УДК 513.88

П. А. ЧАЛОВ

ПОПЕРЕЧНИКИ ПО БЕРНШТЕЙНУ МНОЖЕСТВ В КООРДИНАТНЫХ ПРОСТРАНСТВАХ ОРЛИЧА

С середины пятидесятых годов в теории приближений стали развиваться методы аппроксимации, основанные на геометрических характеристиках множеств. Одной из таких характеристик являются n-поперечники по Бернштейну, которые ввел В. М. Тихомиров [1].

В настоящее время известно довольно большое количество работ, в которых исследуются n-поперечники по Бернштейну функциональных классов. Эти исследования нашли свое отражение в монографии [2]. Там же имеется довольно обширный перечень более ранних работ.

Пусть B — банахово пространство и S — единичный шар в нем. Для каждого центрально-симметричного выпуклого множества K в B и каждого n-мерного подпространства E_n пространства B через $b(E_n, K, S)$ обозначим число, определяемое по формуле $b(E_n, K, S) = \inf\{\|x\|_S/\|x\|_K : x \in E_n, x \neq 0\}$. Величина $b_n(K, S) = \sup\limits_{E_n} b(E_n, K, S)$, где sup берется по всем n-мерным подпространствам E_n пространства B, называется n-поперечником по Бернштейну для множества K.

Непрерывная выпуклая функция $M(u)$ называется N-функцией, если она четна и удовлетворяет следующим условиям: $\lim\limits_{u\to 0} M(u)/u = 0$; $\lim\limits_{u\to\infty} M(u)/u = \infty$ [см., например, 3, с. 19—20].

Говорят [см., например, 4], что N-функция $M(u)$ удовлетворяет Δ_2-условию для малых u, если $\lim\limits_{u\to 0} M(2u)/M(u) < \infty$.

Координатное пространство Орлича l_M — это множество числовых последовательностей $x = \{\xi_i, i \in N\}$, для которых конечна норма $\|x\|_{(M)} = \inf\{k > 0 : \sum\limits_{i=1}^{\infty} M(\xi_i/k) \leqslant 1\}$. Эта норма называется нормой Люксембурга. В случае, когда N-функция $M(u)$ удовлетворяет Δ_2 — условию для малых u, норма Люксембурга элемента x является корнем уравнения

$$\sum_{i=1}^{\infty} M(\xi_i/k) = 1.$$

N — функции $M(u)$ и $F(u)$ называются эквивалентными, если $l_M = l_F$. В дальнейшем через $M^{-1}(u)$ будем обозначать функцию, обратную к функции $M(u)$ [5].

В этой статье получены следующие утверждения.

Теорема 1. *Пусть $M(u)$ — N — функция, удовлетворяющая Δ_2 — условию для малых u. Если B_1 и $B_{(M)}$ — единичные шары соответственно пространств l_1 и l_M, то $b_n(B_1, B_{(M)}) = 1/nM^{-1}(1/n)$.*

Теорема 2. *Пусть N — функции $M(u)$ и $F(u)$ удовлетворяют Δ_2-условию для малых u и имеют непрерывные производные. Если функция $\varphi(u) = M^{-1}[F(u)]$ выпуклая, а $B_{(M)}$ и $B_{(F)}$ — единичные шары соответственно пространств l_M и l_F, то $b_n(B_{(M)}, B_{(F)}) = M^{-1}(1/n)/F^{-1}(1/n)$.*

Теорема 3. *Пусть N-функции $M(u)$ и $F(u)$ удовлетворяют Δ_2-условию для малых u, а функция $\varphi(u) = M^{-1}[F(u)]$ — вы-*

пуклая. Если $B_{(M)}$ и $B_{(F)}$ — единичные шары соответственно пространств l_M и l_F, то существуют положительные постоянные α и β такие, что $\alpha M^{-1}(1/n)/F^{-1}(1/n) \leqslant b_n(B_{(M)}, B_{(F)}) \leqslant \beta M^{-1}(1/n)/F^{-1}(1)/n)$.

Сформулированные выше теоремы 1 и 2 доказываются путем получения оценок чисел $b_n(K, S)$ снизу и сверху. Для оценки сверху используется следующая

Лемма 1. *В любом n-мерном подпространстве пространства c_0 найдется нормированный элемент x такой, что не менее n его координат равны по модулю единице.*

Для получения оценки снизу в теореме 2 нам потребуется

Лемма 2. *Пусть N-функции $M(u)$ и $F(u)$ имеют непрерывные производные, а функция $\varphi(u) = M^{-1}[F(u)]$ — выпуклая. Тогда, если $x_1 \geqslant x_2 \geqslant \ldots \geqslant x_n \geqslant 0$ и $M(x_1)+M(x_2)+\ldots+M(x_n)=1$, то $\sum_{i=1}^{j} x_i \leqslant \sum_{i=1}^{j} \varphi[x_i F^{-1}(1/n)/M^{-1}(1/n)]$ для всех $j = 1, 2, \ldots, n$.*

Доказательство этой леммы сводится к решению задачи о минимуме функции

$$f(x_1, x_2, \ldots, x_n) = \sum_{i=1}^{n} \{\varphi[x_i F^{-1}(1/n)/M^{-1}(1/n)] - x_i\}$$

при условии $M(x_1) + M(x_2) + \ldots + M(x_n) = 1$.

Доказательство теоремы 2. Оценка снизу. Возьмем n-мерное подпространство L_n в l_F, натянутое на орты $e_1, e_2, \ldots, e_n$, а в нем произвольный элемент $x \neq 0$. Этот элемент представим в виде $x = \xi_1 e_1 + \xi_2 e_2 + \cdots + \xi_n e_n$. Обозначим $k = \|x\|_{(M)}$, $m = \|x\|_{(F)}$. Поскольку N-функции $M(u)$ и $F(u)$ удовлетворяют Δ_2-условию для малых u, то k и m являются корнями уравнений

$$\sum_{i=1}^{n} M(\xi_i/k) = 1, \quad \sum_{i=1}^{n} M[\varphi(\xi_i/m)] = 1. \tag{1}$$

Не нарушая общности, можно считать $\xi_1/k \geqslant \xi_2/k \geqslant \cdots \geqslant \xi_n/k \geqslant 0$. Поэтому для последовательности $\{\xi_i/k\}_{i=1}^{n}$ справедливо утверждение леммы 2, из которого на основании теоремы Вейля [6, с. 824] получаем

$$\sum_{i=1}^{n} M\{\varphi[\xi_i F^{-1}(1/n)/kM^{-1}(1/n)]\} \geqslant \sum_{i=1}^{n} M(\xi_i/k).$$

Отсюда, учитывая выражение (1), имеем $\|x\|_{(F)}/\|x\|_{(M)} \geqslant M^{-1}(1/n)/F^{-1}(1/n)$.

Так как x — произвольный элемент из L_n и $x \neq 0$, то из последнего неравенства следует оценка

$$b_n(B_{(M)}, B_{(F)}) \geqslant M^{-1}(1/n)/F^{-1}(1/n). \tag{2}$$

Оценка сверху. Возьмем произвольное n-мерное подпространство E_n в l_F, а в нем элемент x вида $x = \sum_{i \in I} \xi_i e_i + \sum_{i \notin I} \xi_i e_i$, где I — некоторый набор n-номеров такой, что $|\xi_i| = 1$ при $i \in I$, а $|\xi_i| \leqslant 1$ при $i \notin I$. Существование в E_n такого элемента x следует из утверждения леммы 1.

Обозначим $k = \|x\|_{(M)}$, $m = \|x\|_{(F)}$. Так как N-функции $M(u)$ и $F(u)$ удовлетворяют Δ_2-условию для малых u, то k и m являются корнями уравнений

$$nM(1/k) + \sum_{i \notin I} M(\xi_i/k) = 1, \; nM[\varphi(1/m)] + \sum_{i \notin I} M[\varphi(\xi_i/m)] = 1, \tag{3}$$

из которых

$$m \leqslant 1/\varphi^{-1}(1/k). \tag{4}$$

Далее из уравнения (3) следует, что существует число $\alpha (0 < \alpha \leqslant 1)$ такое, что

$$1/k = \alpha M^{-1}(1/n). \tag{5}$$

Из соотношений (4) и (5), учитывая выпуклость функции $\varphi(u)$, получаем $\|x\|_{(F)}/\|x\|_{(M)} \leqslant M^{-1}(1/n)/F^{-1}(1/n)$, откуда следует $b(E_n, B_{(M)}, B_{(F)}) \leqslant M^{-1}(1/n)/F^{-1}(1/n)$. В силу того что E_n — произвольное n-мерное подпространство в l_F, из последнего неравенства получаем оценку

$$b_n(B_{(M)}, B_{(F)}) \leqslant M^{-1}(1/n)/F^{-1}(1/n). \tag{6}$$

Из неравенств (2), (6) следует справедливость утверждения теоремы 2.

Замечание. По-видимому, доказанный выше результат известен для случая $l_M = l_p$, $l_F = l_q$ (случай $p = 1$, $q = 2$) [см., например, 7, с. 97].

Справедливость утверждения теоремы 3 вытекает из теоремы 2 и из следующего утверждения, которое легко доказать, используя лемму 6.2 [3, с. 62].

Лемма 3. *Пусть N-функции $M(u)$ и $F(u)$ удовлетворяют Δ_2-условию для малых u, а функция $\varphi(u) = M^{-1}[F(u)]$ — выпуклая. Тогда существуют N-функции $M_1(u)$ и $F_1(u)$, эквивалентные соответственно N-функциям $M(u)$ и $F(u)$, удовлетворяющие Δ_2-условию для малых u, имеющие непрерывные производные и такие, что функция $f(u) = M_1^{-1}[F_1(u)]$ — выпуклая.*

Список литературы: 1. *Тихомиров В. М.* Поперечники множеств в функциональных пространствах и теория наилучших приближений.— Усп. мат. наук, 1960, т. 15, вып. 3 (93), с. 81—120. 2. *Тихомиров В. М.* Некоторые вопросы теории приближений.— М.: Изд-во МГУ, 1976.— 304 с. 3. *Красносельский М. А., Рутицкий Я. Б.* Выпуклые функции и пространства Орлича.— М.: Физматгиз, 1958.— 272 с. 4. *Грибанов Ю. И.* К теории пространств l_M. Учен. зап. Киевск. ун-та, 1957, т. 117, кн. 2, с. 62—65. 5. *Грибанов Ю. И.* О матричных операторах, действующих в пространствах Орлича.— Тр. семинара по функцион. анализу. Воронеж, 1958, вып. 6, с. 29—41. 6. *Митягин Б. С.* Нормированные идеалы промежуточного типа.— Изв. АН СССР. Сер. мат., 1964, т. 28, с. 819—832. 7. *Митягин Б. С., Хенкин Г. М.* Неравенства между различными n-поперечниками. — Тр. семинара по функцион. анализу. Воронеж, 1963, вып. 7, с. 97—103.

Поступила 15 мая 1976 г.