УДК 517.4

О. Л. ШОР

ОБ ЭКВИВАЛЕНТНЫХ УНИТАРНЫХ УЗЛАХ

Унитарным операторным узлом $\Delta=(H,\ E_1,\ E_2,\ U)$ называется [1] совокупность, состоящая из сепарабельных гильбертовых пространств $H,\ E_1,\ E_2$, для которых $\dim(H\oplus E_1)=\dim(H\oplus E_2)$, и унитарного оператора[1] $U\in \mathrm{Hom}\,[H\oplus E_1,\ H\oplus E_2]$.

Пусть P и Q — ортопроекторы из $H\oplus E_2$ соответственно на H и E_2. Тогда оператор U представим в блочном виде

$$U=\begin{pmatrix} T & F\\ G & S\end{pmatrix},$$

где $T=PU\,|\,H\in \mathrm{Hom}\,[H,\ H]$; $F=PU\,|\,E_1\in \mathrm{Hom}\,[E_1,\ H]$; $G=QU\,|\,H\in \mathrm{Hom}\,[H,\ E_2]$; $S=QU\,|\,E_1\in \mathrm{Hom}\,[E_1,\ E_2]$ (1). Оператор T называется основным оператором узла, пространство H называется внутренним, пространства E_1 и E_2 — внешними.

Операторы $T,\ F,\ G,\ S$, действующие в соответствии с (1), тогда и только тогда являются компонентами узла, когда

$$\begin{gathered} TT^*+FF^*=I_H;\ T^*T+G^*G=I_H\\ GG^*+SS^*=I_{E_2};\ F^*F+S^*S=I_{E_1};\\ TG^*+FS^*=0;\ T^*F+G^*S=0.\end{gathered}\tag{2}$$

Из (2) следует, что основной оператор T унитарного узла является оператором сжатия.

Характеристической оператор-функцией (х.о.-ф.) $\theta_\Delta(\lambda)$ унитарного узла Δ называется [1] аналитическая в единичном круге функция, значения которой — линейные ограниченные операторы, действующие из E_1 в E_2: $\theta_\Delta(\lambda)=S+\lambda G(I-\lambda T)^{-1}F$.

Характеристической функцией (х.ф.) $\theta_T(\lambda)$ оператора сжатия T называется [2], [3] аналитическая в единичном круге функция, значения которой — линейные ограниченные операторы, действующие из R в R_*: $\theta_T(\lambda)=P_{R*}[-T+\lambda D_*(I-\lambda T^*)^{-1}D]\,|\,R$ (3), где $D=(I-T^*T)^{\frac{1}{2}}$; $D_*=(I-TT^*)^{\frac{1}{2}}$; $R=\overline{DH}$; $R_*=\overline{D_*H}$, а P_R и P_{R*} — ортопроекторы из H на R и R_* соответственно.

Легко проверить, что для любого сжатия T совокупность $\Delta=(H,\ R_*,\ R,\ T,\ D_*|\,R_*,\ D,\ -P_RT^*|\,R_*)$ является унитарным операторным узлом. Значит, по каждому сжатию T можно по-

---

[1] Через Hom $[H,\ E]$ обозначена совокупность линейных ограниченных операторов, действующих из H в E.

строить унитарный узел с основным оператором T (включить T в узел). Но эта операция включения неоднозначна.

Два операторных узла будем называть эквивалентными, если они содержат один и тот же основной оператор T.

В работе [4] рассматривались эквивалентные узлы неэрмитовости. В настоящей статье описываются классы эквивалентных унитарных узлов. Это описание позволяет установить связь между характеристическими оператор-функциями унитарного узла с основным оператором T и характеристической функцией оператора сжатия T.

§ 1. Описание всех эквивалентных узлов.

Введем две операции, переводящие один унитарный узел в другой, ему эквивалентный.

Определения: 1. *Операцию, переводящую узел* $\Delta_1 = (H, E_1, E_2, T, F, G, S)$ *в узел* $\Delta_2 = (H, E_1 \oplus N, E_2 \oplus M, T, F \oplus \oplus 0, G \oplus 0, S \oplus V)$, *где* M, N — *два сепарабельных гильбертовых пространства* ($\dim N = \dim M$), V — *унитарный оператор из* N *в* M, *будем называть удлинением, а обратную к ней операцию — сокращением.*

2. *Операцию, переводящую узел* $\Delta_1 = H, E_1, E_2, T, F, G, S)$ *в узел* $\Delta_2 = (H, V_{E_1}, E_1, V_{E_2}, E_2, T, F V_{E_1}^{-1}, V_{E_2}G, V_{E_2}S, V_{E_1}^{-1})$, *где* V_{E_1}, V_{E2} — *два унитарных оператора, действующие в* E_1, *и* E_2 *соответственно, будем называть операцией изометрии.*

Теорема. *Пусть* $\Delta' = (H, E_1', E_2', T, F', G', S')$, $\Delta'' = (H, E_1'', E_2'', T, F'', G'', S'')$ *два унитарных операторных узла. Тогда с помощью операций удлинения, сокращения и изометрии из одного узла можно получить другой.*

Доказательство. Достаточно показать, что из любого узла Δ с основным оператором T в результате операций сокращения и изометрии можно получить некоторый фиксированный узел, элементы которого зависят только от T, а не от исходного узла.

Разложим пространства E_1 и E_2 в ортогональную сумму пространств $E_1 = \overline{F^*H} \oplus \ker F$; $E_2 = \overline{GH} \oplus \ker G^*$. Обозначим $f_0 = \ker F$; $f_1 = \overline{F^*H}$; $g_0 = \ker G^*$; $g_1 = \overline{GH}$; $F_1 = F \mid f_1$; $G_1 = (G^* \mid g_1)^*$. Тогда оператор $U = \begin{pmatrix} T & F \\ G & S \end{pmatrix}$ в соответствии с разложением пространств E_1 и E_2 примет вид

$$U = \begin{pmatrix} T & F_1 & 0 \\ G_1 & S_{11} & S_{12} \\ 0 & S_{21} & S_{22} \end{pmatrix}, \text{ где } \begin{pmatrix} S_{11} & S_{12} \\ S_{21} & S_{22} \end{pmatrix}$$

соответствующее разбиение оператора S.

Из того, что $UU^*=I$ и $U^*U=I$ следует $G_1^*S_{12}=0$; $F_1S_{21}^*=0$ **(4)**; $S_{22}^*S_{22}+S_{12}^*S_{12}=I_{f_0}$; $S_{21}S_{21}^*+S_{22}S_{22}^*=I_{g_0}$ **(5)**. Но так как $\ker F_1=0$; $\ker G_1^*=0$, то из (4) получаем $S_{12}=0$; $S_{21}=0$. Но тогда из (5) следует, что S_{22} — унитарный оператор из f_0 в g_0. Таким образом, $\Delta=(H, E_1, E_2, T, F, G, S)=(H, f_1\oplus f_0, g_1\oplus g_0, T, F_1\oplus\oplus 0, G_1\oplus 0, S_{11}\oplus S_{22})$. Проводя операцию сокращения, получим: $\Delta_1=(H, f_1, g_1, T, F_1, G_1, S_{11})$.

Из (2) следует $F_1F_1^*=I_H-TT^*=D_*^2$; $G_1^*G_1=I_H-T^*T=D^2$. Откуда $F_1=(D_*\mid R_*)V_1$; $f_1=V_1^{-1}\overline{D_*H}=V_1^{-1}R_*$; $G_1=V_2P_RD$; $g_1=V_2\overline{DH}=V_2R$, где V_1 и V_2 унитарные операторы соответственно из f_1 в R_* и из R в g_1. Кроме того, из равенства $U^*U=I$ следует, что $G_1^*S_{11}=-T^*F_1$, или $S_{11}=-G_1^{*-1}T^*F_1=-V_2P_RD^{-1}T^*(D_*\mid R_*)V_1$. Отсюда, учитывая равенство $TD=D_*T$ [1], имеем $S_{11}=-V_2(P_RT^*\mid R_*)V_1$. Проведя операцию изометрии с $V_{E_1}=V_1$; $V_{E_2}=V_2^{-1}$, получим узел $\Delta_2=(H, R_*, R, T, D_*\mid R_*, P_RD, -P_RT^*\mid R_*)$ **(6)**.

Так как элементы узла вида (6) зависят только от оператора T, то теорема доказана.

§ 2. Связь между х.о.-ф. унитарного узла и х.ф. оператора.

Определим минимальный унитарный узел как узел, не допускающий операции сокращения. Тогда, очевидно, узел вида (6) минимален. В связи с этим обозначим его х.о.-ф. через $\theta_{\min}(\lambda)$.

Теперь, используя операции, введенные в § 1, выразим х.о.-ф произвольного унитарного узла с основным оператором T через $\theta_{\min}(\lambda)$. Для этого сначала найдем х.о.-ф. унитарного узла вида (6) $\theta_{\min}(\lambda)=-P_RT^*\mid R_*+\lambda P_RD(I-\lambda T)^{-1}D_*\mid R_*$ или $\theta_{\min}(\lambda)=P_R(-T^*+\lambda D(I-\lambda T)^{-1}D_*)\mid R_*$ **(7)**. Выясним, как изменяется х.о.-ф. узла в результате применения операций удлинения и изометрии. Легко видеть, что при изометрии $\theta_{\Delta 2}(\lambda)=V_{E_2}\theta_{\Delta_1}(\lambda)V_{E_1}^{-1}$, а при удлинении $\theta_{\Delta_2}(\lambda)=\begin{pmatrix}\theta_{\Delta_1}(\lambda) & 0\\ 0 & V\end{pmatrix}$. Таким образом, любую х.о.-ф. унитарного узла с основным оператором T можно представить в виде

$\theta_\Delta(\lambda)=\begin{pmatrix}V_R\theta_{\min}(\lambda)V_{R_*} & 0\\ 0 & V\end{pmatrix}$ **(8)**, где $V_R\in\mathrm{Hom}[R, R]$; $V_{R_*}\in\mathrm{Hom}[R_*, R_*]$; $V\in\mathrm{Hom}[N, M]$ — три унитарных оператора, а N и M — сепарабельные гильбертовы пространства. Сравнивая (3) и (7), видим, что $\theta_T(\lambda)=\theta_{\min}^*(\overline{\lambda})$ **(9)**.

В соответствии с [1] узел $\Delta^*=(H, E_2 E_1, U^*)=(H, E_2, E_1, T^*, G^*, F^*, S^*)$ называется сопряженным к узлу $\Delta=(H, E_1, E_2, U)=(H, E_1, E_2, T, F, G, S)$. Очевидно, что свойство минимальности узла при переходе к сопряженному сохраняется, а х.о.-ф. сопряженных узлов связаны соотношением $\theta_{\Delta^*}(\lambda)=\theta_\Delta^*(\overline{\lambda})$. Значит, характеристическая функция оператора сжатия, рассматриваемая Б. С. Надем и Ч. Фояшем, является х.о.-ф. минимального унитарного узла, сопряженного к узлу вида (6).

Из (8) и (9) следует, что любую х.о.-ф. унитарного узла с основным оператором T можно представить в виде

$$\theta_\Delta(\lambda) = \begin{pmatrix} V_R \theta_T^* (\overline{\lambda}) V_{R*} & 0 \\ 0 & V \end{pmatrix}.$$

Список литературы: 1. *Бродский М. С.* Унитарные операторные узлы и их характеристические функции. — Усп. мат. наук, 1978, вып. 4, № 202, с. 141 — —168. 2. *Рисс Ф. и Секефальви-Надь Б.* Лекции по функциональному анализу. — М.: Мир, 1979. — 215 с. 3. *Секефальви-Надь Б., Фояш Ч.* Гармонический анализ операторов в гильбертовом пространстве. — М.: Мир, 1970.— 320 с. 4. *До Хонг Тан.*— Об эквивалентных операторных узлах. Теория функций, функцион. анализ и их прил., 1968. 7, с. 6 — 12.

Поступила в редколлегию 15.12.80.