УДК 517.5

С. А. ОРЛОВ

О J-МОДУЛЕ J-СЖИМАЮЩИХ МАТРИЦ

Впервые понятие J-модуля J-сжимающей матрицы было введено В. П. Потаповым [1] (см. также [2]) следующим образом.

Определение. *Матрица M называется J-модулем ($J = J^*$, $J^2 = I$) J-сжимающей матрицы W, если она удовлетворяет следующим условиям:* 1. *M — J-эрмитова матрица;* 2. *спектр M неотрицательный;* 3. $M^2 = WJW^*J$. В статье получено выражение для матрицы M через J-форму Γ матрицы $W: \Gamma = J - WJW^*$. Сначала считаем, что W — строгое J-сжатие, т. е. что $\Gamma > 0$, и что W обратима. Положим $W_1 = JW^{-1}J$; $\Gamma_1 = W_1^*JW_1 - J$; $R = \Gamma^{-1/2}$; $R_1 = \Gamma_1^{-1/2}$ (1). Тогда, как легко проверить, имеет место тождество $R^2 - R_1^2 = J$ (2). Из соотношения $R^{-2} = J - WJW^*$ следует, что $WJW^*J = I - R^{-2}J = R^{-2}(R^2 - J) = R^{-2}R_1^2$ (3).

Замечание. Матрица вида $A^{-1}B$, где $A > 0$, $B \geqslant 0$ имеет неотрицательный спектр.

Действительно, пусть μ — собственное число, а f — собственный вектор; тогда $A^{-1}Bf = \mu f$, следовательно, $Bf = \mu Af$ и $f^*Bf = \mu f^*Af$, поэтому $\mu \geqslant 0$.

Из замечания следует, что спектр WJW^*J положителен и матрица $R^{-1}R_1$ имеет положительный спектр. Матрицу $R^{-1}R_1$ представим в полярной форме (дефинитной) $R^{-1}R_1 = [(R^{-1}R_1) \times (R^{-1}R_1)^*]^{1/2}V^* = [R^{-1}R_1^2R^{-1}]^{1/2}V^* = [R^{-1}(R^2 - J)R^{-1}]^{1/2}V^* = [I - R^{-1}JR^{-1}]^{1/2}V^* = [I - \Gamma^{1/2}J\Gamma^{1/2}]^{1/2}V^*$. Тогда $R^{-1}R_1V = [I - \Gamma^{1/2} \times J\Gamma^{1/2}]^{1/2} > 0$. Умножая слева и справа эту матрицу на R, получаем $R_1VR = R[I - \Gamma^{1/2}J\Gamma^{1/2}]^{1/2}R > 0$ (4). Матрицы Z и Z_1 определим формулами $Z = R^2 + R_1VR$; $Z_1 = Z - J = R_1^2 + R_1VR$ (5). Эти матрицы строго положительны: $Z_1 > 0$; $Z > 0$. Докажем, что матрица $M = Z^{-1}(Z - J) = (R^2 + R_1VR)^{-1}(R_1^2 + R_1VR)$ **(6)** удовлетворяет условиям 1 — 3.

1) $M = Z^{-1}(Z - J) = I - Z^{-1}J$; $MJ = J - Z^{-1}$ — эрмитова.

2) В силу замечания спектр M положительный.

Проверим свойство 3) $J - MJM^* = J - M^2J = J - Z^{-1}(Z - J) \times J(Z^* - J)Z^{-1*} = Z^{-1}[ZJZ^* - (Z - J)J(Z^* - J)]Z^{-1*} = Z^{-1}[Z + Z^* - J]Z^{-1*}$. Вычислим выражение в квадратных скобках: $Z + Z^* - J = (R^2 + R_1VR) + (R^2 + RV^*R_1) - J = R^2 + R_1VR + R_1^2 + RV^*R_1 = (R + R_1V)(R + R_1V)^*$. Так как $Z^{-1} = (R^2 + R_1VR)^{-1} = R^{-1}(R + R_1V)^{-1}$, то $J - MJM^* = J - M^2J = R^{-2} = J - WJW^*$. Итак $M^2 = WJW^*J$, т. е. M есть J-модуль W. Докажем, что $J - MJ < \Gamma$. Имеем $J - MJ = J - Z^{-1}(Z - J)J = J - J + Z^{-1} = (R^2 + R_1VR)^{-1} = [R^2 + R[I - \Gamma^{1/2}J\Gamma^{1/2}]^{1/2}R]^{-1} = \Gamma^{1/2}[I + (I - \Gamma^{1/2}J\Gamma^{1/2})^{1/2}]^{-1}\Gamma^{1/2}$. Итак, $J - MJ = \Gamma^{1/2}[I + (I - \Gamma^{1/2}J\Gamma^{1/2})^{1/2}]^{-1} \times \Gamma^{1/2} < \Gamma$ **(7)**. Таким образом, получено еще одно важное свойство J-модуля, установленное В. П. Потаповым, $J - MJ < J - WJW^*$. Из формулы для матрицы M следует, что если $W(t)$ абсолютно непрерывна, то и $M(t)$ абсолютно непрерывна. Если J-форма $J - WJW^* \geqslant 0$ — необратима, то, умножая W на матрицу W_ε такую, что $J - W_\varepsilon JW_\varepsilon^* > 0$ и $\lim\limits_{\varepsilon \to 0} W_\varepsilon = I$, получим вначале формулу для модуля матрицы $W_\varepsilon W$, и переходя к пределу, получим ту же формулу и для модуля M матрицы W: $M = I - \Gamma^{1/2}[I + (I - \Gamma^{1/2}J\Gamma^{1/2})^{1/2}]^{-1}\Gamma^{1/2}J$. Матрицы M и W имеют одну и ту же J-форму, поэтому матрица $U = M^{-1}W$ — J-унитарна, т. е. $W = M$—U — J-полярное разложение J-сжимающей матрицы W.

Список литературы: 1. *Потапов В. П.* Мультипликативная структура J-нерастягивающих матриц-функций. — Тр. Моск. мат. о-ва, 1955, № 4, с.125 — 236. 2. *Потапов В. П.* Теорема о модуле I. (Основные понятия. Модуль). — Теория функций, функцион. анализ и их прил., 1982, вып. 38. с. 91—101.

Поступила в редколлегию 04.06.81.