УДК 517.5

В. П. ПОТАПОВ

ТЕОРЕМА О МОДУЛЕ. II

§ 6. Теорема о произведении модулей

В связи с мультипликативностью класса WJ-нерастягивающих матриц неизбежно возникает вопрос об изучении произведений, составленных из модулей

$$w_k = r_1 \cdot r_2 \ldots r_k \text{ или } w_k = e^{-H_1} \cdot e^{-H_2} \ldots e^{-H_k}.$$

Рассматривая бесконечную последовательность таких произведений, мы сталкиваемся с двумя ситуациями. Первая, более простая, заключается в том, что $w_{k+1} = w_k r_{k+1}$ $(k = 1,2, \ldots)$; в этом случае естественно возникает вопрос о сходимости последовательности w_k. Вторая, самая общая, предполагает, что при переходе от w_k к w_{k+1} произвольным образом изменяются как сами сомножители так и число их. Здесь существенны критерии компактности семейства матриц.

Для того чтобы сориентироваться в возникающих трудностях, остановимся чуть подробнее на первом случае. Из-за некоммутативности умножения произведение модулей, вообще говоря, не является модулем, так что $w_k = R_k U_k$, где $U_k \neq I$, J-формы $J - w_k J w_k^* = J - R_k^2 J$ (определяющая структура нашей теории!) монотонно возрастают и из ограниченности их следует существование предела.

Неравенство $0 \leqslant J - R_k J \leqslant J - R_k^2 J$ и теорема (4.4)[1] о монотонности модуля приведут к существованию предела R_k первой компоненты полярного представления, но как ведет себя вторая компонента U_k — сказать трудно, особенно если учесть, что в случае индефинитной метрики группа J-унитарных матриц не компактна [2].

Наша задача, стало быть, должна заключаться в том, чтобы «укротить» U_k, надеясь на то, что хотя произведение модулей и не является модулем, оно все же не должно слишком отличаться от модуля. Кроме того, следует позаботиться о том, чтобы «подпереть» снизу модули R_k, так как без этого трудно рассчитывать на ограниченность U_k.

При рассмотрении вопроса о сходимости или компактности таких произведений целесообразно воспользоваться развитым языком инфинитезимального исчисления, записывая w_k в виде мультипликативного интеграла $w_k = \overset{\curvearrowright}{\int_0^k} e^{-H(x)dx} = R_k U_k$, где $H(x)$ — ступенчатая функция, равная H_j на $[j-1, j]$. Обобщив возникшую ситуацию, рассмотрим как отдельный интеграл $w(t) = \overset{\curvearrowright}{\int_0^t} e^{-H(x)dx}$, $(0 \leqslant t < +\infty)$, так и совокупность таких интегралов $w_\alpha(t) = \overset{\curvearrowright}{\int_0^t} e^{-H_\alpha(x)dx}$, $(0 \leqslant t < +\infty)$, где $H(x)$, $H_\alpha(x)$ — произвольные J-эрмитово-неотрицательные суммируемые на каждом конечном сегменте $[0, l]$ матрицы-функции: $\int_0^l \| H_\alpha(x) \| dx < +\infty$. Заметим

---

[1] Потапов В. П. Теорема о модуле. I. (Основные понятия. Модуль). — Теория функций, функцион. анализ и их прил., 1982, вып. 38, с. 91—101.

[2] Пример:

$$J = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad U = \begin{pmatrix} \operatorname{ch}\theta & \operatorname{sh}\theta \\ \operatorname{sh}\theta & \operatorname{ch}\theta \end{pmatrix}.$$

прежде всего, что $w(t)$ является обратимой для всех t, так как наряду с $w(t)=\overset{\curvearrowright}{\int_0^t} e^{-H(x)dx}$ существует и мультипликативный интеграл $\overset{\curvearrowleft}{\int_0^t} e^{H(x)dx}=w^{-1}(t)$. Мы знаем, что $w(t)$, $w^{-1}(t)$ — абсолютно непрерывны на любом сегменте $[0, l]$; их производные почти всюду равны $\frac{dw}{dt}=-w(t)H(t)$, $\frac{dw^{-1}}{dt}=H(t)w^{-1}(t)$. Из первого равенства следует, что $J-w(t)Jw^*(t)=2\int_0^t w(x)H(x)Jw^*(x)\,dx\geqslant 0$. Являясь обратимой J-нерастягивающей матрицей, $w(t)$ допускает полярное представление: $w(t)=R(t)U(t)$. Так как $J-w(t)Jw^*(t)=$ $=J-R^2(t)J$, $w^{-1*}(t)Jw^{-1}(t)-J=JR^{-2}(t)-J$, то матрицы-функции $R^2(t)$, $R^{-2}(t)$ абсолютно непрерывны на любом конечном сегменте $[0, l]$. Чтобы убедиться в том, что этим же свойством обладают $R^{-1}(t)$, $R(t)$, установим для любых $x_1, x_2\in[0, l]$ справедливость следующих неравенств: $\|R^{-1}(x_1)-R^{-1}(x_2)\|\leqslant K_l\|R^2(x_1)-$ $-R^2(x_2)\|$ **(6.I.а)**, $\|R(x_1)-R(x_2)\|\leqslant K_l\|R^{-2}(x_1)-R^{-2}(x_2)\|$ **(6.I.в)**. В самом деле, из интегрального представления (4.1) [1] следует $\|R^{-1}(x_1)-R^{-1}(x_2)\|\leqslant\|R^2(x_1)-R^2(x_2)\|\,\frac{2}{\pi}\int_0^{+\infty}\|[R^2(x_1)+t^2I]^{-1}\|\times$ $\times\|[R^2(x_2)+t^2I]^{-1}\|t^2dt$ и остается оценить интеграл, разбив его на слагаемые: $\int_0^{+\infty}=\int_0^N+\int_N^{+\infty}$. Второе слагаемое запишем в виде $\int_N^{+\infty}\|[I+Q_t(x_1)]^{-1}\|\,\|[I+Q_t(x_2)]^{-1}\|\frac{dt}{t^2}$, $Q_t(x)=\frac{1}{t^2}R^2(x)$. Но непрерывная на $[0, l]$ функция $R^2(x)$ ограничена $\|R^2(x)\|\leqslant M_1$ и, задав фиксированное $q\ (0<q<1)$, можно подобрать N так, чтобы при $t\geqslant N$ для всех $x\in[0, l]$ выполнялось неравенство $\|Q_t(x)\|=$ $=\frac{1}{t^2}\|R^2(x)\|\leqslant\frac{1}{t^2}M_1\leqslant q$. Тогда, очевидно, $\int_N^{+\infty}\leqslant\frac{1}{1-q}\cdot\frac{1}{1-q}\cdot\frac{1}{N}=$ $=K_1$. Для оценки первого интеграла рассмотрим функцию $R^2(x)+$ $+t^2I=F(u)$ точки $u=(x, t)$ в прямоугольнике $T:\begin{cases}0\leqslant x\leqslant l,\\ 0\leqslant t\leqslant N.\end{cases}$ $F(u)$ всюду в T непрерывна и $F^{-1}(u)$ существует, так как $\sigma\ (F(u))>0$. Но тогда $F^{-1}(u)$ непрерывна на T и, следовательно, ограничена: $\|F^{-1}(u)\|\leqslant M_2$, в силу чего $\int_0^N\leqslant M_1\cdot M_2\cdot N^3/3=K_2$.

1/2 7 2-67

Взяв $K=\frac{2}{\pi}(K_1+K_2)$, получим неравенство (6.I.a). Неравенство (6.I.$в$) доказывается аналогично.

Наконец, из соотношений $U(t)=R^{-1}(t)\,w(t)$, $U^{-1}(t)=w^{-1}(t)R(t)$ мы заключаем, что и матрицы-функции $U(t)$, $U^{-1}(t)$ абсолютно непрерывны.

Подводя итоги, приходим к выводу: матрицы-функции $w(t)$, $w^{-1}(t)$, $R^2(t)$, $R^{-2}(t)$, $R(t)$, $R^{-1}(t)$ имеют почти всюду производные, суммируемые на любом конечном сегменте $[0,\ l]$.

Кроме того, так как J-форма $J-w(t)\,Jw^*(t)=J-R^2(t)\,J$ монотонно возрастает с ростом t, то по предыдущему параграфу матрицы-функции $R^2(t)\,J$, $R(t)\,J$ монотонно убывают, а $R^{-2}(t)\,J$, $R^{-1}(t)\,J$ — монотонно возрастают.

Основная теорема. *Пусть* $W=\{w_\alpha\}$ — *множество* J-*нерастягивающих матриц* w_α, *являющихся дискретным или континуальным произведением модулей, записанным в форме* $w_\alpha=\overset{\curvearrowright}{\int_0^{l_\alpha}} e^{-H_\alpha(x)dx}$,

$H_\alpha(x)\,J\geqslant 0$, где $0\leqslant l_\alpha\leqslant+\infty$, $\int_0^{l_\alpha}\|H_\alpha(x)\|\,dx<+\infty$ *и пусть каждая из матриц* w_α *удовлетворяет следующим двум неравенствам:* $\|J-w_\alpha Jw_\alpha^*\|\leqslant C_1$ **(6.2)**; $\|w_\alpha^{*-1}Jw_\alpha^{-1}-J\|\leqslant C_2$ **(6.3)**, *где* C_1 *и* C_2 — *некоторые постоянные. Пусть* $w_\alpha=R_\alpha U_\alpha$ — *полярное представление матрицы* w_α.

При выполнении этих условий существуют постоянные $\varkappa_1=\varphi(C_1,\ C_2)$, $\varkappa_2=\psi(C_1,\ C_2)$, $\varkappa_3=\chi(C_1,\ C_2)$, зависящие лишь от C_1 и C_2, но не от конкретной матрицы $w_\alpha\in W$, такие, что $\|U_\alpha\|\leqslant\varkappa_1$, $\int_0^{l_\alpha}\|H_\alpha(x)\|\,dx\leqslant\varkappa_2$, $\|w_\alpha\|\leqslant\varkappa_3$.

Доказательство. С каждой матрицей $w_\alpha=\overset{\curvearrowright}{\int_0^{l_\alpha}} e^{-H_\alpha(x)dx}$ из множества W сопоставим мультипликативный интеграл с переменным верхним пределом

$$w_\alpha(t)=\overset{\curvearrowright}{\int_0^{t}} e^{-H_\alpha(x)dx}\ (0\leqslant t\leqslant l_\alpha).$$

Пусть $w_\alpha(t)=R_\alpha(t)\,U_\alpha(t)$ — его полярное представление. Из теоремы (4.3) и теоремы (4.4)[1] и условий настоящей теоремы вытекают неравенства $0\leqslant J-R_\alpha(t)\,J\leqslant J-R_\alpha J\leqslant J-R_\alpha^2 J=$

[1] Потапов В. П. Теорема о модуле. I. (Основные понятия. Модуль) — Теория функций, функцион. анализ и их прил., 1982, вып. 38. с. 91—101.

$= J - w_\alpha J w_\alpha^* \leqslant C_1 I; 0 \leqslant J R_\alpha^{-1}(t) - J \leqslant J R_\alpha^{-1} - J \leqslant J R_\alpha^{-2} - J =$ $= w_\alpha^{*-1} J w_\alpha^{-1} - J \leqslant C_2 I$, свидетельствующие об ограниченности в совокупности матриц-функций $R_\alpha(t)$, $R_\alpha^{-1}(t)$: $\|R_\alpha(t)\| \leqslant C_1 + 1$; $\|R_\alpha^{-1}(t)\| \leqslant C_2 + 1$.

Мы покажем, что матрицы-функции $U_\alpha(t)$, $U_\alpha^{-1}(t)$ выражаются через $R_\alpha(t)$ и $R_\alpha^{-1}(t)$ следующим образом:

$$U_\alpha(t) = \int_0^{\overset{t}{\curvearrowleft}} e^{K_\alpha(x)\,dx}, \tag{6.4}$$

где $K_\alpha(x) = \frac{1}{2}[R'_\alpha(x) R_\alpha^{-1}(x) - R_\alpha^{-1}(x) R'_\alpha(x)]$; (6.5)

$$H_\alpha(x) = -\frac{1}{2} U_\alpha^{-1} [R_\alpha^{-1} R'_\alpha + R'_\alpha R_\alpha^{-1}] U_\alpha. \tag{6.6}$$

После этого неравенства (6.2) и (6.3) позволяют оценить сверху величины $U_\alpha(t)$, $\int_0^{l_\alpha} \|H_\alpha(x)\|\,dx$. Опустив для упрощения записи индекс α, рассмот им $w(t) = \int_0^{\overset{t}{\curvearrowright}} e^{-H(x)\,dx} = R(t) U(t)$ $(0 \leqslant t \leqslant l)$. Мы знаем, что $\frac{dw}{dt} = -wH(t)$. Из этого равенства прежде всего следует $R'U + RU' = -RUH$ или $R^{-1}R' + U'U^{-1} = -UHU^{-1}$ (6.7). С другой стороны, последовательно получаем

$$[wJw^*]' = -2wHJw^*;\ [R^2 J]' = -2RUHJU^*R^*;$$
$$R'R + RR' = -2RUHJU^*R^*J = -2RUHU^{-1}R,$$

откуда

$$R^{-1}R' + R'R^{-1} = -2UHU^{-1}. \tag{6.8}$$

Исключая из (6.7), (6.8) UHU^{-1}, найдем $U'U^{-1} = K$, где $K =$ $= \frac{1}{2}[R'R^{-1} - R^{-1}R']$, что и доказывает (6.5). Зная U, из (6.8) находим H. В силу (6.4) и известной оценки для мультипликативного интеграла $\|U_\alpha^{\pm 1}\| \leqslant \exp\left\{\int_0^t \|K_\alpha(x)\|\,dx\right\} \leqslant \exp\left\{\int_0^t \|R^{-1}(x)\| \times\right.$ $\left.\times \|R'(x)\|\,dx\right\}$ и так как $\|R^{-1}(x)\| \leqslant C_2 + 1$, то $\|U(t)^{\pm 1}\| \leqslant \exp \times$ $\times \{(C_2 + 1)\int_0^l \|R'(x)\|\,dx\}$, и остается оценить интеграл $\int_0^l \|R'(x)\|\,dx$.

Так как по доказанному матрица-функция $J - R(x) J$ монотонно возрастает вместе с x, то производная $\{J - R(x) J\}'$ является эрмитово неотрицательной матрицей. Норма такой матрицы (наибольшее собственное число) не превосходит ее следа (суммы всех собственных чисел), равного сумме диагональных элементов. Поэтому $\int_0^l \|R'(x)\|\,dx = \int_0^l \|\{J - R(x)J\}'dx\| \leqslant \int_0^l \mathrm{sp}\{J - R(x)J\}'dx =$

$$= \int_0^l \{\mathrm{sp}\,[J - R(x)J]'\}dx = \mathrm{sp}\,[J - R(l)\,J] - \mathrm{sp}\,[J - R(0)J] = \mathrm{sp}[J - RJ] \leqslant$$

$$\leqslant m\,\|J - RJ\| \leqslant m\,\|J - wJw^*\| \leqslant mC_1.$$

Таким образом, $\|U^{\pm 1}\| \leqslant e^{mC_1(C_2+1)} = \varphi(C_1,\ C_2)$.

После этого из (6.6) вытекает $\|H(x)\| \leqslant \|U^{-1}(x)\|\,\|U(x)\| \times \|R^{-1}(x)\|\,\|R'(x)\|$ и, стало быть, $\int_0^l \|H(x)\|\,dx \leqslant e^{2mC_1(C_2+1)}(C_2 + 1)\,mC_1 = \psi(C_1,\ C_2)$. Наконец, из полярного представления следует $\|w\| \leqslant \|R\|\,\|U\| \leqslant (C_1 + 1)\ e^{mC_1(C_2+1)} = \chi(C_1,\ C_2)$. Теорема доказана.

§ 7. Следствия из Основной теоремы. Остановимся на некоторых важных фактах, вытекающих из Основной теоремы.

Отметим прежде всего, что в ряде случаев удобнее пользоваться вместо условий (6.2), (6.3) другими — равносильными условиями.

1°. Условия (6.2), (6.3) Основной теоремы равносильны условиям

$$\|R_\alpha\| \leqslant a_1 \ \textbf{(7.1)}, \quad \|R_\alpha^{-1}\| \leqslant a_2 \ \textbf{(7.2)},$$

где a_1, a_2 — некоторые постоянные.

В самом деле, если выполнены (6.2), (6.3), то из неравенств $0 \leqslant J - R_\alpha J \leqslant J - w_\alpha J w_\alpha^*$, $0 \leqslant R_\alpha^{-1} J - J \leqslant w_\alpha^{*^{-1}} J w_\alpha^{-1} - J$ вытекают неравенства $\|R_\alpha\| \leqslant C_1 + 1$, $\|R_\alpha^{-1}\| \leqslant C_2 + 1$. Обратно, из (7.1), (7.2) следуют неравенства $\|J - w_\alpha J w_\alpha^*\| \leqslant 1 + a_1^2$, $\|w_\alpha^{*^{-1}} \times J w_\alpha^{-1} J\| \leqslant a_2^2 + 1$.

После этого первое утверждение Основной теоремы может быть переформулировано так:

Если R_α и R_α^{-1} ограничены в совокупности, то этим же свойством обладают и J-унитарные матрицы U_α полярного представления $w_\alpha = R_\alpha U_\alpha$ произведения модулей $w_\alpha = \overset{\frown}{\int_0^{l_\alpha}} e^{-H_\alpha(x)\,dx}$, $H_\alpha(x)\,J \geqslant 0$.

Однако большую роль в приложениях играет второе утверждение теоремы об ограниченности интегралов $\int_0^{l_\alpha} \|H_\alpha(x)\|\,dx \leqslant \varkappa_2 = \psi(C_1,\ C_2)$.

2°. Условия (6.2), (6.3) Основной теоремы равносильны условиям $\|J - w_\alpha J w_\alpha^*\| \leqslant C_1$ **(7.3)**; $|\mathrm{Det}\,w_\alpha| \geqslant \delta > 0$ **(7.4)**.

В самом деле, пусть выполнены условия (6.2), (6.3). Покажем, что имеет место (7.4). Действительно,

$$\frac{1}{|\operatorname{Det} w_\alpha|^2} = \frac{1}{\operatorname{Det}(w_\alpha w_\alpha^*)} = \operatorname{Det}(w_\alpha^{*-1} \cdot w_\alpha^{-1}) = \operatorname{Det}(R_\alpha^{*-1} \cdot R_\alpha^{-1}) \leqslant$$

$$\leqslant \| R_\alpha^{-1} \|^{2m} \leqslant (C_2 + 1)^{2m} = \frac{1}{\delta^2} \text{ и } |\operatorname{Det} w_\alpha| \geqslant \delta > 0.$$

С другой стороны, если выполнены (7.1). (7.2), то $\| R_\alpha \| \leqslant C_1 + 1$, $|\operatorname{Det} R_\alpha| \geqslant \delta$ и, как следует из структуры обратной матрицы, все элементы R_α^{-1}, а значит, и $\| R_\alpha^{-1} \|$, ограничены в совокупности.

3°. Условия (6.2), (6.3) Основной теоремы равносильны условиям

$$\| J - w_\alpha J w_\alpha^* \| \leqslant C_1 \ \textbf{(7.5)}; \ \int_0^l \operatorname{sp} H_\alpha(x)\, dx \leqslant K. \qquad (7.6)$$

Достаточно установить равносильность условий (7.4) и (7.6), а она следует из равенства $\operatorname{Det} w_\alpha = e^{-\int_0^{l_\alpha} \operatorname{sp} H_\alpha(x)\, dx}$ при $K = \ln \frac{1}{\delta}$.

4°. **Теорема 7.1**. *Пусть $H(t)$ J-эрмитово-неотрицательная локально суммируемая матрица и* $w(t) = \int_0^t e^{-H(x)\, dx}$, $t \geqslant 0$.

Для того чтобы $H(x)$ была суммируемой на всей полуоси $\int_0^{+\infty} \| H(x) \|\, dx < +\infty$, *необходимо и достаточно выполнения следующих двух условий:* $\int_0^{+\infty} w(x) H(x) J w^*(x)\, dx < +\infty$ **(7.7)**,

$$\sup \int_0^t \operatorname{sp} H(x)\, dx < +\infty. \qquad (7.8)$$

Замечание. Конкретизация (7.7), (7.8) условий (6.2), (6.3) основной теоремы и замена семейства $\{H_\alpha(t)\}$ одной матрицей-функцией $H(t)$ естественны с точки зрения теории канонических систем дифференциальных уравнений. Матрица-функция $w(t)$ является вронскианом системы $\frac{dy}{dt} = -y H(t)$, а условие (7.7) эквивалентно суммируемости с квадратом всех решений $y(t)$ по матричному весу $H(x) J$.

Доказательство. Необходимость—тривиальна, так как, если $h = \int_0^{+\infty} \| H(x) \|\, dx < +\infty$, то из неравенства $\| w(t) \| \leqslant e^{\int_0^t \| H(x) \|\, dx} \leqslant$

$\leqslant e^h$ вытекает, что $\|\int_0^t w(x) H(x) Jw^*(x)\,dx\| \leqslant e^{2h}\int_0^t \|H(x)\|\,dx \geqslant$ $\leqslant he^{2h}$. Но так как $2\int_0^t w(x) H(x) Jw^*(x)\,dx = J - w(t) Jw^*(t)$, то левая часть монотонно возрастает вместе с t и, являясь ограниченной, имеет предел при $t \to +\infty$, то есть выполняется (7.7). Далее, из сходимости интеграла $\int_0^\infty \|H(x)\|\,dx$ вытекает сходимость $\int_0^\infty H(x)\,dx$, а значит, и сходимость $\int_0^{+\infty} \mathrm{sp}\, H(x)\,dx$.

Достаточность условий (7.7), (7.8) вытекает из второго утверждения Основной теоремы.

Быть может, наиболее наглядной иллюстрацией Основной теоремы является следующее, уже упоминавшееся, предложение:

5°. **Теорема 7.2**. *Для того чтобы бесконечное произведение модулей* $\widehat{\prod_{j=1}^{\infty}} e^{-H_j}$, $H_j J \geqslant 0$ *было сходящимся, необходимо и достаточно, чтобы сходился ряд* $\sum_{j=1}^{\infty} H_j$.

Для доказательства необходимости заметим, что последовательности $w_n = \widehat{\prod_{j=1}^{n}} e^{-H_j}$, $w_n^{-1} = \overset{\curvearrowleft}{\prod_{j=1}^{n}} e^{H_j}$ имеют пределы и, следовательно, ограничены. Но тогда ограничены и соответствующие J-формы, то есть выполняются условия (6.2), (6.3) Основной теоремы. По второму утверждению $\sum_{j=1}^{n} \|H_j\| \leqslant \varkappa_2 = \psi(C_1, C_2)$, откуда $\sum_{j=1}^{\infty} \|H_j\| < +\infty$.

О доказательстве достаточности уже говорилось. Отметим лишь, что в случае матриц конечного порядка из сходимости ряда $\sum_{j=1}^{\infty} \|H_j\| < +\infty$ последовательно вытекает сходимость рядов $\sum_{j=1}^{\infty} H_j J$, $\sum_{j=1}^{\infty} \mathrm{sp}\, H_j J$, $\sum_{j=1}^{\infty} \|H_j\|$, и обратно.

6°. Напомним, что мультипликативный интеграл Лебега $\widehat{\int_0^l} e^{-H(t)\,dt}$ для любой суммируемой на сегменте $[0, l]$ матрицы-функции $H(t)$ определяется как мультипликативный интеграл Стилтьеса: $\overset{\frown}{\int\limits_0^l} e^{-H(t)\,dt} = \overset{\frown}{\int\limits_0^l} e^{-d\Sigma(t)}$, где $\sum(t) = \int\limits_0^t H(x)\,dx$; $\sum(t)$ — абсолютно непрерывная матрица-функция и почти всюду $\frac{d}{dt}\sum(t) = H(t)$. В рассматриваемой сейчас ситуации $H(t)J \geqslant 0$, и, следовательно, $\sum(t)$ — монотонно J-неубывающая матрица-функция. Мы воспользуемся этим обстоятельством для того, чтобы унифицировать выбор переменной интегрирования. С этой целью рассмотрим след $\tau(t) = \sum\limits_{j=1}^{m} \sigma_{jj}(t) = \mathrm{sp} \sum(t)\,J$ матрицы $\sum(t)\,J$ и введем новую переменную θ, полагая $\theta = \tau(t)$. Пусть $[0, L]$ — тот сегмент, на который абсолютно непрерывная монотонно неубывающая функция $\theta = \tau(t)$ отображает сегмент $[0, l]$. Несмотря на то, что функция $\theta = \tau(t)$ может иметь промежутки постоянства, вследствие чего одному значению θ_0 отвечает бесконечно много значений $t \in [a, b]$ — матрица-функция $\sum(t)$ однозначно зависит от θ. В самом деле, рассмотрим два значения аргумента $t: t_1 < t_2$, соответствующие одному заданному значению $\theta = \theta_0$ и соответствующие им значения $\sum(t_1)$, $\sum(t_2)$ матрицы-функции $\sum(t)$. Так как

$$\| \sum(t_2) - \sum(t_1) \| = \| [\sum(t_2) - \sum(t_1)]\,J \| \leqslant \mathrm{sp}\,[\sum(t_2) - \sum(t_1)]\,J = \\ = \tau(t_2) - \tau(t_1) = \theta_0 - \theta_0,$$

то $\sum(t_2) = \sum(t_1)$. Определим матрицу-функцию $E(\theta)$, полагая $E(\theta) = \sum(t)$, $\theta = \tau(t)$. Очевидно, $\mathrm{sp}\,E(\theta)\,J = \mathrm{sp} \sum(t)\,J = \tau(t) = \theta$, откуда при любых $\theta_1, \theta_2 \in [0, L]$, $\theta_1 < \theta_2$ следует $\| E(\theta_2) - E \times \times (\theta_1) \| = \| [E(\theta_2) - E(\theta_1)]\,J \| \leqslant \mathrm{sp}\,[E(\theta_2) - E(\theta_1)]\,J = \theta_2 - \theta_1$. Таким образом, $E(\theta)$ удовлетворяет условию Липшица $\| E(\theta_2) - - E(\theta_1) \| \leqslant \theta_2 - \theta_1$.

Но тогда, во-первых, существует мультипликативный интеграл Стилтьеса $\overset{\frown}{\int\limits_0^L} e^{-dE(\theta)}$, во-вторых, $E(\theta)$ — абсолютно непрерывна и имеет, следовательно, почти всюду суммируемую производную $M(\theta) = \frac{dE}{d\theta}$, $M(\theta)\,J \geqslant 0$ такую, что $E(\theta) = \int\limits_0^\theta M(x) \times \times dx$ и почти всюду $\mathrm{sp}\,M(\theta)\,J = 1$. В силу сказанного существует мультипликативный интеграл Лебега $\overset{\frown}{\int\limits^L} e^{-M(\theta)\,d\theta} =$

$= \overset{\Delta}{\underset{0}{\widehat{\int}}} e^{-dE(\theta)}$ Наконец, имеет место равенство $\overset{\Delta}{\underset{0}{\widehat{\int}}} e^{-M(\theta)d\theta} =$

$= \overset{l}{\underset{0}{\widehat{\int}}} e^{-H(t)\,dt}$ равносильное очевидному равенству $\overset{L}{\underset{0}{\widehat{\int}}} e^{-dE(\theta)} =$

$= \overset{L}{\underset{0}{\widehat{\int}}} e^{-d\Sigma(t)}.$

Записывая в дальнейшем произведение модулей в форме мультипликативного интеграла Лебега $\overset{l}{\underset{0}{\widehat{\int}}} e^{-H(t)dt}\ H(t)\,J \geqslant 0$, мы будем считать, что условие $\mathrm{sp}\int_0^t H(x)\,J\,dx = t$ выполнено.

Важную роль в вопросах компактности играет

Теорема 7.3. *Если семейство* $W = \{w_\alpha\}$ *произведений модулей удовлетворяет условиям Основной теоремы и* w_α *записаны в форме* $w_\alpha = \overset{l_\alpha}{\underset{0}{\widehat{\int}}} e^{-H_\alpha(t)dt}$, $H_\alpha(t)\,J \geqslant 0$, $\mathrm{sp}\,H_\alpha(t)\,J = 1$ п. в., *то верхние пределы* l_α *мультипликативных интегралов ограничены и из каждой последовательности* w_{α_k} *можно выделить сходящуюся к матрице* $w = \overset{l}{\underset{0}{\widehat{\int}}} e^{-H(t)dt}$, $H(t)\,J \geqslant 0$, $\mathrm{sp}\,H(t)\,J = 1$ п. в. *подпоследовательность* $w_{\alpha_{k_\nu}}$.

Доказательство. Ограниченность $\{l_\alpha\}$ вытекает из второго утверждения Основной теоремы и неравенства $\mathrm{sp}\,H_\alpha(t)\,J \leqslant m\,\|H_\alpha(t)\,J\| = m\,\|H_\alpha(t)\|$, где m — порядок матриц w_α. В самом деле, $l_\alpha = \int_0^{l_\alpha} 1dt = \int_0^{l_\alpha} \mathrm{sp}\,H_\alpha(t)\,J\,dt \leqslant m \int_0^{l_\alpha} \|H_\alpha(t)\|\,dt = m\,\psi(C_1, C_2)$.

Обосновывая второе утверждение данной теоремы, выделим из произвольной последовательности семейства матриц $\{w_\alpha\}$ подпоследовательность, w_{α_k} так, чтобы $l_{\alpha_k} \to l$. Сегмент $[0, l]$ может быть назван «прокрустовым ложем», имея в виду те процедуры, которым должны подвергнуться матрицы w_{α_k}.

Если $l_{\alpha_k} > l$, то $\sum\alpha_k(t)$ усекается до $\tilde{\sum}\alpha_k(t)$, определенной на $[0, l]$ и совпадающей там с $\sum\alpha_k(t)$. Ясно, что последовательности $\tilde{w}_{\alpha_k}$ и w_{α_k} конфинальны[1], так как

[1] Напомним, что последовательности a_n и b_n называются конфинальными, если $a_n - b_n \to 0$.

$$\| w_{\alpha_k} - \tilde{w}_{\alpha_k} \| = \| \tilde{w}_{\alpha_k} \overset{l_{\alpha_k}}{\underset{l}{\widehat{\int}}} e^{-H_{\alpha_k}(t)\,dt} - \tilde{w}_{\alpha_k} \| \leqslant \| \tilde{w}_{\alpha_k} \| \times$$

$$\times \| \overset{l_{\alpha_k}}{\underset{l}{\widehat{\int}}} e^{-H_{\alpha_k}(t)\,dt} - I \| \leqslant e^{\int_0^l \|H_{\alpha_k}(t)\,dt}\; \| \int_l^{l_{\alpha_k}} H_{\alpha_k}(t)\,dt \| \times$$

$$\times e^{\int_l^{l_{\alpha_k}} \|H_{\alpha_k}(t)\|\,dt} \leqslant e^{\psi(C_1, C_2)} (l_{\alpha_k} - l) \to 0.$$

Если же $l_{\alpha_k} < l$, то $\sum_{\alpha_k}(t)$ вытягивается на сегмент $[0, l]$ равенством $\tilde{\sum}_{\alpha_k}(t) = \sum_{\alpha_k}(l_{\alpha_k})$ $(l_{\alpha_k} \leqslant t \leqslant l)$. Ясно, что сейчас $\tilde{w}_{\alpha_k} = w_{\alpha_k}$.

Наконец, если случайно $l_{\alpha_k} = l$, то $\sum_{\alpha_k}(t)$ остается невредимой: $\tilde{w}_{\alpha_k} = w_{\alpha_k}$.

Легко понять, что построенная так конфинальная последовательность $\tilde{w}_{\alpha_k}$ обладает тем свойством, что $\tilde{w}_{\alpha_k} = \overset{l}{\underset{0}{\widehat{\int}}} e^{-d\tilde{\Sigma}_{\alpha_k}(t)}$, где $\mathrm{sp}\, \tilde{\sum}_{\alpha_k}(t) \leqslant t$, причем строгое неравенство имеет место при $l_{\alpha_k} < l$ на исчезающе малом промежутке $[l_{\alpha_k}, l]$.

Далее вступает в действие теорема выбора Хелли. Так как $\tilde{\sum}_{\alpha_k}(t)$ монотонно не убывают, то этим же свойством обладают и ее диагональные элементы $\sigma_{jj}^{(k)}(t)$, а прочие элементы, в силу неотрицательности главных миноров второго порядка, удовлетворяют неравенству

$$|\Delta\sigma_{ij}^{(k)}(t)| \leqslant \sqrt{\Delta\sigma_{ii}^{(k)}(t)} \cdot \sqrt{\Delta\sigma_{jj}^{(k)}(t)} \leqslant \frac{1}{2} [\Delta\sigma_{ii}^{(k)}(t) + \Delta\sigma_{jj}^{(k)}(t)]$$

и являются, тем самым, функциями ограниченной вариации.

Эти факты позволяют выделить из $\tilde{\sum}_{\alpha_k}(t)\, J$ подпоследовательность $\sum_{\alpha_{k_p}}(t)\, J$, сходящуюся в каждой точке сегмента $[0, l]$ к монотонной матрице-функции $\sum(t)\, J$ и притом такой, что $\mathrm{sp} \sum(t)\, J = t$. Обозначив $d\sum/dt = H(t)$, рассмотрим матрицу

$$w = \overset{l}{\underset{0}{\widehat{\int}}} e^{-H(t)\,dt}.$$

Для доказательства того, что $w_{\alpha_{k_p}} \to w$, рассмотрим некоторое разбиение сегмента $[0, l]$: $0 = t_0 < t_1 < t_2 < \ldots < t_n = l$.

Представив мультипликативные интегралы Стилтьеса в виде произведений $\overset{\frown}{\int\limits_0^l} = \overset{\frown}{\prod\limits_{j=1}^n} \cdot \overset{\frown}{\int\limits_{t_{j-1}}^{t_j}}$, воспользуемся сначала оценкой

$$\|w_{\alpha_{k_\nu}} - w\| \leqslant M \sum_{j=1}^{n} \Big\| \overset{\frown}{\int\limits_{t_{j-1}}^{t_j}} e^{-H_{\alpha_{k_\nu}}(t)\,dt} - \overset{\frown}{\int\limits_{t_{j-1}}^{t_j}} e^{-H(t)\,dt} \Big\|,$$ а затем оценками $$\Big\| \overset{\frown}{\int\limits_{t_{j-1}}^{t_j}} e^{-\tilde{H}_{\alpha_{k_\nu}}(t)\,dt} - \overset{\frown}{\int\limits_{t_{j-1}}^{t_j}} e^{-H(t)\,dt} \Big\| \leqslant \|\tilde{\sum}_{\alpha_{k_\nu}}(t_j) - \sum(t_j)\| +$$
$$+ \|\tilde{\sum}_{\alpha_{k_\nu}}(t_{j-1}) - \sum(t_{j-1})\| + \|R^{(j)}_{\alpha_{k_\nu}}\| + \|R^{(j)}\|.$$ Выбрав фиксированное столь мелкое разбиение, чтобы $\sum\limits_{j=1}^{n} (\|R^{(j)}_{\alpha_{k_\nu}}\| + \|R^{(j)}\|) < \frac{\varepsilon}{2}$, мы при достаточно больших ν получим $\|\tilde{w}_{\alpha_{k_\nu}} - w\| < \varepsilon$, то есть $\lim\limits_{\nu\to\infty} \tilde{w}_{\alpha_{k_\nu}} = w$, а значит, и $\lim\limits_{\nu\to\infty} w_{\alpha_{k_\nu}} = w$, что и доказывает теорему 7.3.

Поступила в редколлегию 08.01.81.