УДК 517.535.4

Н. В. ЗАБОЛОЦКИЙ

НЕКОТОРЫЕ СООТНОШЕНИЯ ДЛЯ НЕВАНЛИННОВСКИХ ХАРАКТЕРИСТИК δ-СУБГАРМОНИЧЕСКИХ ФУНКЦИЙ ПОРЯДКА < 1

Пусть u — δ-субгармоническая функция в $\boldsymbol{R}^m$, т. е. $u = u_1 - u_2$, где u_1, u_2 — субгармонические функции в $\boldsymbol{R}^m$, $m \geqslant 2$. Не уменьшая общности, не оговаривая это каждый раз, будем считать, что порядки u_1 и u_2 не превосходят порядка u, $u_1(0) = u_2(0) = 0$, риссовские массы u_1 и u_2 сосредоточены на непересекающихся множествах и в окрестности нуля u_1 и u_2 — гармонические функции. Далее без пояснений будем пользоваться стандартными обозначениями неванлинновской теории для δ-субгармонических функций ([1], [2]).

Исследуется связь между типами характеристики роста $T \times (r, u)$ и величины $N_0(r) = \max\{N(r, u_1), N(r, u_2)\}$, измеренных относительно функции $V(r) = r^{\rho(r)}$, где u — δ-субгармоническая функция порядка $\rho < 1$, $\rho(r)$ — уточненный порядок функции u. Аналогичный вопрос для мероморфных функций в $\mathbf{C}$ решался в [3].

Основой доказательств в данной работе является теорема 2. При доказательстве аналога теоремы 2 для мероморфных функций ([3], теорема 3) использовалась одна теорема Бернштейна ([4], теорема 1; [5], теорема A). Результат, аналогичный теореме Бернштейна, при $m \geqslant 3$ нам неизвестен. Поэтому доказательство теоремы 2 использует идею, отличную от доказательства теоремы 3 из [3]. Идея доказательств теорем 3—5 та же, что и при доказательстве соответствующих теорем из [3] для мероморфных в $\mathbf{C}$ функций, но при $m \geqslant 3$ возникают дополнительные технические трудности. Доказательства теорем 3—5 при $m = 2$ ничем не отличаются от доказательств теорем для мероморфных функций ([3], теоремы 1, 2, 4), поэтому здесь доказательства теорем приводятся лишь для $m \geqslant 3$.

Пусть u — δ-субгармоническая функция в $\boldsymbol{R}^m$ порядка $\rho < 1$ с указанным выше представлением. Обозначим через $u' = u_1' - u_2'$ δ-субгармоническую функцию, у которой масса Рисса субгармонической функции u_1' сосредоточена на отрицательной полуоси OX_1, а масса Рисса субгармонической функции u_2' — на положительной полуоси OX_1, и $N(r, u_i) = N(r, u_i')$, $i = 1, 2$, при $0 < r < \infty$.

Для субгармонической функции v порядка $\rho < 1$ в $\boldsymbol{R}^m$ имеем ([1], с. 184, (4.5.15), (4.5.16)) $v'(x) = \int\limits_0^\infty \frac{P_m(t, r, \theta) N(t, v')\, dt}{(r^2+2tr\cos\theta+t^2)^{m/2+1}}$,

где $P_m(t, r, \theta) = (m-1) r^3 t^{m-2} \cos\theta + r^2 t^{m-1} (m + (m-2)\cos\theta) + rt^m (m-1)\cos\theta$, $r = |x|$, $x_1 = r\cos\theta$, $0 \leqslant \theta \leqslant \pi$. Если обозначить $(0 \leqslant \varphi \leqslant \pi)$ $Q(t, r, \varphi) = \int\limits_0^\varphi \frac{P_m(t, r, \theta)(\sin\theta)^{m-2}\, d\theta}{(r^2+2tr\cos\theta+t^2)^{m/2+1}}$, то $(c_m = 2\pi^{m/2}(\Gamma(m/2))^{-1})$ $T(r, v') = \max\limits_{0<\varphi<\pi} \left\{\frac{c_{m-1}}{c_m} \int\limits_0^\infty N(t, v') Q(t, r, \varphi)\, dt\right\}$.

Из леммы 4.9 ([1], с. 182) лег о получить, что для субгармонической функции v в $\boldsymbol{R}^m$ порядка $\rho < 1$ выполняется $T(r, v) \leqslant T(r, v')$.

Пусть E — множество на сфере $S(0, r) = \{x : |x| = r\}$, где $u_1(x) > u_2(x)$, E_0 — сферическая шапочка $\{x : \theta < \theta_0\}$ на $S(0, r)$, площадь которой равна мере E. Тогда, учитывая лемму 4.9 и формулу (3.9.1), из [1] получаем

$$T(r, u) = \frac{1}{c_m r^{m-1}} \int\limits_{S(0,r)} u^+(x)\, d\sigma(x) + N(r, u_2) = \frac{1}{c_m r^{m-1}} \int\limits_{S(0,r)} \max(u_1, u_2)\, d\sigma(x) \leqslant \frac{1}{c_m r^{m-1}} \left\{\int\limits_{E_0} u_1'(x)\, d\sigma(x) + \int\limits_{CE_0} u_2'(x)\, d\sigma(x)\right\} \leqslant \frac{1}{c_m r^{m-1}} \int\limits_{S(0,r)} \times$$
$$\times \max\{u_1', u_2'\}\, d\sigma(x) = T(r, u'),$$

где $d\sigma(x)$ — элемент площади поверхности $S(0, r)$, $CE_0 = S(0, r) \setminus E_0$. Таким образом, справедлива следующая

Теорема 1. *Пусть u — δ-субгармоническая функция в $\boldsymbol{R}^m$ порядка $\rho < 1$. Тогда $T(r, u) \leqslant T(r, u')$.*

Пусть $E_0(\varphi)$ — сферическая шапочка на $S(0, r)$, заданная неравенством $|\theta| < \varphi$. Учитывая лемму 4.7 ([1], с. 181), равенство (4.5.15) ([1], с. 184), а также то, что сужение $u_1'(x)$ и $u_2'(x)$ на $S(0, r)$ зависит только от координаты θ, получаем

$$T(r, u') = \max_{0<\varphi<\pi} \frac{1}{c_m r^{m-1}} \left\{\int\limits_{E_0(\varphi)} u_1'(x)\, d\sigma(x) + \int\limits_{CE_0(\varphi)} u_2'(x)\, d\sigma(x)\right\} =$$
$$= \frac{c_{m-1}}{c_m} \max_{0<\varphi<\pi} \left\{\int\limits_0^\varphi (\sin\theta)^{m-2}\, d\theta \left(\int\limits_0^\infty \frac{P_m(t, r, \theta) N(t, u_1')\, dt}{(r^2+2tr\cos\theta+t^2)^{m/2+1}}\right) + \int\limits_\varphi^\pi (\sin\theta)^{m-2}\, d\theta \times\right.$$

$$\times\left(\int_0^\infty \frac{P_m(t,\ r,\ \theta)\, N(t,\ u_2')\, dt}{(r^2+2tr\cos(\pi-\theta)+t^2)^{m/2+1}}\right)\Bigg\} = \frac{c_{m-1}}{c_m} \max_{0<\varphi<\pi} \left\{\int_0^\infty N(t,\ u_1) Q(t,\ r,\ \varphi) \times\right.$$

$$\left.\times\, dt + \int_0^\infty N(t,\ u_2)\, Q(t,\ r,\ \pi-\varphi)\, dt\right\}$$

(здесь во втором интеграле произвели замену $\pi-\theta=\alpha$ и в обоих — изменили порядок интегрирования).

Теорема 2. *Пусть* $u=u_1-u_2$ *и* $w=w_1-w_2$ *δ-субгармонические функции в* $\boldsymbol{R}^m$ *порядка* $\rho<1$. *Если* $N(r,\ u_i)\leqslant N(r,\ w_i)$, $i=1,\ 2$, *то* $T(r,\ u')\leqslant T(r,\ w')$.

Доказательство. Учитывая, что $Q(t,\ r,\ \varphi)\geqslant 0$, для всех положительных $t,\ r$ и $0\leqslant\varphi\leqslant\pi$ ([1], с. 184, лемма 4.10) имеем $(0\leqslant\beta=\beta(r)\leqslant\pi)$

$$T(r,\ u') = \frac{c_{m-1}}{c_m}\left\{\int_0^\infty N(t,\ u_1)\, Q(t,\ r,\ \beta)\, dt + \int_0^\infty N(t,\ u_2)\, Q(t,\ r,\ \pi-\beta)\times\right.$$

$$\left.\times\, dt\right\} \leqslant \frac{c_{m-1}}{c_m}\left\{\int_0^\infty N(t,\ w_1)\, Q(t,\ r,\ \beta)\, dt + \int_0^\infty N(t,\ w_2)\, Q(t,\ r,\ \pi-\beta)\times\right.$$

$$\left.\times\, dt\right\} \leqslant \frac{c_{m-1}}{c_m}\max_{0<\varphi<\pi}\left\{\int_0^\infty N(t,\ w_1)\, Q(t,\ r,\ \varphi)\, dt + \int_0^\infty N(t,\ w_2)\, Q(t,\ r,\ \pi-\right.$$

$$\left.-\varphi)\, dt\right\} = T(r,\ w').$$

Следствие. *Для δ-субгармонической функции и порядка* $\rho<1$ *в* $\boldsymbol{R}^m$ *справедливо неравенство*

$$T(r,\ u) \leqslant \frac{2c_{m-1}}{c_m}\int_0^\infty N_0(t)\, Q\left(t,\ r,\ \frac{\pi}{2}\right) dt. \tag{1}$$

Доказательство. Пусть $w=w_1-w_2$ — δ-субгармоническая функция такая, что $N(r,\ w_1)=N(r,\ w_2)=N_0(r,\ u)$. Тогда по теоремам 1 и 2 имеем $T(r,\ u)\leqslant T(r,\ u')\leqslant T(r,\ w')=$

$$= \frac{2c_{m-1}}{c_m}\int_0^\infty N_0(t,\ u)\, Q\left((t,\ r,\ \frac{\pi}{2}\right) dt.$$

Рассмотрим сначала случай $0<\rho<1$. Обозначим $\Omega(\rho,\ m)=$

$$= \frac{2c_{m-1}}{c_m}\int_0^\infty t^\rho Q\left(t,\ 1,\ \frac{\pi}{2}\right) dt.$$

Теорема 3. *Для δ-субгармонической функции и порядка ρ, $0<\rho<1$, имеет место неравенство*

$$\varlimsup_{r\to\infty}\frac{T(r,\ u)}{V(r)}\leqslant\Omega(\rho,\ m)\varlimsup_{r\to\infty}\frac{N_0(r)}{V(r)},\qquad(2)$$

и существует функция и порядка ρ, удовлетворяющая условиям теоремы, для которой в (2) имеет место равенство.

Доказательство. Пусть $\varlimsup\limits_{r\to\infty}N_0(r)/V(r)=K$. Известно, что $0<K<\infty$. Не уменьшая общности, можем считать, что $N_0(r)\leqslant K_1V(r)$ для всех $r>0$, $K_1=K+\varepsilon$, $0<\varepsilon<1$. Из (1) получаем $T(r,\ u)\leqslant\frac{2c_{m-1}}{c_m}K_1\int\limits_0^\infty t^{\rho(t)}Q\left(t,\ r,\ \frac{\pi}{2}\right)dt$. Учитывая, что $Q\left(t,\ r,\ \frac{\pi}{2}\right)\leqslant A_1t^{m-2}r^{1-m}$ при $0\leqslant t\leqslant r/2$ и $Q\left(t,\ r,\ \frac{\pi}{2}\right)\leqslant A_2t^{-2}r$ при $2r\leqslant t<+\infty$, где A_1, A_2 — постоянные, не зависящие от t и r, применяя обычные в этих вопросах рассуждения ([6]. с. 92—93), получаем (2).

Построим функцию, удовлетворяющую условиям теоремы, для которой в (2) имеет место знак равенства. Пусть $w=w_1-w_2$, где w_1 — гармоническая всюду, за исключением отрицательной полуоси OX_1, $w_2(x)=w_1(-x)$, $0<\rho<1$, и $n(r,\ w_1)=n(r,\ w_2)=\rho\times\times d_m^{-1}r^{m+\rho-2}$, $0<r<\infty$, $d_m=m-2$, $m\geqslant3$, $d_2=1$. Тогда $N(r,\ w_1)=N(r,\ w_2)=r^\rho$, $r\geqslant0$, и $T(r,\ w)=\Omega(\rho,\ m)r^\rho$, что показывает неулучшаемость оценки (2).

Прежде чем сформулировать следующую теорему, докажем некоторые вспомогательные результаты. Покажем, что уравнение $(0<x<\infty)$ $f(x)=0$, $f(x)=x^{-n}+nx^{-n-1}(x-1)-R$, где $0\leqslant R\leqslant\leqslant1$, $n>0$, имеет два корня. Элементарным анализом находим, что $f(x)\to-\infty$ при $x\to0$, $f(x)\to-R$ при $x\to+\infty$, $f(1)=1-\\-R\geqslant0$ и уравнение $f(x)=0$ имеет два корня $\nu=\nu(R)$ и $\chi=\\=\chi(R)$, $0<\chi<1$, $\nu>1$, при $0<R<1$. В случае $R=1$ имеем $\nu=\chi=1$, при $R=0$ полагаем $\nu(0)=+\infty$.

Легко видеть, что уравнение $Te^x=x+1$, $-\infty<x<+\infty$, $0\leqslant T\leqslant1$, имеет два корня, $\tau=\tau(T)$ и $\sigma=\sigma(T)$, $\tau>0$, $\sigma<0$ при $0<T<1$. При $T=1$ имеем $\tau=\sigma=0$, при $T=0$ полагаем $\tau(0)=+\infty$.

Пусть $0<\rho<1$. Рассмотрим при $0<q<+\infty$ функции

$$\varphi(q;\ R,\ n)=\int\limits_{q\nu^{-n/\rho}}^{q}\left\{t^\rho+n\nu^{-n-1}q^\rho\left(\left(\frac{t}{q}\right)^{-\rho/n}-1\right)-Rq^\rho\right\}Q\left(t,\ 1,\ \frac{\pi}{2}\right)\times$$
$$\times dt+\int\limits_{q}^{q\chi^{-n/\rho}}\left\{t^\rho+n\chi^{-n-1}q^\rho\left(\left(\frac{t}{q}\right)^{-\rho/n}-1\right)-Rq^\rho\right\}Q\left(t,\ 1,\ \frac{\pi}{2}\right)dt;\qquad(3)$$

$$\psi(q;\ T)=\int\limits_{q\exp(-\tau/\rho)}^{q}\left(t^{\rho}-\rho e^{-\tau}q^{\rho}\ln\frac{t}{q}-q^{\rho}T\right)\frac{dt}{t^{2}+1}+\int\limits_{q}^{q\exp(-\sigma/\rho)}\Big(t^{\rho}-$$

$$-\rho e^{-\sigma}q^{\rho}\ln\frac{t}{q}-q^{\rho}T\Big)\frac{dt}{t^{2}+1}. \qquad (4)$$

Легко видеть, что $\varphi(q;\ 1,\ n)\equiv 0$, $\psi(q;\ 1)\equiv 0$. При фиксированном R, $0<R<1$, или T, $0<T<1$, подынтегральные выражения в обоих интегралах в (3) или (4) неотрицательны, следовательно, $\varphi(q;\ R,\ n)>0$, $\psi(q;\ T)>0$, $0<q<\infty$. Учитывая, что $Q(t,\ 1,\ \pi/2)=O(t^{-2})$ при $t\to+\infty$, $Q(t,\ 1,\ \pi/2)=O(t^{m-2})$ при $t\to 0$, из (3) нетрудно получить, что $\varphi(q;\ R,\ n)\to 0$ при $q\to+\infty$ и $q\to 0$. Из (4) получаем, что $\psi(q;\ T)\to 0$ при $q\to+\infty$ и $q\to 0$ (см. [3]).

Учитывая, что при $R=0$ (при $T=0$) имеем $\nu=+\infty$ $(\tau=+\infty)$, получаем $\varphi(q;\ 0,\ n)\to c_m/(2c_{m-1})\,\Omega(\rho,\ m)$ и $\psi(q;\ 0)\to(\pi/2)\sec\pi\rho/2=c_2/(2c_1)\,\Omega(\rho,\ 2)$ при $q\to+\infty$.

Положим $\Psi(R)=\max\{\varphi(q;\ R,\ \rho/(m-2)):0<q<\infty\}$ при $m\geqslant 3$, и $\Psi(T)=\max\{\psi(q;\ T):0<q<\infty\}$ при $m=2$, где φ и ψ определяются по (3) и (4).

Теорема 4. *Пусть u — σ — субгармоническая функция порядка ρ, $0<\rho<1$,* $\overline{\lim\limits_{r\to\infty}}\ N_0(r)/V(r)=K$, $\underline{\lim\limits_{r\to\infty}}\ N_0(r)/V(r)=L$. *Имеет место неравенство*

$$\underline{\lim_{r\to\infty}}\frac{T(r,\ u)}{V(r)}\leqslant K\left\{\Omega(\rho,\ m)-\frac{2c_{m-1}}{c_m}\Psi\left(\frac{L}{K}\right)\right\}, \qquad (5)$$

и существует функция u, удовлетворяющая условиям теоремы, для которой в (5) имеет место знак равенства.

Доказательство. В случае $L=K$ утверждение теоремы очевидно, так как правая часть (5) равна $K\,\Omega(\rho,\ m)$. Пусть $L<K$, $\rho(r)\equiv\rho$. Не уменьшая общности, можем считать, что $N_0(r)\leqslant K_1V(r)$ для $r>0$ и существует последовательность (r_k) такая, что $N(r_k)=L_1V(r_k)$, где $K_1=K+\varepsilon$, $L_1=L+\varepsilon$, $0<\varepsilon<1$. Положим $r^{2-m}=t$, $\rho/(m-2)=n$. Тогда $N_0(t^{1/(2-m)})\leqslant K_1t^{-n}$, $0<t<\infty$, $N_0(t_k^{1/(2-m)})=L_1t_k^{-n}$. Проведем из точки $(t_k,\ L_1t_k^{-n})$ касательные к графику функции $y=K_1t^{-n}$, $0<t<\infty$. Получим уравнения касательных: $y_1(t)=-K_1n(t_k\nu_1)^{-n-1}(t-t_k)+L_1t_k^{-n}$, $y_2(t)=-K_1n(t_k\varkappa_1)^{-n-1}(t-t_k)+L_1t_k^{-n}$, где $\nu_1=\nu(L_1/K_1)$, $\varkappa_1=\varkappa(L_1/K_1)$ определены выше. Далее будем для краткости вместо ν_1, $\varkappa_1$ писать ν, $\varkappa$.

Так как функция $N_0(t^{1/(2-m)})$ выпуклая относительно t, то получаем $(r_k=t_k^{1/(2-m)})$

$$N_0(r)\leqslant\begin{cases}K_1V(r), & 0\leqslant r\leqslant r_k\nu^{-n/\rho}\\ y_1(r^{2-m}), & r_k\nu^{-n/\rho}\leqslant r\leqslant r_k,\\ y_2(r^{2-m}), & r_k\leqslant r\leqslant r_k\varkappa^{-n/\rho},\\ K_1V(r), & r_k\varkappa^{-n/\rho}\leqslant r<+\infty.\end{cases}$$

Учитывая (1), получаем $T(r, u) \leqslant \frac{2c_{m-1}}{c_m}\left\{\int\limits_0^\infty K_1 t^\rho Q(t, r, \frac{\pi}{2})\, dt -\right.$

$$-\int\limits_{r_k\nu^{-n/\rho}}^{r_k} (K_1 t^\rho - y_1(t^{2-m}))\, Q\left(t, r, \frac{\pi}{2}\right) dt - \int\limits_{r_k}^{r_k\varkappa^{-n/\rho}} (K_1 t^\rho - y_2(t^{2-m})) \times$$

$$\left.\times Q(t, r, \frac{\pi}{2})\, dt\right\} = K_1 r^\rho \left\{\Omega(\rho, m) - \frac{2c_{m-1}}{c_m} \times \left[\int\limits_{(r_k/r)\nu^{-n/\rho}}^{r_k/r} \left(s^\rho - \right.\right.\right.$$

$$\left. - \frac{y_1((sr)^{2-m})}{K_1 r^\rho}\right) Q\left(s, 1, \frac{\pi}{2}\right) ds + \int\limits_{r_k/r}^{(r_k/r)\varkappa^{-n/\rho}} \left(s^\rho - \frac{y_2((sr)^{2-m})}{K_1 r^\rho}\right) \times$$

$$\left.\left.\times Q(s, 1, \frac{\pi}{2})\, ds\right]\right\} = K_1 r^\rho \cdot \left[\Omega(\rho, m) - \frac{2c_{m-1}}{c_m}\varphi\left(\frac{r_k}{r}; \frac{L_1}{K_1}, \frac{\rho}{m-2}\right)\right].$$

Пусть $r = r_k/q\,(0 < q < \infty)$. Тогда $\varliminf\limits_{r\to\infty} \frac{T(r, u)}{V(r)} \leqslant K_1\Big[\Omega(\rho, m) -$ $- \frac{2c_{m-1}}{c_m}\Psi\left(\frac{L_1}{K_1}\right)\Big]$. Устремив ε к нулю, получаем (5) в случае $m \geqslant 3$. Чтобы перейти от $\rho(r) \equiv \rho$ к общему случаю, поступаем, как в [7].

Построим пример, показывающий неулучшаемость оценки (5). При $L = 0$ правая часть (5) обращается в нуль и, очевидно, в (5) имеет место знак равенства. Пусть L, K, ρ удовлетворяют условиям $0 < L < K < \infty$, $0 < \rho < 1$, последовательность (r_k) такая, что $r_{k+1} > r_k$, $r_{k+1}/r_k \to +\infty$, $k \to +\infty$. Пусть $w = w_1 - w_2$, где w_1 — гармоническая функция всюду в $\boldsymbol{R}^m$, за исключением отрицательной полуоси $0X_1$, $w_2(x) = w_1(-x)$ и $(i = 1, 2)$

$$n(r, w_i) = \begin{cases} K\rho d_m^{-1} r^{\rho+m-2}, & r_{k-1}\varkappa^{1/(2-m)} \leqslant r \leqslant r_k \nu^{1/(2-m)}, \\ K\rho d_m^{-1} \nu^{\rho/(2-m)-1} r_k^{\rho+m-2}, & r_k \nu^{1/(2-m)} \leqslant r \leqslant r_k, \\ K\rho d_m^{-1} \varkappa^{\rho/(2-m)-1} r_k^{\rho+m-2}, & r_k \leqslant r \leqslant r_k \varkappa^{1/(2-m)}. \end{cases}$$

Из доказательства теоремы легко видеть, что для функции w в (5) имеет место знак равенства (см. также [3]).

Теорема 5. *Если u — δ-субгармоническая функция нулевого порядка в $\boldsymbol{R}^m$, то пределы* $\lim\limits_{r\to\infty} T(r, u)/V(r)$, $\lim\limits_{r\to\infty} N_0(r)/V(r)$ **(6)** *существуют или не существуют одновременно и при существовании равны.*

В случае, когда u — субгармоническая в $\boldsymbol{R}^2$, эта теорема верна и при $\rho \leqslant 0,5$.

Доказательство. Пусть второй предел в (6) существует и равен K, $0 < K < \infty$. Из неравенства (4.52) ([1], с. 174) легко получить, что $T(r, u) \leqslant (m-1) r \int\limits_0^\infty \frac{t^{m-2} N_0(t)}{(r+t)^m} dt$. Отсюда получаем ([6], с. 92—93)($\rho = 0$, $0 < \varepsilon < 1$) $T(r, u) \leqslant K(m-1) \times \times V(r) \int\limits_0^\infty \frac{t^{m-2} dt}{(t+1)^m} + \varepsilon V(r) = (K+\varepsilon) V(r)$. Учитывая, что $N_0(r) \leqslant \leqslant T(r, u)$, получаем $T(r, u) = (K + o(1)) V(r)$, $r \to \infty$.

Пусть теперь первый предел в (6) существует и равен K, $0 < K < \infty$. Предположим, что $N_0(r) \sim KV(r)$, $r \to \infty$, не выполняется, т. е. существует L, $0 < L < K$, и последовательность (r_k) такая, что $N_0(r_k) = LV(r_k)$. Тогда ($k \to +\infty$) $(K - \varepsilon) V(r_k) \leqslant$

$$\leqslant T(r_k, u) \leqslant (m-1) r_k \left\{ \left(\int\limits_0^{r_k} + \int\limits_{r_k}^\infty \right) \frac{t^{m-2} N_0(t)}{(t + r_k)^m} \cdot dt \right\} \leqslant (m-1) \times$$

$$\times V(r_k) \left\{ L \int\limits_0^1 \frac{t^{m-2} dt}{(t+1)^m} + (K + o(1)) \int\limits_1^\infty \frac{t^{m-2} dt}{(t+1)^m} \right\} + o(V(r_k)).$$ Отсюда получаем

$$K \leqslant K(m-1) \int\limits_0^\infty \frac{t^{m-2} dt}{(t+1)^m} + (L - K)(m-1) \int\limits_0^1 \frac{t^{m-2} dt}{(t+1)^m} =$$

$$= K + (L-K)(m-1) \int\limits_0^1 \frac{t^{m-2} dt}{(t+1)^m},$$ что невозможно.

Если u — субгармоническая функция в $\boldsymbol{R}^2$ порядка $\rho \leqslant 0{,}5$, то доказательство теоремы аналогично доказательству теоремы 1 из [8].

В случае, когда функция u субгармоническая в $\boldsymbol{R}^m$, оценки в утверждениях теорем 3 и 4 можно уточнить (см. доказательства теорем 3, 4 и [9]).

Обозначим $\omega(\rho, m, \varphi) = \frac{c_{m-1}}{c_m} \int\limits_0^\infty t^\rho Q(t, 1, \varphi) dt$; $h(y, m, \varphi) =$

$$= \begin{cases} y^{1-m} - (y + \cos\varphi)(y^2 + 2y\cos\varphi + 1)^{-m/2}; & m \geqslant 3, \\ (y+\cos\varphi)(y(y^2 + 2y\cos\varphi + 1))^{-1}; & m = 2, \end{cases}$$ $H(\rho, m, \varphi) =$

$\int\limits_0^\infty y^{\rho+m-2} h(y, m, \varphi) dy$; $I(q; \rho, m, \varphi, R) = \nu^{\rho/(m-2)-1} \int\limits_{q\nu^{1/(2-m)}}^{q} \times$

$\times h(y, m, \varphi) dy + \varkappa^{\rho/(2-m)-1} \cdot \int\limits_q^{q\varkappa^{1/(2-m)}} h(y, m, \varphi) dy$; $m \geqslant 3$, $I(q; \rho,$

$$2,\ \varphi,\ T) = e^{-\tau} \int\limits_{q\exp(-\tau/\rho)}^{q} h(y,\ 2,\ \varphi)\, dy + e^{-\delta} \int\limits_{q}^{q\exp(-\sigma/\rho)} h(y,\ 2,\ \varphi)\, dy,$$

где $\nu = \nu(R)$, $\varkappa = \varkappa(R)$, $\tau = \tau(T)$, $\delta = \delta(T)$ определены выше.

Теорема 6. *Пусть u — субгармоническая функция порядка ρ, $0 < \rho < 1$, $\overline{\lim\limits_{r\to\infty}} N(r,\ u)/V(r) = K$, $\lim\limits_{r\to\infty} N(r,\ u)/V(r) = L$. Имеют место неравенства*

$$\overline{\lim_{r\to\infty}}\ T(r,\ u)/V(r) \leqslant K \max_{0\leqslant\varphi\leqslant\pi} \omega(\rho,\ m,\ \varphi), \tag{7}$$

$$\underline{\lim_{r\to\infty}}\ \frac{T(r,\ u)}{V(r)} \leqslant \frac{K\rho}{c_m d_m} \inf_{0<q<\infty} \int\limits_{S(0,1)} [H(\rho,\ m,\ \varphi) - I(q;\ \rho,\ m,\ \varphi,\ L/K)]^{+}\, d\delta, \tag{8}$$

и существуют функции, удовлетворяющие условиям теоремы, для которых в (7) и в (8) имеют место знаки равенства.

Список литературы: *Хейман У., Кеннеди П.* Субгармонические функции. — М.: Мир, 1980. — 304 с. 2. Rao N. V., *Shea Daniel F.* Growth problems for subharmonic functions of finite order in space. — Trans. Amer. Math. Soc., 1977, **230**, p. 347—370. 3. *Заболоцкий Н. В.* Некоторые соотношения для неванлинновских характеристик мероморфной функции нулевого рода. — Укр. мат. журн., 1981, **33**, № 6, с. 805—810. 4. *Baernstein A.* Proof of Edrei's spread conjecture. — Proc. London Math. Soc., 1973, **26**, 3, p. 418—434. 5. *Baernstein A.* Integral means, univalent functios and circular symmetrization. — Acta. Math., 1974, **133**, 3—4, p. 139—169. 6. *Гольдберг А. А., Островский И. В.* Распределение значений мероморфных функций. — М.: Наука, 1970. — 592 с. 7. *Кондратюк А. А.* Экстремальный индикатор для целых функций с положительными нулями. — Лит. мат. сб., 1967, **7**, № 1, с. 79—117. 8. *Гольдберг А. А.* О целых функциях без конечных валироновских дефектных значений. — Теория функций, функцион. анализ и их прил., 1972, вып. 15, с. 244—254. 9. *Заболоцький М. В.* Деякі співвідношення для неванліннівських характеристик цілої функції порядку < 1. — Вісн. Львів. держ. ун-ту. Питання мат. аналізу та його застосування, 1982, с. 121.

Поступила в редколлегию 29. 07. 81.