УДК 517.5

Н. Д. СЕРЫХ

ОБ ОГРАНИЧЕННЫХ СДВИГАХ МНОЖЕСТВА КОРНЕЙ ФУНКЦИЙ КЛАССА S_D, НЕВЫВОДЯЩИХ ИЗ ЭТОГО КЛАССА

В совместной работе Б. Я. Левин и И. В. Островский ([1]) рассматривали условия ограниченной последовательности комплексных чисел ψ_m, чтобы сдвиг $\lambda_m \to \lambda_m + \psi_m$ множества корней λ_m функции типа синуса [1] (ф. т. с.) $S(z)$ не выводил это множество из рассматриваемого класса. Было показано, что для

---

[1] Целая функция $S(z)$ экспоненциального типа (ц. ф. э. т.) $\sigma > 0$ принадлежит классу ф. т. с., если при некотором $H > 0$ выполнены следующие условия $0 < M_1 \leqslant |S(x+iy)|e^{-\sigma|y|} \leqslant M_2 < \infty$ $(|y| \geqslant H)$.

того, чтобы функция $\tilde{S}(z)$ вида $\tilde{S}(z) = \lim_{n\to\infty} \prod_{-n}^{n} \left(1 - \frac{z}{\lambda_m + \Psi_m}\right)$ была ф. т. с., необходимо и достаточно, чтобы существовала ограниченная на вещественной оси целая функция $\varphi(z)$ экспоненциального типа $\leqslant \sigma$, удовлетворяющая в точках λ_m ($m = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$) интерполяционным условиям: $\varphi(\lambda_m) = \psi_m S'(\lambda_m)$, если λ_m — простой корень $S(z)$, и $\varphi(\lambda_m) = \ldots = \varphi^{(q-2)}(\lambda_m) = 0$, $\varphi^{(q-1)}(\lambda_m) = 1/q S^{(q)}(\lambda_m)\psi_m$, если λ_m — является корнем кратности q.

В статье приведем без доказательства теорему, показывающую, что аналогичное утверждение верно и для функций класса S_D, который был введен Б. Я. Левиным и Ю. И. Любарским в [2], [3]. Этот класс определяется следующим образом.

Пусть D — замкнутый выпуклый многоугольник в $\boldsymbol{C}$. Из начала координат (считаем, что оно принадлежит D) опустим нормали на его стороны. Углы, образованные этими нормалями с положительным лучом, обозначим через $\theta_1, \ldots \theta_n$ ($\theta_1) < \theta_2 < \ldots < \theta_n$). Пусть $h_D(\theta)$ — опорная функция D ($h_D(\theta) = \sup_{z\in D}(\mathrm{Re}\, ze^{-i\theta})$, и пусть $H(z) = |z|\, h_D(\arg z)$. При $K > 0$ положим $\Pi_j(K) = \{z : \mathrm{Re}(ze^{-i\theta_j}) > 0,\ |\mathrm{Im}\, ze^{-i\theta_j}| < K\}$. D_K-звездой назовем объединение всех полуполос $\Pi_j(K)$.

Определение. *Классом S_D называется класс всех ц. ф. э. т. $S(z)$ таких, что при некоторых положительных c, C, K (зависящих от функции $S(z)$) вне D_K-звезды выполняется условие* $0 < c < |S(z)|\, e^{-H(z)} < C < \infty$. Через B_D обозначается в дальнейшем класс ц. ф. э. т. $S(z)$, у которых $\sup_{z\in C}\{|S(z)|\, e^{-H(z)}\} < \infty$. В простейшем случае, когда многоугольник D является отрезком мнимой оси, класс S_D совпадает с классом функций типа синуса, а B_D — с классом B_σ, ц. ф. э. т. $\leqslant \sigma$, ограниченных на вещественной оси.

Теорема. *Пусть $\{\psi_m\}_{m=1}^{\infty}$ — ограниченная последовательность комплексных чисел, а $\{\lambda_m\}_{m=1}^{\infty}$ — последовательность корней*[2] *функции $S(z) \in S_D$. Для того, чтобы функция $\tilde{S}(z) = \lim_{n\to\infty} \prod_{m=1}^{n} \left(1 - \frac{z}{\lambda_m + \Psi_m}\right)$ (1) была функцией класса S_D, необходимо и достаточно, чтобы существовала целая функция $\varphi(z)$ класса B_D, удовлетворяющая в точках λ_m ($m = 1, 2, \ldots$) следующим интерполяционным условиям:* $\varphi(\lambda_m) = \psi_m S'(\lambda_m)$, *если* λ_m —

2) Как обычно, корни λ_m функции $S(z) \in S_D$ нумеруются в порядке возрастания их модулей; если модули некоторых корней совпадают, то эти корни нумеруются в произвольном порядке.

простой корень $S(z)$, *и* $\varphi(\lambda_m) = \ldots = \varphi^{(q-2)}(\lambda_m) = 0$, $\varphi^{(q-1)} \times$ $\times (\lambda_m) = \frac{1}{q} \psi_m S^{(q)}(\lambda_m)$, *если* λ_m *является корнем порядка* q.

Заметим, что если $\{\psi_m\}_{m=1}^{\infty} \in l^p$, $p > 1$, то, как показано в [4], функция $\tilde{S}(z)$, определенная равенством (1), принадлежит S_D.

Доказательство сформулированной выше теоремы проводится методом из [1], при этом также используется один прием сравнения канонических произведений из [5].

Список литературы: *Левин Б. Я. Островский И. В.* О малых возмущениях множества корней функций типа синуса. Изв. АН СССР. Сер. мат. 1979, **43**, с. 87—110. 2. *Левин Б. Я., Любарский Ю. И.* Интерполяция целыми функциями экспоненциального типа и ее приложения к разложениям в ряды по экспонентам. — Функцион. анализ и его прил., 1974, 8, № 2, с. 85—86. 3. *Левин Б. Я., Любарский Ю. И.* Интерполяция целыми функциями специальных классов и связанные с нею разложения в ряды экспонент. — Изв. АН СССР. Сер. мат. 1975, 39, с, 657—702. 4. *Серых Н. Д.* Об асимптотике целых функций, получаемых из функций класса S_D малым сдвигов корней. — Рукопись депон. в ВИНИТИ 11 марта 1980 г., № 923—80. —30 с. 5. *Седлецкий А. М.* Негармонические ряды Фурье.— Сиб. мат. журн., 1971, **12**, № 5, с. 1100—1114.

Поступила в редколлегию 30. 09. 81.