УДК 517.94

В. Б. РЫВКИН

ПРОСТРАНСТВО ГРАНИЧНЫХ ЗНАЧЕНИЙ ДЛЯ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОГО ОПЕРАТОРНОГО УРАВНЕНИЯ СО ЗНАКОНЕОПРЕДЕЛЕННЫМ КОЭФФИЦИЕНТОМ

В пространстве функций на отрезке $(0, \infty)$ со значениями в гильбертовом пространстве H рассматривается линейное дифференциальное уравнение $C\,du/dx + Au(x) = f(x)$ **(1)**, где оператор A — положительный самосопряженный, $A > d > 0$ оператор C симметричен и подчинен A. ($A^{-\frac{1}{2}} C A^{-\frac{1}{2}}$ ограничен). Уравнения вида (1) с положительным C хорошо исследованы в работе [1]. В виде (1) могут быть записаны некоторые задачи для параболических уравнений со знакопеременным коэффициентом при первой производной [2, 3], для эллиптически-параболических уравнений [4] и др. Для постановки граничных задач для уравнения (1) введем ряд пространств, а также уточним, в каком смысле понимается уравнение (1) и граничные условия, от чего существенно зависит разрешимость задач [5].

Пусть H^1 и H^{-1} — пространства, полученные из H, соответственно сужением и пополнением по нормам $\|W\|_{\pm}^2 = (A^{\pm 1}w, w)_H$, а $H^{\pm 1}(0, \infty)$ — пополнением пространств, гладких по x финитных функций по нормам $\|u\|^2_{\pm(0,\infty)} = \int\limits_0^\infty \|u(x)\|^2_{\pm}\, dx$, $H^{\pm 1} \times (0, \infty) = L_2[(0, \infty), H^{\pm 1}]$. Пусть $L_m : (H^1(0, \infty) \to H^{-1}(0, \infty))$ — максимальный оператор, полученный замыканием оператора, заданного выражением (1) на гладких по x финитных функциях со значениями в H^1, L_0 — минимальный оператор, полученный замыканием с множества функций, таких что $u(x) = 0$ при малых $x > 0$. Пространство $H_B = \mathscr{D}(L_m)/\mathscr{D}(L_0)$ назовем пространством граничных значений, где в областях определения вводится топология графика. Заменой $v(x) = A^{\frac{1}{2}} u(x)$; $g(x) = A^{-\frac{1}{2}} f(x)$ уравнение (1) приводится к $C_a(dv(x))/(dx) + v(x) = g(x)$ **(2)**, которое легко исследуется в терминах спектрального разложения оператора C_a. Однако в приложениях это может оказаться недостаточно эффективным. В статье сформулированы условия разрешимости в терминах исходных операторов, когда C часто является оператором умножения на функцию.

Непосредственное перенесение результатов для (2) на (1) дает следующие утверждения [6]:

1. Пусть $H_{B,a}$ — пополнение факторпространства $H^1/\mathrm{Ker}\, C$ по норме $\|u\|^2_{B,a} = \int |\lambda|\, d(E_\lambda w, w), w = A^{\frac{1}{2}} u$ **(3)**, где E_λ — раз-

ложение единицы оператора C_a. Отображение $T:(u(x)\to u(x)|_{x=0})$ порождает изоморфизм H_B и $H_{B,a}$. Проекторы (в H_B, H^1, H^{-1}) соответствующие $\lambda>0$ и $\lambda<0$ в (3) обозначим P_1 и P_2 соответственно.

2. Замкнутым операторам L таким, что $L_0\subseteq L\subseteq L_m$ взаимно однозначно соответствуют замкнутые подпространства $H_b\subseteq\subseteq H_B$ такие, что $T\mathcal{D}(L)=H_b$.

3. Форма $(Cu, u)_H$ непрерывна в H_B. Для существования L^{-1} (ограниченного и всюду на $H^{-1}(0, \infty)$ определенного) необходимо и достаточно, чтобы H_b имело следующую структуру: $P_1u=SP_2u$ при $u\in H_b$ и $P_2H_b=P_2H_B$, где $S=P_1SP_2$ ограничен в H_B. В частности, если для $u\in H_b$ выполняется $(Cu, u)_H\leqslant\leqslant 0$, то для существования L^{-1} необходимо и достаточно, чтобы H_b было максимальным подпространством с этим свойством.

Пусть ортогональные в H проекторы Q_1, $Q_2=E_H-Q_1$ приводят оператор $C=C_1-C_2$; $C_i=(-1)^{i-1}Q_iCQ_i\geqslant 0$, C_i подчинены A. Такие операторы C назовем абсолютно подчиненными A. Введем H_C — пополнение $H^1/\mathrm{Ker}\,C$ по норме $\|u\|_C^2=(C_1u, u)_H+(C_2u, u)_H$ **(4)**. Действие Q_i определено на H_C. При $u\in H^1$ определим операторы вложения $I_{1,0}$: $(H_B\to H_C)$ и $I_{2,0}$: $(H_C\to H_B)$. Пусть $H_C=Q_1H_C+Q_2H_C$.

Теорема 1. а) *$I_{1,0}$ и $I_{2,0}$ допускают замыкания I_1, I_2;* б) *определенные на $H_B\cap H_C$ операторы I_1P_i, $Q_iI_1P_j$, Q_iI_1, I_2Q_i, $P_iI_2Q_j$, P_iI_2 допускают замыкание. Ограниченность любого из них, либо I_1, либо I_2, влечет ограниченность всех, что необходимо и достаточно для эквивалентности норм (3), (4);* в) *оператор $L_R:(H^1(0, \infty)\to H^{-1}(0, \infty)\oplus Q_1H_C)$, заданный (1) и условием $(Q_1-RQ_2)u|_{x=0}=w$, $w\in Q_1H_C, R=Q_1RQ_2$, $\|R:(H_C\to\to H_C)\|<1$* **(5)**, *обратим, причем для решения $u(x)|_{x=0}\in H_B\cap H_C$.*

Эквивалентность норм (3), (4) облегчает ряд рассмотрений, в частности переход к случаю $\|R\|=1$.

Пусть $H=H_1\oplus H_2$, в H_i заданы $A_i>d>0$, $C_i>0$, C_i подчинены A_i. Аналогично $H^{\pm1}$ определим $H_i^{\pm1}$. Пусть Φ — замкнутое подпространство $H_1^{-1}\oplus H_2^{-1}$, причем $\Phi\cap H_i^{-1}=0$ и для $0\neq\varphi\in\Phi$ функционал $(\cdot, \varphi)_H$ на $H_1^1\oplus H_2^1$ неограничен относительно $((C_1\oplus C_2)\cdot, \cdot)_H^{\frac{1}{2}}$ Оператор A определим при помощи сужения формы $((A_1\oplus A_2)\cdot, \cdot)_H$, на $H^1=\{(\cdot, \Phi)_H=0\}\subseteq H_1^1\oplus H_2^1$, при этом $H^{-1}=(H_1^{-1}\oplus H_2^{-1})/\Phi$. Положим $C=C_1\oplus(-C_2)$. Операторы L с такими A и C в (1) назовем составным по аналогии с заданием условий согласования для уравнений составного типа. Если C в (1) абсолютно подчинен A, то соответствующий оператор может быть представлен как сужение составного с теми же H_B и H_C.

Пусть задан набор $z=(F, D, D_1, G)$, где F — гильбертово пространство, $D>d>0$ — самосопряженный оператор в F, $D_1\geqslant 0$

подчинен D и G — подпространство пополнения F по норме $(D^{-1}\cdot,\cdot)_F^{\frac{1}{2}}$. Для $\lambda>0$, $g\in G$ образуем $\mu(\lambda, g)=((D+\lambda D_1)^{-1}g, g)_F$. Будем говорить, что для набора z выполнено условие L_p (нижний показатель Ляпунова для $\mu(e^t, g)$, $t\to+\infty$, >-1), если существуют $M>1$, $\alpha>-1$ такие, что для всех $g\in G, \lambda>0$ имеет место $\mu(M\lambda, g)\geqslant M^\alpha\mu(\lambda, g)$.

Теорема 2. *Если условие L_p выполнено для одного из следующих наборов (Φ_i проекции Φ на H_i^{-1}: (H_i, A_i, C_i, Φ_i), $(H, A_1\oplus\oplus A_2, C_1\oplus C_2, \Phi)$, $(H, A, C_1\oplus C_2, \Phi_i)$,* то нормы (3), (4) эквивалентны с константами, зависящими от M и α.

Замечание. В качестве C_i в (1) можно брать ограниченные операторы $H_i^1\to H_i^{-1}$, являющиеся сильным пределом рассмотренных при условии неограниченности Φ-функционала. Результаты, верные для фиксированного A в (1) с соответствующими модификациями, верны при замене A на оператор $A_3(x)$ равномерно по x, подчиненный A, и такой, что A равномерно подчинен $A_3(x)+A_3^*(x)$.

Пример. $c(y)u_x(x, y)-u_{yy}(x, y)=f(x, y)$, $u|_{y=\pm1}=0$; $c(y)\in\in L_1(-1, 1)$, $c(y)y\geqslant0$. $H=L_2(-1, 1)=L_2(0, 1)\oplus L_2(-1, 0)$; $H_c=L_{2,}|c(y)|(-1, 1)$. Согласно теореме 1 можно задавать $u|_{x=0,\, y>0}\in H_C$. Для представления в виде составного оператора положим $A_1=-\frac{\partial^2}{\partial y^2}$ при условиях $u_y|_{y=0}=0$; $u|_{y=1}=0$, аналогично A_2. В качестве Φ возьмем оболочку $\delta(y+0)\oplus(-\delta(y-{}-0))$. Теорема 2 приводит к следующему достаточному условию эквивалентности H_B и H_C: пусть $c_k(y)=\frac{d}{dy}\sigma_k(y)$; $\sigma_k(0)=$ $=0$; $c_1=c(y)$; $c_2=-c(-y)$; $c_3=c_1+c_2$, если для некоторого $M_1>1$ и достаточно малых $y>1$ хотя бы для одного $k=1, 2, 3$: $\sigma_k(M_1y)\geqslant2\sigma_k(y)$ **(6)**, то нормы (3), (4) эквивалентны. Если $C(y)=-C(-y)$, то выполнение (6) для некоторых $M_1>1$ является также и необходимым для эквивалентности.

Предельный переход к $c(y)$-обобщенной функции ввиду [7] в существенном охватывает случай $\dim\Phi=1$.

Список литературы: 1. *Хилле Е., Филлипс Р.* Функцион. анализ и полугруппы. — М.: Изд-во иностр. лит., 1962, с. 52. 2. *Baouendi M. S., Grisvard P.* Sur une équation d'évolution changeant de type. — C. R. Acad. Sci. de Paris, ser *A*, 1967, **265**, № 19, p. 556—558. 3. *Baouendi M. S.*, Grisvard P. Sur une équation d'evolution changeant de type. J. Func. Analisis, 1968, 2, № 3, p. 352—357. 4. *Фикера Г.* К единой теории краевых задач для эллиптико-параболических уравнений второго порядка. — Математика, 1963, 7, № 6, с. 99—121. 5. *Рывкин В. Б.* О существовании решения составного параболического уравнения и абсолютной оценке начальных данных. В кн.: III респ. конф. математиков Белоруссии, 4—7 июня 1971 г., (Минск, июнь 1971 г.): Тез. докл. Минск: Вышайшая школа, 1971, ч. 2, с. 147—148. 6. *Рывкин В. Б.* Письмо в редакцию.— Диф. уравнение, 1968, 4, № 3, с. 556. 7. *Крейн М. Г.* Об одном обобщении исследований Стильтьеса.— Докл. АН СССР, 1952, **87**, № 6, с. 881—884.

Поступила в редколлегию 11. 04. 81.