 1, \ldots, p)$ и одному переменному z_l $(l = 1, \ldots, q)$.

Тогда можно так последовательно выбирать $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_i, \ldots$ $(|\alpha_i| < 1)$, чтобы степень

$$F_{n+1}(w, z) = \sum_{i=1}^{n+1} \frac{\alpha_i}{(i)^2 \cdot M_i} \tilde{Q}_i(w) \cdot \tilde{R}_i(z)$$

была выше степени $F_n(w, z) = \sum_{i=1}^{n} \ldots$ хотя бы по одному переменному w_k $(k = 1, \ldots, p)$ и одному переменному z_l $(l = 1, \ldots, q)$ и чтобы у тех одночленов $z^{\mu} w^{\nu}$, которые в полиноме $F_n(w, z)$ имели коэффициенты, отличные от нуля, были не нулевые коэффициенты и в полиноме $F_{n+1}(w, z)$. При таком выборе α_i-х разложение $F(w, z)$ в ряд по степеням w и z будет содержать бесконечное число коэффициентов, отличных от нуля. Поскольку $F(w, z)$ — целая функция, ее рациональность означала бы, что $F(w, z)$ — полином. Но тогда построенная нами функция $F(w, z)$ не рациональна.

Этот пример охватывает комбинации: (2, 2); (2, 4); (4, 4); (2, 5); (4, 5); (5, 5); (5, 4); (5, 2); (4, 2).

Таким образом, примеры 5, 6, 7 охватывают каждую из 16 комбинаций (1, 5); (2, 4); (2, 5); (3, 4); (3, 5); (4, 3); (3, 3); (4, 4); (4, 5); (4, 2); (2, 2); (5, 1); (5, 2); (5, 3); (5, 4); (5, 5), не удовлетворяющих условию теоремы 3.

В заключение приведем теорему, являющуюся следствием теоремы 3.

Теорема 4. *Пусть* $\Delta_{z_1}, \ldots, \Delta_{z_{n+1}}$ — *некоторые области на комплексной плоскости. Пусть* $E_{n+1} \subset \Delta_{z_{n+1}}$ — *не менее чем счетное множество, а* $E_i \subset \Delta_{z_i}$ $(i = 1, \ldots, n)$ *более чем счетные множества.*

Если $F(z_1, z_2, \ldots, z_{n+1}) = F(z)$ — *голоморфная в* $\Delta_z = \Delta_{z_1} \times \ldots \times \Delta_{z_{n+1}}$ *функция и* $\forall i = 1, \ldots, n+1$ *при фиксированном* $(z_1^0, \ldots, z_{i-1}^0, z_{i+1}^0, \ldots, z_{n+1}^0) \in E_1 \times \cdots \times E_{i-1} \times E_{i+1} \times \cdots \times E_{n+1}$ *функция* $F(z_1^0, \ldots, z_{i-1}^0, z_i, z_{i+1}^0, \ldots, z_{n+1}^0)$ *рациональная по* z_i *в* Δ_{z_i}, *то* $F(z_1, \ldots, z_{n+1})$ — *рациональная функция в* Δ_z.

Доказательство. Доказательство ведем индукцией по размерности переменного z.

1) Пусть $F(z_1, z_2)$ голоморфна в $\Delta_{z_1} \times \Delta_{z_2}$, рациональна по z_2 при фиксированном $z_1 \in E_1$ и рациональна по z_1 при фиксированном $z_2 \in E_2$, где E_1 — более чем счетное множество из Δ_{z_1}, а E_2 — не менее чем счетное множество из Δ_{z_2}.

E_2 является a-множеством (пример 1), E_1 является одновременно b-множеством области Δ_{z_1} и c-множеством (пример 2). Тогда по теореме 3 $F(z_1, z_2)$ — рациональная функция в $\Delta_{z_1} \times \Delta_{z_2}$.

2) Пусть утверждение теоремы верно при $z = (z_1, \ldots z_n)$. Докажем его для $z = (z_1, \ldots, z_{n+1})$.

Применив предположение индукции к функции $F(z_1, \ldots, z_n, z_{n+1}^0$ при $z_{n+1}^0 \in E_{n+1}$, получим, что $F(w, z_{n+1}^0)$ где $w = (z_1, \ldots, z_n)$ есть рациональная функция w в $\Delta_w = \Delta_{z_1} \times \cdots \times \Delta_{z_n}$. Кроме того, по условию $F(w, z_{n+1})$ — рациональная функция z_{n+1} в $\Delta_{z_{n+1}}$ при фиксированном $w \in P = E_1 \times \cdots \times E_n$.

Но E_{n+1} является a-множеством (пример 1), а $E_1 \times \cdots \times E_n$ есть одновременно b-множество относительно полицилиндра Δ_w и c-множество (пример 2).

Поэтому из теоремы 3 следует справедливость утверждения индукции. Теорема доказана.

Теорема 4 неулучшаема в том смысле, что если хотя бы одно из множеств E_i конечно, либо два или больше E_i-х являются счетными множествами, то утверждение теоремы 4 неверно. Это легко показать, причем соответствующие примеры строятся аналогично примеру 5 и 7.

Автор искренне признателен Л. И. Ронкину за постановку задачи и помощь в работе.

ЛИТЕРАТУРА

1. W. F. Osgood. Lehrbuch der Funksionenteorie, т. I, ч. 1. 1929.
2. С. Бохнер и У. Т. Мартин. Функции многих комплексных переменных. М., ИЛ., 1951.

3. W. Rudin. Function theory in polydiscs. New York — Amsterdam. 1969.
4. J. Siciak. A note on rational functions of Several complex variables. „Ann. polon. math.", 1962, 12, N 1.

Поступила 2 июля 1971 г.