АСИМПТОТИЧЕСКИЕ ОЦЕНКИ ОДНОГО КЛАССА ИНТЕГРАЛОВ

А. Ф. Гришин

Для получения асимптотических оценок интегралов вида

$$f(z)=\int\limits_L g(z,t)\,e^{h(z,t)}\,dt \tag{1}$$

часто используется метод перевала. Стандартная ситуация, при которой применяется этот метод, заключается в следующем.

1. Контур интегрирования деформируется в контур L_1, состоящий из линий кратчайшего спуска или линий, по которым спуск достаточно крутой, т. е. линий, вдоль которых величина $\operatorname{Re} h(z,t)$ убывает достаточно быстро.

2. Рассматриваются критические точки локального максимума величины $\operatorname{Re} h(z,t)$ на контуре L_1.

3. Области влияния критических точек не пересекаются. Область влияния критической точки t_0 — это область, в которой в разложении в ряд Тейлора функции $h(z,t)-h(z,t_0)$ главную роль играет первый отличный от нуля член.

4. Функция $g(z,t)$ мала по сравнению с функцией $\exp h(z,t)$ и медленно меняется в области влияния критических точек.

В этом случае асимптотика функции $f(z)$ определяется вкладами критических точек. Асимптотические оценки для большего числа конкретных интегралов типа (1) и различные общие теоремы, когда имеет место описанная выше ситуация, можно найти в [1]. В [4] рассматривается случай, когда происходит слияние двух точек перевала $t_1(\alpha)$ и $t_2(\alpha)$, зависящих, как и сама функция $h(z,t)$, от параметра α. Получается равномерная по α оценка функции $f(\dot z)$ в окрестности точки α_0, $t_1(\alpha_0)=t_2(\alpha_0)$. Н. Блайштейн [5] исследовал большое число нестандартных с точки зрения условий 1—4 ситуаций. В частности, он рассмотрел интеграл

$$\int\limits_L t^r g(t)\,e^{-\lambda f(t,\alpha)}\,dt,$$

где L — некоторый контур, обходящий точку ноль. Точка перевала функции $\exp(-\lambda f(t,\alpha))$ есть точка α. Изучалось поведение интеграла при $\alpha\to 0$ и $\lambda\to\infty$. В этом случае в окрестности точки перевала расположена особенность подынтегральной функции. Частный случай $r=-1$ рассматривался раньше в [4]. Отметим еще статью [7], где дан обзор работ по асимптотическим методам и приведена обширная библиография.

В данной статье исследуются интегралы вида

$$I=\int_{n}^{n_2} e^{-h(z,\, t)}\,dt,\ \ n_2>n,$$

$h(z, t)$ — аналитическая функция на сегменте $[n, n_2]$. Точка n, возможно, попадает в область влияния точки перевала. При определенных ограничениях на функцию $h(z, t)$ для I получается асимптотическое представление. Задача об оценке интеграла I возникает при нахождении асимптотических рядов для частных сумм рядов и неполных интегралов типа неполной гамма-функции

$$\Gamma(\alpha, z)=\int_{z}^{\infty} t^{\alpha-1}e^{-t}\,dt.$$

Исследования, аналогичные нашим, при вещественной функции $h(x, t)$ проведены в [6].

Далее сформулируем основной результат работы.

Теорема 1. *Пусть функция* $h(z, t)$ *такова, что*

$$1)\ \operatorname{Re} h'(z, t)\geqslant 0,\ \ n\leqslant t\leqslant n_2;$$
$$2)\ \operatorname{Re} h''(z, t)\geqslant 0,\ \ n\leqslant t\leqslant n_2;$$
$$3)\ |\arg a|\leqslant \frac{3}{4}\pi-\delta,\ \ \delta>0,$$
$$a=\frac{h'(z, n)}{\sqrt{h''(z, n)}},\ \ \operatorname{Re}\sqrt{h''(z, n)}>0.$$

Пусть для всякого целого $\sigma>0$ *существует число* $n_1>n$, $n_1-n=\Delta n$ *и целые числа* $p_0>\sigma$, $k_0>1+\frac{1}{3}\sigma$ *такие, что*

$$4)\ \frac{e^{\operatorname{Re}[h(z,\, n)-h(z,\, n_1)]}}{\operatorname{Re} h'(z, n_1)}=o(1)A_\sigma;$$

$$5)\ \max_{n\leqslant t\leqslant n_1}\frac{|h^{(p_0+1)}(z, t)|}{B^{p_0+2}}=o(1)A_\sigma;$$

$$6)\ \max_{n\leqslant t\leqslant n_1}\frac{|h^{(3)}(z, t)|^{k_0}}{B^{3k_0+1}}=o(1)A_\sigma;$$

$$7)\ \operatorname{Re} h''(z, t)\sim\operatorname{Re} h''(z, n),\ \ n\leqslant t\leqslant n_1;$$

$$8)\ \frac{[h^{(p)}(z, n)]^{\frac{1}{p}}}{B}=o(1),\ \ 2\leqslant p\leqslant p_0;$$

9) $\dfrac{[h^{(p)}(z, n)]^{\frac{1}{p}}}{[h^{(k)}(z, n)]^{\frac{1}{k}}} = o(1), \; p > k \geqslant 3;$

10) $\xi = \dfrac{1}{6} \max\limits_{n \leqslant t \leqslant n_1} |h^{(3)}(z, t)| (\Delta n)^3 = O(1),$

$$h^{(p)}(z, n) (\Delta n)^p = O(1), \; 3 < p \leqslant p_0.$$

Тогда для любого $n_2 \geqslant n_1$ имеет место равенство

$$\int\limits_n^{n_2} e^{-h(z, t)}\, dt = e^{-h(z, n)} \left\{ \frac{1}{\sqrt{h''(z, n)}} \times \right.$$

$$\times \left[\psi(a) + \sum_{m \leqslant \sigma} \sum_{kr + ls = m} C_{krls} \times \right.$$

$$\left. \left. \times \frac{[h^{(k)}(z, n)]^r [h^{(l)}(z, n)]^s}{[h''(z, n)]^{\frac{m}{2}}} \psi_m(a) \right] + o(1) A_\sigma \right\} =$$

$$= e^{-h(z, n)} \left\{ \frac{1}{h'(z, n)} \left[\varphi(a) + \right. \right.$$

$$+ \sum_{m \leqslant \sigma} \sum_{kr + ls = m} C_{krls} \frac{[h^{(k)}(z, n)]^r [h^{(l)}(z, n)]^s}{[h'(z, n)]^m} \times$$

$$\left. \left. \times \varphi_m(a) \right] + o(1) A_\sigma \right\},$$

$$C_{krls} = \frac{(-1)^{r+s} r! s!}{(r+s)! (k!)^r (l!)^s}.$$

В условиях теоремы асимптотические равенства справедливы по некоторому направлению S, о котором мы еще скажем ниже. Величина A_σ определяется равенством $A_\sigma = \min(B_\sigma, C_\sigma)$,

$$B_\sigma = \left| \frac{1}{h'(z, n)} \left[\frac{h^{(3)}(z, n)}{(h'(z, n))} \right]^{r_0} \left[\frac{h^{(4)}(z, n)}{(h'(z, n))^4} \right]^{s_0} \right|,$$

$$C_\sigma = \left| \frac{1}{\sqrt{h''(z, n)}} \left[\frac{h^{(3)}(z, n)}{(\sqrt{h''(z, n)})^3} \right]^{r_0} \left[\frac{h^{(4)}(z, n)}{(h''(z, n))^2} \right]^{s_0} \right|,$$

где $3r_0 + 4s_0 = \sigma$, $0 \leqslant s_0 \leqslant 2$, $r_0 \geqslant 0$. Величина B определяется равенством

$$B = \max\left(\operatorname{Re} h'(z, n), \sqrt{\operatorname{Re} h''(z, n)}\right).$$

Функция $\psi(a)$ равна

$$\psi(a) = \int_0^\infty e^{-\left(\frac{1}{2}u^2 + au\right)}\, du,$$

$$\psi_m(a) = (-1)^m \frac{d^m \psi(a)}{da^m} = \int_0^\infty u^m e^{-\left(\frac{1}{2}u^2 + au\right)}\, du,$$

$$\varphi(a) = a\psi(a), \ \varphi_m(a) = a^{m+1}\psi_m(a).$$

В связи с теоремой необходимо сделать следующие замечания.

1. Направление S может быть одним из следующих направлений:

а) $n \to \infty$, б) $z \to z_0$, $|z_0| \leqslant \infty$,

в) $n \to \infty$, $z \to \infty$ г) функция $h(z, t)$

зависит еще от некоторого параметра α и направление S есть направление $\alpha \to \alpha_0$. Возможны и другие направления. Если в S не входит переменная z, то асимптотическое равенство (2) будет равномерным относительно z, если условия теоремы выполняются равномерно относительно z.

2. При ограничениях на a, установленных в теореме, функция $\psi_m(a)$ ограничена при $|a| \leqslant 1$, а функция $\varphi_m(a)$ — при $|a| \geqslant 1$. Первое очевидно, а второе следует из равенств 8.2 (19) и 8.4 (1), приведенных в [2]. Кроме того,

$$\psi_m(0) = 2^{\frac{m-1}{2}}\Gamma\left(\frac{m+1}{2}\right), \quad \lim_{a\to\infty}\varphi_m(a) = 1.$$

3. Тут и далее отсутствие аргументов у функции $h(z, t)$ и ее производных означает, что таковыми являются z и n. Величина

$$D_m = \sum_{\substack{kr+ls=m \\ 3\leqslant k<l \ \ r\geqslant 0, \ s\geqslant 0}} C_{krls}\, [h^{(k)}]^r\, [h^{(l)}]^s$$

эквивалентна в силу условия 9 теоремы тому слагаемому, для которого $k = 3$, $l = 4$, $0 \leqslant s \leqslant 2$.

Далее из условий 8 и 9 вытекает,

$$\frac{D_{m+1}}{(h'')^{\frac{m+1}{2}}}\psi_{m+1}(a) = o(1)\frac{D_m}{(h'')^{m/2}}\psi_m(a)$$

при $|\arg a| \leqslant \frac{3\pi}{4} - \delta$, $\delta > 0$ вне объединения кругов радиуса $\delta_1 > 0$ с центрами в корнях функции ψ_m. Корни функции ψ_m разбиваются на пары комплексно-сопряженных корней. При этом, как следует из формул 8.2 (19), 8.4 (1), 8.4 (2) приведенных в [2], для корней a_{km} этой функции, расположенных в верхней полуплоскости, справедливо соотношение $\arg a_{km} = \frac{3\pi}{4} - \varepsilon_{km}$, где $\varepsilon_{km} \to 0$ при $k \to \infty$ и $\varepsilon_{km} > 0$ при достаточно больших k. Кроме того, из определения функции $\psi(a)$ следует, что

$$-\operatorname{Im}\psi(a) = \sum_{k=0}^{\infty} \int\limits_{\frac{\pi}{\beta}k}^{\frac{\pi}{\beta}(k+1)} e^{-\left(\frac{1}{2}u^2+\alpha u\right)} \sin \beta u \, du,$$

$a = \alpha + i\beta$. При $\alpha \geqslant 0$ написанный ряд знакочередующийся, модуль общего члена которого, монотонно убывая, стремится к нулю. Поэтому $\operatorname{Im}\psi(a) < 0$ при $\alpha \geqslant 0$ и, следовательно, функция $\psi(a)$ не имеет корней в замкнутой правой полуплоскости. Коль скоро речь идет о нулях функции $\psi(a)$, докажем еще, что $\psi(a) \neq 0$ при $|\pi - \arg a| \leqslant \frac{1}{4}\pi$, хотя это утверждение в дальнейшем не будет использовано. Для этого заметим, что

$$\psi(a) + \psi(-a) = \sqrt{2\pi} \exp\left(\frac{1}{2}a^2\right).$$

Поэтому достаточно показать, что

$$\sqrt{2\pi} \exp\left(\frac{1}{2}a^2\right) - \psi(a) \neq 0 \text{ при } |\arg a| \leqslant \frac{\pi}{4}$$

из формул 8.2(19) и 8.4(1) в [2] следует, что при всех достаточно больших R выполняется неравенство

$$|\psi(\mathrm{Re}^{i\varphi})| < \sqrt{2\pi} \left|\exp\left(\frac{1}{2}R^2 e^{2i\varphi}\right)\right|, \ |\varphi| \leqslant \frac{\pi}{4}.$$

При $a = re^{\pm\frac{i\pi}{4}}$

$$\psi(a) = \frac{1}{\sqrt{2}} e^{\pm i\left(\frac{\pi}{4}+\frac{r^2}{2}\right)} \int\limits_{\frac{r^2}{2}}^{\infty} \frac{\cos v \mp i \sin v}{\sqrt{v}} dv =$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2}} e^{\pm i\left(\frac{\pi}{4}+\frac{r^2}{2}\right)} \left[C\left(\frac{r^2}{2}, \frac{1}{2}\right) \mp iS\left(\frac{r^2}{2}, \frac{1}{2}\right)\right]$$

в обозначениях § 9, 10, [2]. Легко проверить, что при $x \geqslant 0$

$$C^2\left(x, \frac{1}{2}\right) + S^2\left(x, \frac{1}{2}\right) < 4\pi.$$

Теперь из теоремы Руше следует наше утверждение.

Прокомментируем условия теор мы. Начнем с условия 2. Это условие означает, что контур интегрирования лежит в ущелье. Другими словами, если рассматривать достаточно ма ую окрестность точки перевала t_0, то контур лежит в той части окрестности, где выполняется неравенство

$$\operatorname{Re} h(z, t) < \operatorname{Re} h(z, t_0).$$

Условие 1 означает, что контур лежит по одну сторону перевала. Если это условие не выполняется и контур проходит через точку перевала, то представим контур L в виде $L_1 \diagdown L_2$, где L_2 лежит по одну сторону перевала, а концы контура L_1 лежат вне области влияния точки перевала.

Условие 3 необходимо, чтобы избежать трудностей, связанных с тем, что корни a_{km} функции ψ_m асимтотически приближаются к лучам $\arg a = \pm \frac{3\pi}{4}$. Условия 4—8, 10 можно трактовать как условия отграниченности от нуля величины $\operatorname{Re} h''(z, t)$ или как условие того, что в точке n имеет место ярко выраженный максимум функции $|\exp(-h(z, t))|$. Условие 9 обеспечивает более медленный рост или более быстрое убывание каждого последующего члена асимптотического разложения по сравнению с предыдущими. К недостаткам теоремы следует отнести то, что условия 4—6 накладывают ограничения на рост $\operatorname{Im} h'(z, t)$. Эти ограничения не естественные, и в общем случае неясно, как их устранить. В частных случаях, когда эти ограничения не выполняются, мы оказываемся в условиях применения метода стационарной фазы, и асимптотика интеграла I тогда считается этим методом.

Если мы хотим получить только первый член асимптотического разложения, то формулировка теоремы упрощается.

Теорема 2. *Пусть функция* $h(z, t)$ *такова, что*

$$1)\ \operatorname{Re} h'(z, t) \geqslant 0 \quad n \leqslant t \leqslant n_2;$$

$$2)\ \operatorname{Re} h''(z, t) \geqslant 0 \quad n \leqslant t \leqslant n_2;$$

$$3)\ |\arg a| \leqslant \frac{3\pi}{4} - \delta, \ \delta > 0,$$

$$a = \frac{h'(z, n)}{\sqrt{h''(z, n)}}, \ \operatorname{Re} \sqrt{h''(z, n)} > 0.$$

Пусть существует $n_1 > n$, $n_1 - n = \Delta n$, *и целые числа* p_0 *и* k_0 *такие, что*

$$4)\ \frac{e^{\operatorname{Re}[h(z, n) - h(z, n_1)]}}{\operatorname{Re} h'(z, n_1)} = o(1) A,$$

$$A = \min\left(\frac{1}{|h'(z, n)|}, \frac{1}{\sqrt{|h''(z, n)|}}\right);$$

$$5)\ \max_{n \leqslant t \leqslant n_1} \frac{|h^{(p_0)}(z, t)|}{B^{p_0+1}} = o(1) A;$$

$$6)\ \max_{n \leqslant t \leqslant n_1} \frac{|h^{(3)}(z, t)|^{k_0}}{B^{3k_0+1}} = o(1) A;$$

$$7)\ \operatorname{Re} h''(z, t) \sim \operatorname{Re} h''(z, n) \quad n \leqslant t \leqslant n_1;$$

$$8)\ \frac{h^{(p)}(z, n)}{B^p} = \mathrm{o}(1)\quad 3 \leqslant p \leqslant p_0;$$

$$9)\ \xi = \frac{1}{6} \max_{n \leqslant t \leqslant n_1} |h^{(3)}(z, t)|\,(\Delta n)^3 = \mathrm{O}(1).$$

Тогда при $n_2 \geqslant n_1$ справедливо асимптотическое равенство

$$I = \int\limits_n^{n_2} e^{-h(z,\,t)}\,dt = (1 + \mathrm{o}(1)) \frac{1}{\sqrt{h''(z, n)}} \psi(a) \times$$
$$\times e^{-h(z,\,n)} = (1 + \mathrm{o}(1)) \frac{1}{h'(z, n)} \varphi(a) e^{-h(z,\,n)}$$

при $|a_k - a| \geqslant \delta_1 > 0$, a_k — корни функции $\psi(a)$.

Доказательство теоремы 1. Докажем эту основную теорему. Не ограничивая общности, будем считать в процессе доказательства, что $h(z, n) = 0$. Теперь изложим план доказательства.

1. Вначале с помощью условия 4 покажем, что интеграл по отрезку $[n_1, n_2]$ есть $\mathrm{o}(1) A_\sigma$. Затем разложим функцию $h(z, t)$ в ряд Тейлора с остаточным членом

$$h(z, t) = \frac{h'}{1!}(t - n) + \frac{h''}{2!}(t - n)^2 + \cdots +$$
$$+ \frac{h^{(p_0)}}{p_0!}(t - n)^{p_0} + R_{p_0}(z, t) = P_{p_0}(z, t) + R_{p_0}(z, t).$$

Далее разложим в ряд Тейлора функцию $\exp(-R_2(z, t))$

$$e^{-R_2(z,\,t)} = 1 - R_2 + \cdots + \frac{(-1)^{k_0 - 1}}{(k_0 - 1)!} R_2^{k_0 - 1} +$$
$$+ (-1)^{k_0} \frac{\xi_1}{k_0!} R_2^{k_0}, \text{ где } |\xi_1| \leqslant e^{\xi},$$

ξ — величина из условия 10 теоремы. Таким образом, функцию $\exp(-h(z, t))$ представим в виде

$$e^{-h(z,\,t)} = e^{-P_2}\left[\left(1 - R_2 + \cdots + \frac{(-1)^{k_0 - 1}}{(k_0 - 1)!} R_2^{k_0 - 1}\right) + \right.$$
$$\left. + \frac{(-1)^{k_0}}{k_0!} \xi_1 R_2^{k_0}\right].$$

2. Интеграл

$$\int\limits_n^{n_1} e^{-h(z,\,t)}\,dt$$

представим в виде суммы двух интегралов соответственно тем двум слагаемым, которые мы выделили в квадратных скобках. Покажем с помощью условия 6, что интеграл от второго слагаемого равен $\mathrm{o}(1) A_\sigma$.

3. С помощью условия 5 докажем, что мы совершаем ошибку порядка $\mathrm{o}(1) A_\sigma$, заменяя в первом слагаемом величину $R_2(z, t)$ на величину $\hat{R}_2(z, t) = R_2(z, t) - R_{p_0}(z, t)$.

4. Для функции

$$e^{-P_2}\left(1-\hat{R}_2+\cdots+\frac{(-1)^{k_0-1}}{(k_0-1)!}\hat{R}_2^{k_0-1}\right)$$

интеграл по сегменту $[n, n_1]$ заменим с точностью до $o(1)A_\sigma$ на интеграл по полуоси $[n, \infty)$.

5. Введением новой переменной $u=\sqrt{h''(z, n)}\,(t-n)$ представим полученный интеграл в виде суммы слагаемых вида

$$\frac{D_m\psi_m(a)}{(h'')^{m/2}}=\frac{D_m\varphi_m(a)}{(h')^m} \tag{2}$$

и, доказав, что каждое такое слагаемое, не вошедшее в двойную сумму равенства (2), есть $o(1)A_\sigma$, получим это равенство.

Приступим к осуществлению изложенного плана. Для этого представим рассматриваемый интеграл в виде суммы

$$I=\int_n^{n_2} e^{-h(z,\,t)}\,dt=\int_n^{n_1}+\int_{n_1}^{n_2}=I_1+I_2. \tag{3}$$

Оценим I_2:

$$|I_2|\leqslant e^{-\operatorname{Re}h(z,\,n_1)}\int_{n_1}^{n_2} e^{-[\operatorname{Re}h(z,\,t)-h(z,\,n_1)]}\,dt.$$

Сделаем замену $\operatorname{Re}[h(z, t)-h(z, n_1)]=v$. Такая замена возможна, так как $\operatorname{Re}h'(z, t)>0$. Получим

$$|I_2|\leqslant e^{-\operatorname{Re}h(z,\,n_1)}\int_0^{v_0}\frac{e^{-v}}{\operatorname{Re}h'(z,t)}\,dv.$$

Из условия 2 теоремы следует, что $\operatorname{Re}h'(z, t)$ — возрастающая функция. Поэтому

$$|I_2|\leqslant\frac{e^{-\operatorname{Re}h(z,\,n_1)}}{h'(z,\,n_1)}=o(1)A_\sigma.$$

Последнее соотношение есть условие 4 теоремы. Далее мы должны оценить интеграл

$$I_3|=\left|\int_n^{n_1}\frac{(-1)^{k_0}}{k_0}\xi_1R_2^{k_0}e^{-P_2}\,dt\right|\leqslant$$

$$\leqslant O(1)\max_{n\leqslant t\leqslant n_1}|h^{(3)}(z, t)|^{k_0}\times$$

$$\times\int_n^{\infty}(t-n)^{3k_0}e^{-\operatorname{Re}\left[\frac{h'}{1!}(t-n)+\frac{h''}{2!}(t-n)^2\right]}\,dt=$$

$$=O(1)\max_{n\leqslant t\leqslant n_1}\frac{|h^{(3)}(z, t)|^{k_0}}{[\operatorname{Re}h''(z, n)]^{\frac{3k_0+1}{2}}}\psi_{3k_0}\left(\frac{\operatorname{Re}h'(z, n)}{\sqrt{\operatorname{Re}h''(z, n)}}\right).$$

Теперь оценка $I_3 = o(1) A_\sigma$ следует из условия 6 и замечания 2 к теореме. Второй пункт плана выполнен. Для обоснования следующего шага — замены R_2 на $\hat{R}_2$ — нужно оценить интеграл

$$|I_4| = \left| \int_n^{n_1} (h^{(k)})^r (t-n)^{kr} R_{p_0}^s e^{-P_2} dt \right| \leqslant$$

$$\leqslant |h^{(k)}|^r \max_{n \leqslant t \leqslant n_1} |h^{(p_0)}(z, t)|^s \times$$

$$\times \int_n^\infty (t-n)^{kr+(p_0+1)s} e^{-\operatorname{Re}\left[\frac{h'}{1!}(t-n)+\frac{h''}{2!}(t-n)^2\right]} =$$

$$= \left[\frac{h^{(k)}}{(\operatorname{Re} h'')^{k/2}}\right]^r \left[\frac{\max\limits_{n \leqslant t \leqslant n_1} |h^{(p_0+1)}(z, t)|}{(\operatorname{Re} h'')^{\frac{p_0+1}{2}}}\right]^{s-1} \times$$

$$\times \max_{n \leqslant t \leqslant n_1} \frac{|h^{(p_0+1)}|(z, t)}{(\operatorname{Re})\, h''^{\frac{p_0+2}{2}}} \psi_{kr+(p_0+1)s}\left(\frac{\operatorname{Re} h'}{\sqrt{\operatorname{Re} h''}}\right). \qquad (4)$$

Величина $s \geqslant 1$. Если $s = 1$, то оценка $I_4 = o(1) A_\sigma$ следует из условий 5 и 8 теоремы. Если $s > 1$ и $\sqrt{\operatorname{Re} h''} \geqslant \operatorname{Re} h'$, то второй сомножитель в вышенаписанном произведении есть $o(1)$ в силу условия 5. Следовательно, оценка $I_4 = o(1) A_\sigma$ выполняется. Эта оценка будет выполняться и при условии $\operatorname{Re} h' \geqslant \sqrt{\operatorname{Re} h''}$, что легко проверить, заменив в (4) функцию ψ через функцию φ.

Для реализации четвертого пункта плана достаточно показать, что интеграл

$$I_5 = \int_{n_1}^\infty (h^{(k)})^r (h^{(l)})^s (t-n)^{kr+ls} e^{-P_2} dt =$$

$= o(1) A_\sigma$, $3 \leqslant k < l \leqslant P_0$, $r + s < k_0$. Пусть $\mu = kr + ls$. Имеем

$$(t-n)^\mu = (t - n_1 + \Delta n)^\mu = \sum_{\nu=0}^{\mu} C_\mu^\nu (\Delta n)^\nu (t-n_1)^{\mu-\nu},$$

$$P_2(z, t) = h'\Delta n + \frac{1}{2} h'' (\Delta n)^2 +$$

$$+ (h' + h''\Delta n)(t - n_1) + \frac{1}{2} h'' (t-n_1)^2.$$

Рассмотрим один из интегралов

$$I_6 = \int_{n_1}^\infty (h^{(k)})^r (h^{(l)})^s (\Delta n)^\nu (t-n_1)^{\mu-\nu} e^{-P_2} dt =$$

$$= (h^{(k)})^r (h^{(l)})^s (\Delta n)^\nu e^{-h'\Delta n - \frac{1}{1} h''(\Delta n)^2} \times$$

$$+ \int_{n_1}^\infty (t-n_1)^{\mu-\nu} e^{-\frac{1}{2} h''(t-n_1)^2} e^{-(h'+h''\Delta n)(t-n_1)} dt.$$

Используя неравенство

$$(t-n_1)^{\mu-\nu} e^{-\frac{1}{2}\operatorname{Re}h''(t-n_1)^2} \leqslant$$
$$\leqslant C(\mu-\nu)\left(\frac{1}{\sqrt{\operatorname{Re}h''}}\right)^{\mu-\nu}, \; t \geqslant n_1,$$

получающееся из

$$x^k e^{-\frac{1}{2}x^2} \leqslant C(k), \; k \geqslant 0, \; 0 \leqslant x < \infty,$$

получим

$$|I_6| \leqslant O(1)\,|h^{(k)}|^r\,|h^{(l)}|^s (\Delta n)^\nu \left(\frac{1}{\sqrt{\operatorname{Re}h''}}\right)^{\mu-\nu} \times$$
$$\times \frac{1}{\operatorname{Re}(h'+h''\Delta n)} e^{-\operatorname{Re}(h'\Delta n+\frac{1}{2}h''(\Delta n)^2)}.$$

Далее, пользуясь формулой Тейлора и условиями 7, 10, находим, что

$$\operatorname{Re}h(z, n_1) = \operatorname{Re}\Big[h'(z, n)\Delta n + \frac{1}{2}h''(z, n)(\Delta n)^2 +$$
$$+ \frac{1}{6}h^{(3)}(z, \xi_2)(\Delta n)^3\Big], \; n < \xi_2 < n_1,$$
$$\operatorname{Re}\Big[h'(z, n)\Delta n + \frac{1}{2}h''(z, n)(\Delta n)^2\Big] = \operatorname{Re}h(z, n_1) + O(1),$$
$$\operatorname{Re}h'(z, n_1) = \operatorname{Re}[h'(z, n) + h''(z, \xi_3)\Delta n] =$$
$$= \operatorname{Re}[h'(z, n) + h''(z, n)\Delta n] + o(1)\operatorname{Re}h''(z, n)\Delta n =$$
$$= (1+o(1))\operatorname{Re}(h'+h''\Delta n).$$

Из полученного следует, что при $kr < \nu$ I_6 оценивается так:

$$|I_6| \leqslant O(1)\,|h^{(k)}(\Delta n)^k|^r\,|h^{(l)}(\Delta n)^{(l)}|^{\frac{\nu-kr}{l}} \times$$
$$\times \left|\frac{(h^{(l)})^{1/l}}{\sqrt{\operatorname{Re}h''}}\right|^{\mu-\nu} \frac{e^{-\operatorname{Re}h(z, n_1)}}{\operatorname{Re}h'(z, n_1)}.$$

Теперь, используя условия 4, 8 и 10, получим, что

$$I_6 = o(1)\,A_\sigma.$$

Аналогично получается такая оценка при $kr > \nu$. Четвертый пункт плана выполнен. Поэтому

$$I = \int_n^\infty e^{-P_2}\left(1 - \hat{R}_2 + \cdots + \frac{(-1)^{k_0-1}}{(k_0-1)!}\hat{R}_2^{k_0-1}\right)dt + o(1)\,A_\sigma.$$

На следующем этапе вместо $\hat{R}_2$ подставим его значение, раскроем скобки и в интеграле сделаем замену $\sqrt{h''}\times(t-n) = u$. Затем путь интегрирования заменим на положительную полуось.

В результате получим

$$I = \frac{1}{\sqrt{h''}}\left[\psi(a) + \sum_{m=3}^{\sigma} \frac{D_m}{(h'')^{m/2}} \psi_m(a) + \right.$$

$$\left. + \sum_{m=\sigma+1}^{p_0(k_0-1)} \frac{E_m}{(h'')^{m/2}} \psi_m(a)\right] + o(1) A_\sigma,$$

где E_m — часть слагаемых, из которых состоит D_m; для них выполняются неравенства $r + s \leqslant k_0 - 1$, $3 \leqslant k < l \leqslant p_0$. Из условия 6 и 9 следует, что для каждого $m > \sigma$ величина

$$\frac{E_m}{(h'')^{\frac{m+1}{2}}} \psi_m(a) = o(1) A_\sigma.$$

Тем самым теорема полностью доказана.

В качестве приложения теоремы найдем равномерную относительно z асимптотику функции

$$I_n(z) = \int_0^n \frac{e^{uz}}{\Gamma(1+u)} du, \quad n \to \infty.$$

При $n = \infty$ получается функция $\nu(e^z, 0)$, где ν — функция Вольтерра [3, гл. 5].

Вид асимтотической формулы будет существенно зависеть от знака величины

$$\frac{\Gamma'(1+n)}{\Gamma(1+n)} - x, \quad z = x + iy.$$

Пусть вначале

$$x \leqslant \frac{\Gamma'(1+n)}{\Gamma(1+n)}. \tag{5}$$

Рассмотрим интеграл

$$I^{(n)} = \int_n^\infty \frac{e^{uz}}{\Gamma(1+u)} du.$$

Обозначим $h(u) = h(z, u) = \ln \Gamma(1+u) - uz$. Тогда

$$h'(u) = \frac{\Gamma'(1+u)}{\Gamma(1+u)} - z,$$

$$h''(u) = \frac{d^2}{du^2} \ln \Gamma(1+u) > 0, \quad 0 \leqslant u < \infty.$$

Предположим дополнительно, что выполняются неравенства

$$x \geqslant 0, \quad |y| \leqslant n. \tag{6}$$

В этом случае для величины A в теореме 2 верна оценка

$$A \geqslant \frac{1}{n + \frac{\Gamma'(1+n)}{\Gamma(1+n)}}.$$

Тогда, как легко проверить, для интеграла $I^{(n)}$ выполняются все условия теоремы 2 при $\Delta n = n^{7/12}$, $p_0 = k_0 = 5$. Согласно этой теореме получим

$$I^{(n)} = \gamma \frac{e^{zn}}{\Gamma(1+n)} = \gamma \frac{e^{zn}}{n!}; \tag{7}$$

$$\gamma = (1 + o(1)) \frac{1}{\sqrt{h''(z, n)}} \psi(a) = (1 + o(1)) \frac{1}{h'(z, n)} \varphi(a),$$

$$a = \frac{h'(z, n)}{\sqrt{h''(z, n)}}, \ \operatorname{Re} a \geqslant 0.$$

Если (6) не выполняется, применим формулу

$$\int_n^\infty e^{-h(u)}\,du = \frac{e^{-h(n)}}{h'(n)} - \frac{h''(n)}{h'(n)^3} e^{-h(n)} -$$

$$- \int_n^\infty \frac{h'''(u)\,h'(u) - 3\,(h''(u))^2}{h'(u)^4} e^{-h(u)}\,du,$$

получающуюся интегрированием по частям. Так как $\operatorname{Im} h'(z, u) = -y$, а $\operatorname{Re} h'(z, u)$ возрастает, то возрастает и функция $|h'(z, u)|$. Поэтому

$$\left| \int_n^\infty e^{-h(u)}\,du - \frac{e^{-h(n)}}{h'(n)} \right| \leqslant \frac{e^{-\operatorname{Re} h(z, n)}}{|h'(z, n)|} \times$$

$$\times \left[\left| \frac{h''(z, n)}{h^{1^2}(z, n)} \right| + \frac{1}{|h'(z, n)|^2} \int_n^\infty |h^{(3)}(u)\ du + \right.$$

$$\left. + 3 \frac{1}{|h'(z,n)^3|} \int_n^\infty (h''(u))^2\,du \right].$$

Из этого неравенства следует, что соотношение (7) имеет место при выполнении (5) независимо от выполнения формулы (6). Следовательно,

$$I_n(z) = \int_0^\infty \frac{e^{uz}}{\Gamma(1+u)}\,du - \gamma \frac{e^{nz}}{n!}. \tag{8}$$

Отметим еще, что согласно лемме 5.3 [3, стр. 270] справедливо соотношение

$$\int_0^\infty \frac{e^{uz}}{\Gamma(1+u)}\,du = \begin{cases} e^{e^z} + O\left(\frac{1}{z}\right), & |y| \leqslant \alpha, \\ O\left(\frac{1}{z}\right), & |y| > \alpha, \end{cases}$$

$$\frac{\pi}{2} < \alpha < \pi.$$

Если

$$x \geqslant \frac{\Gamma'(1+n)}{\Gamma(1+n)},$$

то, сделав в интервале I_n замену $u = -v$, получим

$$I_n = \int_{-n}^{0} e^{-\ln(1-v)-vz}\,dv.$$

Теперь для данного интеграла применим предыдущие рассуждения и получим

$$I_n(z) = \gamma_1 \frac{e^{nz}}{n!},$$

$$\gamma_1 (1 + o(1)) \frac{1}{\sqrt{h''(z, n)}} \psi(-a) =$$

$$= (1 + o(1)) \frac{1}{h'(z, n)} \varphi(-a),$$

где h — та же функция, что и в формуле (8). Таким образом

$$I_n(z) = \begin{cases} \int_0^\infty \frac{e^{uz}}{\Gamma(1+u)}\,du - \gamma \frac{e^{nz}}{n!}; \\ \text{при } x \leqslant \frac{\Gamma'(1+n)}{\Gamma(1+n)}; \\ \gamma_1 \frac{e^{nz}}{n!}; \\ \text{при } x \geqslant \frac{\Gamma'(1+n)}{\Gamma(1+n)}. \end{cases}$$

ЛИТЕРАТУРА

1. М. А. Ефграфов. Асимптотические оценки и целые функции. М., «Наука», 1962.

2. Г. Бейтман, А. Эрдейи. Высшие трансцендентные функции, т. 2, М., «Наука», 1966.

3. М. М. Джрбашян. Интегральные преобразования и представления функций в комплексной области. М., «Наука», 1966.

4. C. Chester, B. Fridman, F. Ursel. An extension of the method of stepest descents. Proc. Camb. Phil. Soc. 53 (1957), 599—611.

4. N. Bleistein. Uniform asymptotic expansion of integral with stationary point near algebraic singularity. Comm. Pure Appl. Math. 19 (1966), 353—370.
6. R. Roland. Eine asymptotishe Darstelung von Parameterintegralen. Math. Nach., 36 N 1/2 (1968), 79—92.
7. Э. Я. Риекстыньш, Т. Т. Цирулис. О методах, применяемых к асимптотическому представлению функций, определяемых интегралами, при больших значениях параметра. «Латвийск. матем. ежегодник», 7, 1962.

Поступила 4 июля 1971 г.