УДК 517.9

Т. И. РЯБУШКО

ОЦЕНКА НОРМЫ РАЗНОСТИ ДВУХ ПОТЕНЦИАЛОВ КРАЕВЫХ ЗАДАЧ ШТУРМА — ЛИУВИЛЛЯ

Рассмотрим две дифференциальные операции Штурма—Лиувилля $l_1 = -\frac{d^2}{dx^2} + q_1(x)$; $l_2 = -\frac{d^2}{dx^2} + q_2(x)$, $(0 \leqslant x \leqslant \pi)$ с вещественными потенциалами $q_j(x) \in L_2[0, \pi]$ $(j = 1, 2)$, удовлетворяющими условиям $\int\limits_0^\pi q_j(t)\,dt = 0$ $(j = 1, 2)$.

Операции l_j $(j = 1, 2)$, рассматриваемые на дважды дифференцируемых функциях $y(x) \in L_2[0, \pi]$, удовлетворяющих граничным условиям $y(0) = 0$; $y'(\pi) = 0$; $y(0) = 0$; $y(\pi) = 0$, порождают в пространстве $L_2[0, \pi]$ самосопряженные операторы $L'(j)$, $L(j)$ $(j = 1, 2)$.

Обозначим через $\nu_1(j) \leqslant \nu_2(j) \leqslant \ldots$ — собственные значения операторов $L'(j)$ $(j = 1, 2)$, а через $\lambda_1(j) \leqslant \lambda_2(j) \leqslant \cdots$ — собственные значения операторов $L(j)$ $(j = 1, 2)$.

Согласно теореме Борга [1] потенциал однозначно восстанавливается по спектрам двух краевых задач с одним и тем же краевым условием на одном из концов интервала.

В данной статье дается оценка нормы разности двух потенциалов $q_1(x)$, $q_2(x)$ через нормы разности собственных значений соответствующих краевых задач.

Такая оценка в случае, когда собственные значения операторов $L'(1)$ и $L(1)$ мало отличаются от собственных значений операто ов $L'(2)$ и $L(2)$, была получена Боргом.

Обозначим через $C(\lambda, x)$, $S(\lambda, x)$ фундаментальную систему решений уравнения $l[y] = \lambda^2 y$ при начальных данных: $C(\lambda, 0) = S'(\lambda, 0) = 1$, $C'(\lambda, 0) = S(\lambda, 0) = 0$.

Тогда последовательности $\{\lambda_k\}$ и $\{\nu_k\}$ являются корнями функций $S(\lambda, \pi)$, $S'(\lambda, \pi)$.

Из леммы 3. 4. 2 [2] следует, что $\lambda S(\lambda, \pi) = \sin\lambda\pi + (f(\lambda))/\lambda$ **(1)**; $S'(\lambda, \pi) = \cos\lambda\pi + (g(\lambda))/\lambda$ **(2)**, где $f(\lambda) = \int\limits_0^\pi F(t)\cos\lambda t\,dt$; $F(0) = 0$; $F(t) \in L_2[0, \pi]$; **(3)** $g(\lambda) = \int\limits_0^\pi g(t) \times \sin\lambda t\,dt$; $g(t) \in L_2[0, \pi]$ **(4)**. Положим $\max\limits_{j=1,2} \frac{1}{\pi}\int\limits_0^\pi q_j^2(x)\,dx = b^2$ и рассмотрим операции $\tilde{l}_j = -\frac{d^2}{dx^2} + \tilde{q}_j(x)$, $(j = 1, 2)$, где $\tilde{q}_j(x) = \begin{cases} q_j + \left(\frac{\pi b}{2}\right), & 0 \leqslant x < \pi, \\ 0, & x \geqslant \pi. \end{cases}$

Для всех величин, связанных с операциями $\tilde{l}_i$, сохраним введенные ранее обозначения, добавляя к ним сверху значок $\sim$. Очевидно $q_1(x) - q_2(x) = \tilde{q}_1(x) - \tilde{q}_2(x)$; $\lambda_k(1) - \lambda_k(2) = \tilde{\lambda}_k(1) - \tilde{\lambda}_k(2)$; $\nu_k(1) - \nu_k(2) = \tilde{\nu}_k(1) - \tilde{\nu}_k(2)$.

В лемме 4 [3] показано, что

$$2\tilde{\lambda}_k(j) \geqslant 1; \quad \left\| \sqrt{\tilde{\lambda}_k(j)}\, \tilde{S}\left(\sqrt{\tilde{\lambda}_k(j)},\, x\right) \right\|_\pi^2 \geqslant \frac{\pi\left(1 - \frac{1}{2\pi}\right)}{2(1+5b)^4}. \qquad (5)$$

Из соотношений (1) — (4) следует, что функции $\lambda\tilde{S}_1(\lambda, \pi) - \lambda\tilde{S}_2(\lambda, \pi) = \frac{\tilde{f}_1(\lambda) - \tilde{f}_2(\lambda)}{\lambda} \in L_2(-\infty, \infty)$, $\tilde{S}_1'(\lambda, \pi) - \tilde{S}_2'(\lambda, \pi) = \frac{\tilde{g}_1(\lambda) - \tilde{g}_2(\lambda)}{\lambda} \in L_2(-\infty, \infty)$.

Кроме того, функция $\lambda\tilde{S}(\lambda, \pi)$ является целой нечетной функцией экспоненциального типа $\leqslant \pi$, а $\tilde{S}'(\lambda, \pi)$ — целой четной функцией экспоненциального типа $\leqslant \pi$, поэтому согласно [3, лемма 1]

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\left|\lambda\left[\tilde{S}_1(\lambda, \pi) - \tilde{S}_2(\lambda, \pi)\right]\right|^2}{|\tilde{e}_1(\lambda, 0)|^2} \cdot \lambda^2\, d\lambda = \pi \times$$

$$\times \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\left|\sqrt{\tilde{\lambda}_k(1)}\left[\tilde{S}_1\left(\sqrt{\tilde{\lambda}_k(1)}, \pi\right) - \tilde{S}_2\left(\sqrt{\tilde{\lambda}_k(1)}, \pi\right)\right]\right|^2}{\left\|\tilde{S}_1\left(\sqrt{\tilde{\lambda}_k(1)}, x\right\|^2}; \qquad (6)$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\left|\tilde{S}_1'(\lambda, \pi) - \tilde{S}_2^1(\lambda, \pi)\right|^2}{|\tilde{e}_1(\lambda, 0)|^2} \cdot \lambda^2\, d\lambda =$$

$$= \pi \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\left|\tilde{S}_1'\left(\sqrt{\tilde{\nu}_k(1)}, \pi\right) - \tilde{S}_2'\left(\sqrt{\tilde{\nu}_k(1)}, \pi\right)\right|^2}{\left\|\tilde{S}_1\left(\sqrt{\tilde{\nu}_k(1)}, x\right)\right\|^2},$$

где $\tilde{e}(\lambda, x)$ — решение уравнения $l[y] = \lambda^2 y$, совпадающее с $e^{i\lambda x}$ при $x \in [\pi, \infty]$.

Теорема. $\|q_1(x) - q_2(x)\| \leqslant C(\|\lambda(1) - \lambda(2)\| + \|\nu(1) - \nu(2)\|$, *где* $C = 8\sqrt{\pi}\left[1 + 3b\sqrt{2\pi^3}\exp(3\pi^2 b)\right]\exp\left(\frac{5}{2}\pi^2 b\right)(1+5b)^2\left(1 - \frac{1}{2\pi}\right)^{-2}$; $\|\lambda(1) - \lambda(2)\| = \left\{\sum_{k=1}^{\infty} |\lambda_k(1) - \lambda_k(2)|^2\right\}^{\frac{1}{2}}$; $\|\nu(1) - \nu(2)\| = \left\{\sum_{k=1}^{\infty} |\nu_k(1) - \nu_k(2)|^2\right\}^{\frac{1}{2}}$.

Доказательство. В работе [3] (см. формулу (2.19)) доказано неравенство $\| q_1(x) - q_2(x) \| \leqslant \frac{2}{\sqrt{\pi}} [1 + 3b\sqrt{2\pi^3} \times \exp(3\pi^2 b)] \cdot \| \lambda (\tilde{S}_1(\lambda) - \tilde{S}_2(\lambda) \|$ **(7)**, где $\tilde{S}_j(\lambda) = \frac{\tilde{e}_j(-\lambda, 0)}{\tilde{e}_j(\lambda, 0)}$ $(j = 1,2)$. (8)

Значит, для доказательства теоремы нужно оценить $\| \lambda \times (\tilde{S}_1(\lambda) - \tilde{S}_2(\lambda)) \|$.

Из соотношения (8) следует, что $\tilde{S}_1(\lambda) - \tilde{S}_2(\lambda) = \frac{\tilde{e}_1(-\lambda, 0) - \tilde{e}_2(-\lambda, 0)}{\tilde{e}_1(\lambda, 0)} + \frac{\tilde{e}_2(-\lambda, 0)}{\tilde{e}_2(\lambda, 0)} \times \frac{\tilde{e}_2(\lambda, 0) - \tilde{e}_1(\lambda, 0)}{\tilde{e}_1(\lambda, 0)}$.

Значит, $|\tilde{S}_1(\lambda) - \tilde{S}_2(\lambda)| \leqslant \frac{2 | \tilde{e}_2(\lambda, 0) - \tilde{e}_1(\lambda, 0)|}{\tilde{e}_1(\lambda, 0)}$, где $\tilde{e}(\lambda, 0) = e^{i\lambda\pi} [\tilde{S}_1(\lambda, \pi) - i\lambda \tilde{S}(\lambda, \pi)]$ (см. [2], лемма 3. 4. 1).

Поэтому $\| \lambda (\tilde{S}_1(\lambda) - \tilde{S}_2(\lambda)) \|^2 \leqslant 4 \int\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{| \tilde{S}_1'(\lambda, \pi) - \tilde{S}_2'(\lambda, \pi)|^2}{|\tilde{e}_1(\lambda, 0)|^2} \times \lambda^2 \, d\lambda + 4 \int\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{|\lambda (\tilde{S}_1(\lambda, \pi) - \tilde{S}_2(\lambda, \pi))|^2}{|\tilde{e}_1(\lambda, 0)|^2} \cdot \lambda^2 \, d\lambda$ или, используя соотношения (6),

$$\| \lambda (\tilde{S}_1(\lambda) - \tilde{S}_2(\lambda)) \|^2 \leqslant$$

$$\leqslant 4\pi \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\left| \tilde{S}_1'\left(\sqrt{\tilde{\nu}_k(1)}, \pi\right) - \tilde{S}_2'\left(\sqrt{\tilde{\nu}_k(1)}, \pi\right)\right|^2}{\left\|\tilde{S}_1\left(\sqrt{\tilde{\lambda}_k(1)}, x\right)\right\|^2} +$$

$$+ 4\pi \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\left|\sqrt{\tilde{\lambda}_k(1)} \left[\tilde{S}_1\left(\sqrt{\tilde{\lambda}_k(1)}, \pi\right) - \tilde{S}_2\left(\sqrt{\tilde{\lambda}_k(1)}, \pi\right)\right]\right|^2}{\left\|\tilde{S}_1\left(\sqrt{\tilde{\lambda}_k(1)}, x\right)\right\|^2}.$$

Так как $\sqrt{\tilde{\lambda}_k(j)}\, \tilde{S}_j\left(\sqrt{\tilde{\lambda}_k(j)}, \pi\right) = 0$, то согласно неравенству Бернштейна, $\left|\sqrt{\tilde{\lambda}_k(1)}\, \tilde{S}_1\left(\sqrt{\tilde{\lambda}_k(1)}, \pi\right) - \sqrt{\tilde{\lambda}_k(1)} \times \tilde{S}_2\left(\sqrt{\tilde{\lambda}_k(1)}, \pi\right)\right| = \left|\sqrt{\tilde{\lambda}_k(2)}\, \tilde{S}_2\left(\sqrt{\tilde{\lambda}_k(2)}, \pi\right) - \sqrt{\tilde{\lambda}_k(1)} \times \tilde{S}_2\left(\sqrt{\tilde{\lambda}_k(1)}, \pi\right)\right| \leqslant \pi \left|\sqrt{\tilde{\lambda}_k(1)} - \sqrt{\tilde{\lambda}_k(2)}\right| \cdot \sup\limits_{-\infty<\lambda<\infty} | \lambda \times \tilde{S}_2(\lambda, \pi)| \leqslant \pi \exp(2\pi^2 b) \cdot \left|\sqrt{\tilde{\lambda}_k(1)} - \sqrt{\tilde{\lambda}_k(2)}\right|$, поскольку $\times \sup\limits_{-\infty<\lambda<\infty} |\lambda \tilde{S}_2(\lambda, \pi)| \leqslant \exp(2\pi^2 b)$ (см. [3], лемма 5).

Из этой оценки и неравенства (5) следует, что

$$\frac{\left|\sqrt{\tilde{\lambda}_k(1)}\left(\tilde{S}_1\left(\sqrt{\tilde{\lambda}_k(1)},\ \pi\right)-\tilde{S}_2\left(\sqrt{\tilde{\lambda}_k(1)},\ \pi\right)\right)\right|^2}{\left\|\tilde{S}_1\left(\sqrt{\tilde{\lambda}_k(1)},\ x\right)\right\|^2} \leqslant \tag{10}$$

$$\leqslant \frac{2\pi \exp(4\pi^2 b)}{\left(1-\frac{1}{2\pi}\right)(1+5b)^{-4}} \cdot \frac{\tilde{\lambda}_k(1)}{\left|\sqrt{\tilde{\lambda}_k(1)}+\sqrt{\tilde{\lambda}_k(2)}\right|^2} |\tilde{\lambda}_k(1)-\tilde{\lambda}_k(2)|^2 \leqslant$$

$$\leqslant 2\pi \exp(4\pi^2 b)(1+5b)^4\left(1-\frac{1}{2\pi}\right)^{-1} \cdot |\tilde{\lambda}_k(1)-\tilde{\lambda}_k(2)|^2.$$

Аналогично показывается, что

$$\frac{\left|\tilde{S}_1'\left(\sqrt{\tilde{\nu}_k(1)},\ \pi\right)-\tilde{S}_2'\left(\sqrt{\tilde{\nu}_k(1)},\ \pi\right)\right|^2}{\left\|\tilde{S}_1\left(\sqrt{\tilde{\lambda}_k(1},\ x\right)\right\|^2} \leqslant$$

$$\leqslant 4\pi\left(1+\frac{\pi^2 b}{2}\right)^2 \exp(4\pi^2 b)(1+5b)^4\left(1-\frac{1}{2\pi}\right)^{-1}\left|\tilde{\nu}_k(1)-\tilde{\nu}_k(2)\right|^2. \tag{11}$$

Из неравенств (7), (9) — (11) вытекает доказываемое утверждение.

Список литературы. 1. *Borg G.* Eine Umkehrung der Sturm — Liouvilleschen Eigenwertaufgabe. — Acta math., 1946, 78, fasc. 1, p. 1 — 96. 2. *Марченко В. А.* Операторы Штурма—Лиувилля и их приложения. — Киев: Наук. думка, 1977. — 331 с. 3. *Марченко В. А.*, *Островский И. В.* Аппроксимация периодических потенциалов конечнозонными. — Прикл. математика и механика, вып. 45, 1980, с. 4 — 40.

Поступила в редколлегию 30. 09. 81.