УДК 517.55

А. Л. РОНКИН

О НЕПРИВОДИМОСТИ КВАЗИПОЛИНОМОВ

В статье показано, что вопрос о приводимости квазиполинома сводится к вопросу о приводимости связанных с ним полиномов.

Квазиполином — это функция $C^m \to C$ вида $P(z) = \sum_{k=1}^{l} a_k \times$ $\times\, e^{\langle \lambda_k, z \rangle}$, где $a_k \in C$, $\lambda_k \in C^m$, $\lambda_j \neq \lambda_i$ при $i \neq j$. Числа a_k называют коэффициентами, а векторы λ_k — показателями квазиполинома P. Спектр квазиполинома $P(z)$ обозначим Λ_p ($\Lambda_p = \{\lambda_k : a_k \neq \neq 0\}$. Спектр квазиполинома будем называть нетривиальным, если число точек в нем больше 1

Определение: *Квазиполином называется неприводимым в кольце квазиполиномов, если он не представим в виде произведения двух квазиполиномов с нетривиальными спектрами.*

Множество векторов $\{\tilde{\mu}_k\}_1^r$ называют целым (рациональным) базисом в множестве $\{\mu_k\}_1^n$, если: 1) векторы $\tilde{\mu}_k$ линейно независимы над Z^1 и 2) каждый вектор μ_k представим в виде линейной комбинации векторов $\tilde{\mu}_j$ с целыми (рациональными) коэффициентами. Известно [1, с. 67], что в любом множестве векторов $\{\mu_j\}_1^n$ есть целый базис.

Пусть $B=\{\tilde{\lambda}_j\}_1^r$ — целый базис в Λ_p. Тогда $\lambda_l=\sum\limits_{j=1}^{r}\alpha_l^j\tilde{\lambda}_j$, $\alpha_l^j\in Z$.

Подставив это разложение показателей по базису в представление квазиполинома $P(z)$, получим $P(z)=\sum\limits_{k=1}^{l}a_k\exp\left(\langle\sum\limits_{j=1}^{r}\times\right.$ $\left.\times\,\alpha_k^j\tilde{\lambda}_j,\ z\rangle\right)=\sum\limits_{k=1}^{l}a_k\prod\limits_{j=1}^{r}(\exp<\tilde{\lambda}_j,\ z>)^{\alpha_k^j}$. Таким образом, квазиполиному $P(z)$ можно поставить в соответствие рациональную функцию $\bar{P}(u_1,\ldots,u_r)=\sum\limits_{k=1}^{l}a_k\,u^{\alpha_k}$. Здесь $\alpha_k=(\alpha_k^1,\ldots,\alpha_k^r)\in$ $\in Z^r$, $u=(u_1,\ldots,u_r)$ и $u^{\alpha_k}=u_1^{\alpha_k^1}\cdot\ldots\cdot u_r^{\alpha_k^r}$. Функции указанного вида, для сокращения записи назовем Z-полиномами. Отметим, что произведение Z-полиномов после соответствующего сокращения и приведения подобных является Z-полиномом. Назовем Z-полином тривиальным, если он состоит из одного слагаемого типа $a_k u^{\alpha_k}$, т. е. является мономом.

Рассмотрим отображение $\rho_B: C^m\ni z\to(e^{\langle\tilde{\lambda}_1,\ z\rangle},\ldots,\ e^{\langle\tilde{\lambda}_r, z\rangle})\in$ $\in C^r$ (напомним, что $B=\{\tilde{\lambda}_j\}_1^r$). Очевидно, что $\bar{P}\circ\rho_B(z)=P(z)$. При помощи отображения ρ_B любому Z-полиному $\bar{Q}$ в C^r ставится в соответствие квазиполином $\bar{Q}\circ\rho_B(z)$. Это соответствие инъективно:

Лемма 1. *Пусть Z-полиномы $\bar{Q}_1$ и $\bar{Q}_2$ таковы, что $\bar{Q}_1\circ\rho_B(z)\equiv$ $\equiv\bar{Q}_2\circ\rho_B(z)$. Тогда $\bar{Q}_1\equiv\bar{Q}_2$,* т. е. *Z-полиномы $\bar{Q}_1$ и $\bar{Q}_2$ состоят из одинаковых слагаемых.*

Доказательство. Так как различным мономам $a_k u^{\alpha_k}$ соответствуют различные экспоненты (ввиду линейной независимости над Z векторов $\tilde{\lambda}_k$), то для совпадения квазиполиномов $\bar{Q}_1\circ\rho_B(z)$ и $\bar{Q}_2\circ\rho_B(z)$ необходимо (ввиду линейной независимости над C экспонент с различными показателями), чтобы $\bar{Q}_1$ и $\bar{Q}_2$ состояли из одинаковых слагаемых.

Теорема А. *Пусть $P(z)$ — квазиполином, $B=\{\gamma_j\}_1^r$ — целый базис в Λ_P и $\bar{P}_0(u_1,\ldots,u_r)$ — Z-полином такой, что $\bar{P}_0\circ\rho_B(z)=$ $=P(z)$. Тогда для того, чтобы квазиполином $P(z)$ был приво-*

[1] Т. е. линейная комбинация $m_1\tilde{\mu}_1+\cdots+m_r\tilde{\mu}_r$ с целочисленными коэффициентами равна нулю лишь в случае, когда все коэффициенты m_j равны нулю.

дим, необходимо и достаточно, чтобы при некотором натуральном M Z-полином $\bar{P}_1(u) = \bar{P}_0(u_1^M, \ldots, u_r^M)$ раскладывался в произведение двух нетривиальных Z-полиномов.

Достаточность. Пусть $\bar{P}_1(u) = \bar{F}(u) \cdot \bar{Q}(u)$, где $\bar{F}(u)$ и $\bar{Q}(u)$ — нетривиальные Z-полиномы. Множество $\Gamma = \left\{\frac{1}{M}\gamma_j\right\}_1^r$ является целым базисом в Λ_P. Легко видеть, что $P(z) = \bar{P}_0 \circ \rho_B(z) = \bar{P}_1 \circ \rho_\Gamma(z) = \bar{F} \circ \rho_\Gamma(z) \times \bar{Q} \circ \rho_\Gamma(z) = F(z) \cdot Q(z)$, где квазиполиномы $F(z)$ и $Q(z)$ имеют нетривиальный спектр.

Необходимость. Пусть $P(z) = F(z) \cdot Q(z)$ и спектры квазиполиномов $F(z)$ и $Q(z)$ нетривиальны. Базис $\{\gamma_k\}_1^r$ в Λ_P можно дополнить до рационального базиса $\{\gamma_k\}_1^n$ в множестве $\Lambda_P \cup \Lambda_Q \cup \cup \Lambda_F$. Найдется такое натуральное M, что множество $\Gamma = \left\{\tilde{\gamma}_k = \frac{1}{M}\gamma_k\right\}_1^n$ является целым базисом в $\Lambda_P \cup \Lambda_Q \cup \Lambda_F$. Описанным ранее способом квазиполиномам P, Q, F поставим в соответствие Z-полиномы $\bar{P}(u_1, \ldots, u_n)$, $\bar{Q}(u_1, \ldots, u_n)$, $\bar{F}(u_1, \ldots, u_n)$ такие, что $\bar{P} \circ \rho_\Gamma(z) = P(z)$, $\bar{Q} \circ \rho_\Gamma(z) = Q(z)$ и $\bar{F} \circ \rho_\Gamma(z) = F(z)$. Поскольку $\{\tilde{\gamma}_j\}_1^r$ — целый базис в Λ_P, то Z-полином $\bar{P}(u_1, \ldots, u_r, \ldots, u_n)$ не зависит от последних $n - r$ переменных. Поэтому в дальнейшем вместо $\bar{P}(u_1, \ldots, u_n)$ будем писать $\bar{P}(u_1, \ldots, u_r)$.

Рассмотрим Z-полином $\bar{P}_2 = \bar{F} \cdot \bar{Q}$. Имеем $\bar{P}_2 \circ \rho_\Gamma(z) = \bar{F} \circ \rho_\Gamma \times \times (z) \times \bar{Q} \circ \rho_\Gamma(z) = F(z) \cdot Q(z) = P(z) = \bar{P} \circ \rho_\Gamma(z)$. Отсюда по лемме получаем, что $\bar{P}_2 \equiv \bar{P}$. Таким образом, $\bar{P}(u_1, \ldots, u_r) = \bar{F}(u_1, \ldots, u_n) \cdot \bar{Q}(u_1, \ldots, u_n)$. Это равенство возможно лишь в том случае, когда Z-полиномы $\bar{F}$ и $\bar{Q}$ допускают представления

$$\bar{F}(u_1, \ldots, u_n) = \bar{F}_1(u_1, \ldots, u_r)\, u^\alpha, \bar{Q}(u_1, \ldots, u_n) = \bar{Q}_1(u_1, \ldots, u_r)\, u^{-\alpha},$$

где $\bar{F}_1, \bar{Q}_1$ — Z-полиномы. Нами получено разложение $\bar{P}_2(u_1, \ldots, u_r) = \bar{F}_1(u_1, \ldots, u_r)\bar{Q}_1(u_1, \ldots, u_r)$. Легко видеть, что $\bar{P}_2(u_1, \ldots, u_r) = \bar{P}(u_1^M, \ldots, u_r^M)$. Нетривиальность Z-полиномов $\bar{F}_1$ и $\bar{Q}_1$ вытекает из нетривиальности спектров Λ_F, Λ_Q и равенств

$$F(z) = \bar{F}_1 \circ \rho_\Gamma(z)\, e^{\langle c, z\rangle}; \ Q(z) = \bar{Q}_1 \circ \rho_\Gamma(z)\, e^{-\langle c, z\rangle}.$$

Теорема доказана.

При доказательстве теоремы установлена связь между показателями делимого и делителя, уточняющая результаты работ [2,3].

Предложение. *Показатели делителя принадлежат рациональному модулю, натянутому на показатели делимого.*

Теорема А позволит нам установить неприводимость некоторых квазиполиномов. При этом мы используем следующий критерий неприводимости полиномов многих переменных, данный в статье Рубэла, Скваелза и Тейлора [4]: пусть $P_j(t)$ $(j \in$

$\in \overline{1, \ldots, r}$, $r \geqslant 3$) — непостоянные полиномы, тогда полином $P_1(u_1) + \cdots + P_r(u_r)$ неприводим.

Следствие 1. *Пусть* $P(z) = \sum_{k=1}^{r} a_k \exp\langle \lambda_k, z\rangle$, *где* $a_k \in C \setminus 0$, $r \geqslant 3$. *Если показатели* λ_k *линейно независимы над* Z, *то квазиполином* $P(z)$ *неприводим.*

Доказательство. Так как $\{\lambda_k\}_1^r$ — целый базис в Λ_P, то соответствующий Z-полином имеет вид $\bar{P}(u_1, \ldots, u_r) = \sum_{k=1}^{r} \times a_k u_k$. Полиномы $\bar{P}(u_1^M, \ldots, u_r^M) = \sum_{k=1}^{r} a_k u_k^M$ неприводимы согласно сформулированному выше критерию неприводимости полиномов.

Обобщением следствия 1 является

Следствие 2. *Пусть* $P_k(z)$ — *квазиполиномы с нетривиальными спектрами* ($k \in \overline{1, \ldots, r}$, $r \geqslant 3$). *Пусть далее* Γ_j — *целый базис в* Λ_{P_j}. *Если* $\Gamma_j \cap \Gamma_i = \varnothing$ *при* $i \neq j$ *и* $\bigcup_1^r \Gamma_j$ — *целый базис в* $\bigcup_1^r \Lambda_{P_j}$, *то квазиполином* $\sum_{k=1}^{r} P_k(z)$ *неприводим.*

При помощи теоремы А и следствий из нее можно получить как примеры применения следующие факты о неприводимости квазиполиномов.

1. Если спектр квазиполиномов лежит в вершинах r-мерного симплекса, $r \geqslant 3$, то такой квазиполином неприводим.

2. Если спектр квазиполинома совпадает с множеством $\{\lambda \in C : \lambda^p = 1\}$, где p — простое число, большее 2, то этот квазиполином неприводим.

Кроме приводимости в кольце квазиполиномов можно рассматривать приводимость в кольце обобщенных квазиполиномов, т. е. функций вида $\sum a_k(z) \exp\langle \lambda_k, z\rangle$, где $a_k(z)$ — целые функции нулевой степени.

Следующая лемма позволяет полученные результаты о приводимости квазиполиномов распространить на случай обобщенных квазиполиномов.

Лемма 2. *Пусть* $P(z)$, $Q(z)$, $F(z)$ — *обобщенные квазиполиномы:*

$$P(z) = \sum_{k=1}^{l} a_k(z)\, e^{\langle \lambda_k, z\rangle};\ Q(z) = \sum_{k=1}^{m} b_k(z)\, e^{\langle \mu_k, z\rangle};$$

$$F(z) = \sum_{k=1}^{n} c_k(z)\, e^{\langle \beta_k, z\rangle}.$$

Пусть далее $P = Q \cdot F$. Тогда для любого z_0 имеет место равенство $\sum_{k=1}^{l} a_k(z_0)\, e^{\langle \lambda_k, z\rangle} = \left(\sum_{k=1}^{m} b_k(z_0)\, e^{\langle \mu_k, z\rangle}\right)\left(\sum_{k=1}^{n} c_k(z_0)\, e^{\langle \beta_k, z\rangle}\right)$.

Доказательство. Обозначим через $\varphi(z)$ обобщенный квазиполином $P(z) - Q(z)F(z)$: $\varphi(z) = \sum_{k=1}^{l} a_k(z)\, e^{\langle \lambda_k, z\rangle} - \sum_{j=1}^{m}\sum_{i=1}^{n} \times$ $\times\, b_j(z)\, c_i(z)\, e^{\langle \mu_j + \beta_i, z\rangle}$. Сгруппируем в правой части равенства слагаемые с равными показателями: $\varphi(z) = \sum A_k(z)\, e^{\langle B_k, z\rangle}$. Здесь $B_i \neq B_j$ при $i \neq j$.

Показатели B_k содержатся в множестве $\{\lambda_j\} \cup \{\mu_k + \beta_i\}$. Коэффициенты $A_k(z)$ получены следующим образом: $A_k(z) = \sum \delta_k^p a_p(z) + \sum b_j(z)\, c_i(z)\, \delta_k^{j,i}$, где $\delta_k^p = \begin{cases} 0, \text{ если } \lambda_p \neq B_k \\ 1, \text{ если } \lambda_p = B_k, \end{cases}$ $\delta_k^{j,i} = \begin{cases} 0, \text{ если } \mu_j + \beta_i \neq B_k \\ 1, \text{ если } \mu_j + \beta_i = B_k. \end{cases}$ Таким образом, способ получения коэффициентов $A_k(z)$ из функций $a_k(z)$, $b_k(z)$, $c_k(z)$ полностью определяется показателями квазиполиномов P, F, Q. Значит, квазиполином $\varphi_1(z)$, равный $\sum_{k=1}^{l} a_k(z_0)\, e^{\langle \lambda_k, z\rangle} - \left(\sum_{k=1}^{m} b_k(z_0)\, e^{\langle \mu_k, z\rangle}\right) \times$ $\times \left(\sum_{k=1}^{n} c_k(z_0)\, e^{\langle \beta_k, z\rangle}\right)$ имеет вид $\sum A_k(z_0) \exp\langle B_k, z\rangle$. Здесь B_k, $A_k(z_0)$ — те же, что и в представлении обобщенного квазиполинома $\varphi(z)$. Согласно условию леммы $P(z) = Q(z) \cdot F(z)$ и, значит, $\varphi(z) \equiv 0$, откуда вытекает, что $A_k(z) \equiv 0$. Поэтому $A_k(z_0) = 0$ для любых k и z_0. Следовательно, $\varphi_1(z) \equiv 0$, что возможно лишь в том случае, когда $\sum_{k=1}^{l} a_k(z_0)\, e^{\langle \lambda_k, z\rangle} = \left(\sum_{k=1}^{m} b_k(z_0) \times e^{\langle \mu_k, z\rangle}\right)\left(\sum_{k=1}^{n} c_k(z_0)\, e^{\langle \beta_k, z\rangle}\right)$.

Лемма доказана.

Список литературы: 1. *Левитан Б. М.* Почти периодические функции.— М.: ГИТТЛ, 1953.— 396 с. 2. *Гордон Б. Я.*, *Левин Б. Я.* О делении квазиполиномов. — Функцион. анализ, 1971, т. 5, вып. I, с. 22—29. 3. *Ронкин А. Л.* Теорема о делении квазиполиномов. — Теория функций, функцион. анализ, 1980, вып. 34, с. 104 — 111. 4. *Rubel L. A.*, *Squires W. A.*, *Taylor B. A.* Irreducibility of certain entire functions with applications to harmonic analysis. Annals of Mathematics, 108 (1978), 553—567.

Поступила в редколлегию 05.07.81.