УДК 513.88

В. Э. ЛЯНЦЕ
Х. Б. МАЙОРГА

К ТЕОРИИ ОДНОТОЧЕЧНОЙ КРАЕВОЙ ЗАДАЧИ ДЛЯ ОПЕРАТОРА ЛАПЛАСА. II[1]

Нумерация параграфов и формул является продолжением I части. Ссылки на литературу, помещенную в I части, относятся и к этой статье.

5. В этом пункте дается описание T-преобразования Фурье, т. е. преобразования, диагонализующего оператор T. Всюду в дальнейшем предполагается, что [2]$i\theta \notin \boldsymbol{R}$ **(5.1)**, чем обеспечивается $\forall \xi \in \boldsymbol{R}^3$; $i\theta \pm |\xi| \neq 0$ **(5.1′)**.

5.1. Определение. *Положим*

$$\Phi_{\pm}^{\theta}(x,\xi) \overset{\text{def}}{=} \frac{1}{(2\pi)^{3/2}}\left[e^{ix\xi} + \frac{i}{i\theta \mp |\xi|}\,\frac{e^{\mp i|x||\xi|}}{|x|}\right]; \tag{5.2}$$

$$\Phi_{\mp}^{\theta} f(\xi) \overset{\text{def}}{=} \int_{\boldsymbol{R}^3} f(x)\,\overline{\Phi_{\pm}^{\theta}(x,\xi)}\,dx; \tag{5.3}$$

$$^{*}\Phi_{\pm}^{\theta}\hat{f}(x) \overset{\text{def}}{=} \int_{\boldsymbol{R}^3} \hat{f}(\xi)\,\Phi_{\pm}^{\theta}(x,\xi)\,d\xi. \tag{5.4}$$

---

[1] Лянце В. Э., Майорга Х. Б. К теории одноточечной краевой задачи для оператора Лапласа. I. — Теория функций, функцион. анализ и их прил., 1981, вып. 3, с. 25.

[2] Если $i\theta \in R$, то θ^2 является спектральной особенностью оператора $T = S^{\theta}$.

В дальнейшем показывается, что в качестве области определения операторов $\Phi^{\theta}_{\pm}$, $^*\Phi^{\theta}_{\pm}$ можно принять гильбертово пространство $H = L_2(\boldsymbol{R}^3)$. Пока эти операторы считаем заданными на $L_1(\boldsymbol{R}^3) \cap L_2(\boldsymbol{R}^3)$.

5.2. Теорема. 1) *Каждый из операторов* Φ^{θ}_{+}, Φ^{θ}_{-}, $^*\Phi^{\theta}_{+}$, $^*\Phi^{\theta}_{-}$ *непрерывен по норме пространства* H, *и следовательно, продолжается по непрерывности на все* H. *Сохраняя за продолженными операторами прежнее обозначение, имеем* $(\Phi^{\theta}_{\pm})^* = {}^*\Phi^{\theta}_{\pm}$ **(5.5)**, *т. е. операторы* $\Phi^{\theta}_{\pm}$ и $^*\Phi^{\theta}_{\pm}$ *взаимно сопряжены относительно* $(\cdot/\cdot)_H$. 2) $\forall f \in D(T)$ *для почти всех* $\xi \in \boldsymbol{R}^3$ $\Phi^{\theta}_{\pm} Tf(\xi) = \xi^2 \Phi^{\theta}_{\pm} f(\xi)$ **(5.6)**. *Обратно, если* $f \in H$ *и* $\int\limits_{\boldsymbol{R}^3} |\xi^2 \Phi^{\theta}_{\pm} f(\xi)|^2 d\xi < \infty$ **(5.7)**, *то* $f \in D(T)$.

3) *Если* $\mathrm{Re}\,\theta \geqslant 0$, *то операторы* $\Phi^{\theta}_{\pm}$ *и* $^*\Phi^{\bar\theta}_{\pm}$ *являются взаимно обратными* $(\Phi^{\theta}_{\pm})^{-1} = {}^*\Phi^{\bar\theta}_{\pm}$ **(5.8)**.

В частности, если $\theta \in \boldsymbol{R}$ *и* $\theta \geqslant 0$, *то* $\Phi^{\theta}_{\pm}$ *есть унитарный оператор* $H \to H$.

4) *Если* $\mathrm{Re}\,\theta < 0$, *то* $f = {}^*\Phi^{\bar\theta}_{\pm} \Phi^{\theta}_{\pm} f - 8\pi\,\mathrm{Re}\,\theta\,(f \,|\, E_{-\bar\theta^2})\,E_{-\theta^2}$ **(5.9)**.

В частности, если $\theta \in \boldsymbol{R}$ *и* $\theta < 0$, *то отображение* $f \mapsto (\Phi^{\theta}_{\pm} f, \sqrt{-8\pi\theta}\,(f \,|\, E_{-\theta^2}))$ *является унитарным преобразованием* $H \to H \times \boldsymbol{C}$.

Доказательство теоремы 5.2 приводится в последующих пунктах.

5. 3. Следствие. $\forall f, g \in H$ *справедливо равенство Парсеваля* $(f\,|\,g) = (\Phi^{\theta}_{\pm} f \,|\, \Phi^{\bar\theta}_{\pm} g)$ **(5.10)**, если $\mathrm{Re}\,\theta \geqslant 0$ и если $\mathrm{Re}\,\theta < 0$, то $(f\,|\,g) = (\Phi^{\theta}_{\pm} f \,|\, \Phi^{\bar\theta}_{\pm} g) - 8\pi\,\mathrm{Re}\,\theta\,(f \,|\, E_{-\bar\theta^2})\,(g \,|\, E_{-\theta^2})$ **(5.10′)**.

6. Этот пункт — вспомогательный. В нем речь идет о некоторых свойствах оператора Q_τ, определяемого соотношением

$$Q_\tau \hat f(\xi) = \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{\boldsymbol{R}^3} \frac{\hat f(\eta)\,d\eta}{\eta^2 - \xi^2 - i\tau}, \quad \xi \in \boldsymbol{R}^3, \quad \tau \in \boldsymbol{R} \setminus \{0\}. \qquad (6.1)$$

6.1. Определение. *Пусть* ω_ρ — *мера Лебега на сфере* $\{\xi \in \boldsymbol{R}^3 : |\xi| = \rho\}$ *и* $\Omega \hat f(\rho) \overset{\text{def}}{=} \int\limits_{|\xi| = \rho} \hat f(\xi)\,\omega_\rho(d\xi)$ **(6.2)**; $R\hat f(\rho) \overset{\text{def}}{=} \frac{1}{2\sqrt{\rho}} \Omega \hat f(\sqrt{\rho})$, $\rho > 0$ **(6.3)**. *Кроме того,* $\forall \alpha \in \boldsymbol{R}$ *через* X^α *обозначаем гильбертово пространство функций* $\hat f : \boldsymbol{R}^3 \to \boldsymbol{C}$, *отвечающее норме* $\|\hat f\|^2_{X^\alpha} \overset{\text{def}}{=} \int\limits_{\boldsymbol{R}^3} \xi^{2\alpha} |\hat f(\xi)|^2 d\xi$ **(6.4)**.

6. 2. Лемма. *Имеет место включение* [1] $R \in B(X^{1/2};\ L_2(0,\infty))$. **(6.5)**

Доказательство. Так как $|\Omega \hat{f}(\rho)|^2 \leqslant 4\pi\rho^2 \int\limits_{|\xi|=\rho} |\hat{f}(\eta)|^2 \times \omega_\rho(d\eta)$, то $\int\limits_0^\infty |R\hat{f}(\rho)|^2 d\rho \leqslant 2\pi \int\limits_{R^3} |\xi|\,|\hat{f}(\xi)|^2 d\xi$ **(6.5′)**.

6.3. Определение. $\forall \varphi \in L_2(\boldsymbol{R})$; $\forall \sigma \in \boldsymbol{R}$; $\forall \tau \in \boldsymbol{R} \setminus \{0\}$ *положим*

$$P_\tau \varphi(\sigma) \stackrel{\text{def}}{=} \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{R} \frac{\varphi(s)\, ds}{s - (\sigma + i\tau)}. \tag{6.6}$$

Известно, что справедливо следующее утверждение (см. [13]):

6. 4. Лемма. $\forall \tau \in \boldsymbol{R} \setminus \{0\}$ $P_\tau \in B(L_2(\boldsymbol{R}))$ *и существуют сильные пределы* $P_\pm \stackrel{\text{def}}{=} \text{s}-\lim\limits_{\tau \downarrow 0} P_{\pm\tau}$. *Операторы* P_+ *и* $-P_-$ *являются взаимно дополнительными ортопроекторами пространства* $L_2(\boldsymbol{R})$, *в частности* $P_+ - P_- = 1_{L_2(R)}$.

6. 5. Определение. $\forall \psi \in L_2(0,\ \infty)$ *положим* $W\psi(\xi) \stackrel{\text{def}}{=} \psi(\xi^2)$, $\xi \in \boldsymbol{R}^3$. *Легко видеть, что* (*см.* (6.4)) $\|W\psi\|_{X^{-1/2}} = \sqrt{2\pi}\, \|\psi\|_{L_2(0,\infty)}$ **(6.7)**.

6. 6. Утверждение. *Для оператора* Q_τ (см. (6.1)) *справедливо включение* $Q_\tau \in B(X^{1/2};\ X^{-1/2})$, $\tau \neq 0$. *Существуют сильные пределы* $Q_\pm \stackrel{\text{def}}{=} \text{s}-\lim\limits_{\tau \downarrow 0} Q_{\pm\tau} \in B(X^{1/2};\ X^{-1/2})$.

Доказательство. Пусть l-оператор $L_2(0,\infty) \to L_2(\boldsymbol{R})$, продолжения нулем на $]-\infty, 0[$, l^* — сопряженный к нему оператор (сужения из $\boldsymbol{R}$ на $]0, \infty[$). Элементарно проверяется, что $Q_\tau = W l^* P_\tau l R$ **(6.8)**. Так как $\|l\| = \|l^*\| = 1$, то наше утверждение вытекает из лемм 6.2, 6.4 и соотношения (6.7).

6. 7. *Замечание.* Формально, оператор $Q_\pm$ является интегральным: $Q_\pm \hat{f}(\xi) = \int\limits_{R^3} Q_\pm(\xi,\ \eta) \hat{f}(\eta)\, d\eta$. Его ядро есть „обобщенная функция" $Q_\pm(\xi,\ \eta) = 1/(2\pi i)\, 1/(\eta^2 - \xi^2 \mp i0)$.

7. Для доказательства теоремы 5.2 воспользуемся следующими обозначениями: $\forall f \in H$; $\forall \xi \in \boldsymbol{R}^3$; $\forall \tau \in \boldsymbol{R} \setminus \{0\}$

$$L_\tau f(\xi) = \hat{L}_\tau \hat{f}(\xi) \stackrel{\text{def}}{=} -\frac{1}{(2\pi)^{3/2}} \frac{1}{\gamma(\xi^2 + i\tau)} (f \mid E_{\xi^2 - i\tau}); \tag{7.1}$$

$$\Phi_\tau f(\xi) \stackrel{\text{def}}{=} (1 + \hat{L}_\tau) \hat{f}(\xi). \tag{7.2}$$

7. 1. Лемма. *Если* $f \in D(T)$, *то* $\Phi_\tau T f(\xi) = \xi^2 \Phi_\tau f(\xi) + i\tau \hat{L}_\tau \hat{f}(\xi)$ **(7.3)**.

---

[1] Для произвольных нормированных пространств X, Y через $B(X;\ Y)$ обозначим пространство линейных всюду заданных непрерывных операторов $X \to Y$, наделенных обычной операторной нормой.

Доказательство. Если $f \in D(T)$, то в силу (4.6′) $((T - \zeta) f \mid E_{\bar\zeta}) = -4\pi\gamma(\zeta)\mu_0(f)$, ибо $\gamma_0(f) = 0$. Следовательно, (см. (7.1)) $\hat{L}_\tau \hat{T} \hat{f}(\xi) = (\xi^2 + i\tau)\hat{L}_\tau \hat{f}(\xi) + \sqrt{\frac{2}{\pi}}\,\mu_0(f)$. Учитывая, что $\hat{T}\hat{f}(\xi) = \xi^2 \hat{f}(\xi) - \sqrt{2/\pi}\,\mu_0(f)$, приходим к (7.3).

7. 2. Лемма. *Если* $f \in H \cap L_1(\boldsymbol{R}^3)$, *то* $\forall \xi \in \boldsymbol{R}^3$ *существуют пределы* $\Phi_\pm f(\xi) \overset{\text{def}}{=} \lim\limits_{\tau \downarrow 0} \Phi_{\mp\tau} f(\xi)$ **(7.4)**, и (см. (5.3)) $\Phi_\pm f(\xi) = \Phi_\pm^\theta f(\xi)$ **(7.4′)**.

Доказательство. Из (4.3), (4.5′) и (7.1) следует, что

$$\hat{L}_\tau \hat{f}(\xi) = \frac{1}{(2\pi)^{3/2}} \frac{i}{i\theta + \sqrt{\xi^2 + i\tau}} \int\limits_{\boldsymbol{R}^3} f(x) \frac{e^{i\sqrt{\xi^2 + i\tau}\,|x|}}{|x|}\, dx. \qquad (7.1')$$

Наше утверждение вытекает из (7.1′) и (7.2).

7. 3. Следствие. *Если* $f \in D(T) \cap L_1(\boldsymbol{R}^3)$ *и* $Tf \in L_1(\boldsymbol{R}^3)$, *то* $\forall \xi \in \boldsymbol{R}^3$

$$\Phi_\pm^\theta T f(\xi) = \xi^2 \Phi_\pm^\theta f(\xi). \qquad (7.5)$$

Для доказательства достаточно перейти в (7.3) к пределу при $\tau \to \pm 0$.

Заметим, что следствие 7.3 близко к утверждению 2) теоремы 5. 2. Но пока у нас недостаточна информация об области значений оператора $\Phi_\pm^\theta$. Чтобы восполнить этот пробел, заметим, что $\hat{L}\hat{f}(\xi) = -\frac{1}{\pi} \frac{1}{i\theta + \sqrt{\xi^2 + i\tau}} Q_\tau \hat{f}(\xi)$ **(7.1″)**, где Q_τ определяется посредством (6.1).

7. 4. Лемма. *Для всех достаточно малых* $\tau \in \boldsymbol{R} \setminus \{0\}$ $\hat{L}_\tau \in B(X^{1/2})$. *Сущгствуют сильные пределы* $\hat{L}_\pm \overset{\text{def}}{=} \text{s} - \lim\limits_{\tau \downarrow 0} \hat{L}_\pm \in B(X^{1/2})$.

Доказательство. В силу условия (5.1) $i\theta + \sqrt{\xi^2 + i\tau} \neq 0$ при $\xi \in \boldsymbol{R}^3$. Поэтому опе ато умножения на функцию $\xi \mapsto (i\theta + \sqrt{\xi^2 + i\tau})^{-1}$ принадлежит $B(X^{-1/2}; X^{1/2})$. Следовательно, наше утверждение вытекает из 6.6.

7. 5. Следствие. *Принадлежащем выборе областей определения операторов* $\Phi_\pm^\theta$, *справедливы включения* $\Phi_\pm = \text{s} - \lim\limits_{\tau \downarrow 0} \Phi_{\pm\tau} \in B(H^{1/2}; X^{1/2})$ **(7.6)**. *Это вытекает из* (7.2) *и леммы* 7.4, *если учесть, что* $\|\hat{f}\|_{X^{1/2}} \leqslant \|f\|_{H^{1/2}}$.

7. 6. Замечание. Пусть $\hat{\Phi}_\pm$ обозначает Фурье-образ оператора $\Phi_\pm$. Учитывая (7.1), (7.2) и (4.3′) заключаем, что $\hat{\Phi}_\pm$ можно формально трактовать как интегральный оператор $\hat{\Phi}_\pm \times$

$\times \hat{f}(\xi) = \int_{R^3} \hat{f}(\eta) \overline{\hat{\Phi}_\pm(\xi, \eta)}\, d\eta$ с „ядром" $\hat{\Phi}_\pm(\xi, \eta) = \delta(\xi, -\eta) \times$
$\times \frac{1}{2\pi^2 (i\bar{\theta} \mp |\xi|)} \times \frac{1}{\eta^2 - \xi^2 \pm i0}$.

7. 7. Замечание. Из (4.4), (4.5′), (7.1), (7.2), (7.4) и (7.4′) вытекает, что

$$\Phi_+^\theta E_\zeta(\xi) = -\frac{1}{(2\pi)^{3/2}} \left[\frac{1}{\xi^2 - \zeta} - \frac{1}{i\theta + |\xi|} \frac{1}{\sqrt{\zeta} + |\xi|} \right]. \qquad (7.7)$$

В частности, если $\operatorname{Re}\theta < 0$, то $\Phi_+^\theta E_{-\theta^2} = 0$ **(7.8)**.

7. 8. Замечание. Из (5.3) и (5.4) видно, что операторы $\Phi_\pm^\theta$ и $^*\Phi_\pm^\theta$ формально взаимно сопряжены, относительно $(\cdot/\cdot)_H$. Так как двойственным к X^s (к H^s) относительно $(\cdot/\cdot)_H$ является пространство X^{-s} (пространство H^{-s}), то, учитывая (7.6), можно считать, что при надлежащем выборе областей определения $^*\Phi_\pm^\theta \in B(X^{-1/2};\ H^{-1/2})$ **(7.9)**

Аналогичное замечание относится к оператору $\hat{L}_\pm$, определенного в лемме 7.4. В дальнейшем удобно отмечать зависимость этого оператора от θ и обозначать его через $\hat{L}_\pm^\theta$. Если $^*\hat{L}_\pm^\theta$ — оператор, сопряженный с $\hat{L}_\pm^\theta$ относительно $(\cdot/\cdot)_H$, то при надлежащем выборе области определения в силу леммы 7.4 имеем $^*\hat{L}_\pm^\theta \in B(X^{-1/2})$ **(7.10)**.

8. Для завершения доказательства теоремы 5.2, нам понадобится следующее замечание, очевидно, в силу леммы 6.4.

8.1. *Замечание.* Пусть $\varphi \in L_2(0, \infty)$, $\zeta \in \boldsymbol{C} \setminus [0, \infty[$ и

$$M\varphi(\zeta) \overset{\text{def}}{=} \frac{1}{2\pi i} \int_0^\infty \frac{\varphi(s)\, ds}{s - \zeta}. \qquad (8.1)$$

Тогда $M\varphi$ голоморфна на $\boldsymbol{C} \setminus [0, \infty[$ и

$$|M\varphi(\zeta)| \leqslant \frac{1}{2\sqrt{\pi}} \|\varphi\|_{L_2(0,\infty)} \frac{1}{|\operatorname{Im}\zeta|^{1/2}}. \qquad (8.2)$$

Кроме того, в смысле нормы пространства $L_2(\boldsymbol{R})$ существуют пределы $M_\pm\varphi(\sigma) = \operatorname*{l.\,i.\,m.}_{\tau \downarrow 0} M\varphi(\sigma + i\tau)$, $\sigma \in \boldsymbol{R}$ и для почти всех $\sigma \in \boldsymbol{R}$ $M_+\varphi(\sigma) - M_-\varphi(\sigma) = \varphi(\sigma)$ **(8.3)**. Следующее утверждение является основным.

8. 2. Лемма. *$\forall f \in H^{1/2}$, если* $\operatorname{Re}\theta \geqslant 0$, *то* $\Phi f = \hat{f} = (1 + {}^*\hat{L}_\pm^\theta)\Phi_\pm^\theta f$ **(8.4)**; и если $\operatorname{Re}\theta < 0$, то $\Phi f = \hat{f} = (1 + {}^*\hat{L}_\pm^\theta)\Phi_\pm^\theta f - 8\pi \operatorname{Re}\theta\, (f | E_{-\bar{\theta}^2}) E_{-\theta^2}$ **(8.5)**, где $^*\hat{L}_\pm^\theta$ — оператор, описанный в замечании 7.8.

Доказательство. Легко видеть, что

$$\Phi_\pm^\theta f(\xi) = \hat{f}(\xi) + \frac{1}{(2\pi)^3} \frac{1}{\gamma_\pm(\xi^2)} P_\pm l R\hat{f}(\xi^2), \qquad (8.6)$$

где (см. (4.5′))

$$\gamma_\pm(\xi^2) = \lim_{\tau\downarrow 0}\gamma(\xi^2 \pm i\tau) = (i\theta \pm |\xi|)/4\pi i; \tag{8.7}$$

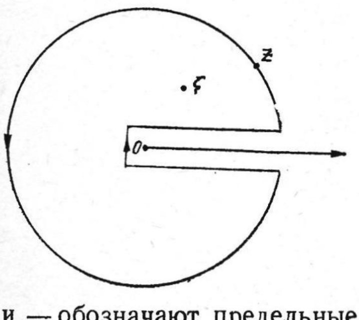
определение операторов $P_\pm$, l, R сформулировано в п. 6. Применим к обеим частям равенства (8.6) оператор R. Полагая, ради краткости, $g_\pm = R\Phi^\theta_\pm f$; $h = R\hat{f} = R\Phi f$ **(8.8)**, находим $g_\pm(\rho) = h(\rho) + \frac{1}{2\pi}\frac{i\sqrt{\rho}}{\gamma_\pm(\rho)} P_\pm lh(\rho)$, $\rho > 0$ **(8.9)**. Заметим, что $\gamma_+(\rho)\,g_+(\rho) = \gamma_-(\rho)\,g_-(\rho)$, $\rho > 0$ **(8.10)**. Действительно, в силу (8.7) $\gamma_+(\rho) - \gamma_-(\rho) = \frac{\sqrt{\rho}}{2\pi i}$, $\rho > 0$ **(8.11)**, а поэтому (8.10) вытекает из (8.9) и равенства $P_+ - P_- = 1$. В связи с (8.10) в дальнейшем мы рассматриваем только индекс $+$.

Пусть $\zeta \in \rho(T)$ (см. 4.5). Положим

$$F(\zeta) \overset{\text{def}}{=} \frac{1}{2\pi i}\frac{1}{\gamma s}\int_0^\infty \frac{h(s)\,ds}{s-\zeta} = \frac{1}{\gamma(s)} P_\tau lh(\rho), \tag{8.12}$$

где $\sigma, \tau \in \boldsymbol{R}$, $\sigma + i\tau = \zeta$. Обозначим также

$$G(\zeta) \overset{\text{def}}{=} \frac{1}{2\pi i}\int_0^\infty \frac{g_+(s)\,ds}{\gamma_-(s)(s-\zeta)}. \tag{8.13}$$



В силу (5.1) $\gamma_\pm(s) \neq 0$ при $s \in \boldsymbol{R}$, а поэтому, к функциям F и G можно применить замечание 8.1. Следовательно, $\gamma_+(\sigma)F_+(\sigma) - \gamma_-(\sigma)F_-(\sigma) = h(\sigma)$; $\sigma > 0$, $G_+(\sigma) - G_-(\sigma) = \frac{1}{\gamma_-(\sigma)} g_+(\sigma)$, $\sigma > 0$, где индексы $+$ и $-$ обозначают предельные значения на, соответственно, верхнем и нижнем краю разреза $[0, \infty[$. Теперь из (8.9), учитывая (8.11), получаем $F_+(\sigma) - G_+(\sigma) = F_-(\sigma) - G_-(\sigma)$ **(8.14)**. Отсюда следует, что функция $Y \overset{\text{def}}{=} F - G$ голоморфно продолжается на разрез $[0, \infty[$. Действительно, из (8.12) и (8.13) ясно, что Y голоморфна на $\rho(T)$, а поэтому

$$\forall \zeta \in \rho(T) \;\; Y(\zeta) = \frac{1}{2\pi i}\oint \frac{Y(z)\,dz}{z-\zeta}; \tag{8.15}$$

в случае $\mathrm{Re}\,\theta \geqslant 0$ интегрирование производим по контуру, указанному на рисунке, а в случае $\mathrm{Re}\,\theta < 0$ и $|\theta|^2 \leqslant |\zeta|$, к нарисованному контуру следует присоединить малую окружность, с центром $-\theta^2$, ориентированную против часовой стрелки (так как $-\theta^2$ является полюсом функции F). Так как в силу (8.14) $Y_+(\sigma) = Y_-(\sigma)$ для почти всех $\sigma > 0$, то учитывая, что вблизи

$[0,\ \infty[$ $|Y(\zeta)| \leqslant \mathrm{const}\,|\mathrm{Im}\,\zeta|^{-1/2}$ (см. (8.2)), видим, что контур, указанный на рисунке, можно заменить окружностью с центром в нуле и радиусом $> |\zeta|$. Это и даст нужное голоморфное продолжение.

В силу (8.2) справедлива оценка вида

$$\left| Y(\zeta) - \frac{c'}{\zeta + \theta^2} \right| \leqslant \frac{\mathrm{const}}{|\mathrm{Im}\,\zeta|^{1/2}},$$

где c' — вычет функции F в точке $\zeta = -\theta^2$; если $\mathrm{Re}\,\theta \geqslant 0$, то $c' = 0$. Применяя неравенство Коши для коэффициентов степенного ряда, получаем $Y(\zeta) = c'(\zeta + \theta^2)^{-1}$, т. е. $F(\zeta) = G(\sigma) + c'/(\zeta + \theta^2)$. Следовательно, учитывая (8.12), формулу (8.6) можно переписать в виде

$$\Phi^{0}_{\pm} f(\xi) = \hat{f}(\xi) + \frac{1}{(2\pi)^3} \left[G_+(\xi^2) + \frac{c'}{\zeta + \theta^2} \right]. \tag{8.16}$$

Применяя последовательно (8.13), (8.8) и (6.3), находим

$$G_+(\xi^2) = \frac{1}{2\pi i} \lim_{\tau \downarrow 0} \int_{R^3} \frac{\Phi^{\theta}_{+} f(\eta)\, d\eta}{\gamma_-(\eta^2)(\eta^2 - \xi^2 - i\tau)} = (2\pi)^3\, i^* \hat{L}^{\bar{\theta}}_{+} \Phi^{\theta}_{+} f(\xi).$$

Отсюда и из (8.16) следует

$$\hat{f}(\xi) = \Phi^{\theta}_{-} f(\xi) + {}^*\hat{L}^{\bar{\theta}}_{+} \Phi^{\theta}_{+} f(\xi) + c\,\hat{E}_{-\theta^2}(\xi), \tag{8.17}$$

причем $c = 0$ при $\mathrm{Re}\,\theta \geqslant 0$. Этим доказано (8.4). Вычислим в случае $\mathrm{Re}\,\theta < 0$. В силу (7.8) $((1 + {}^*\hat{L}^{\bar{\theta}}_{+}) \Phi^{\theta}_{+} f \,|\, \hat{E}_{-\theta^2}) = (\Phi^{\theta}_{+} f \,|\, \Phi^{\bar{\theta}}_{+} E_{-\theta^2}) = 0$. Учитывая, что в силу (4.4) $(E_{-\theta^2} \,|\, E_{-\bar{\theta}^2}) = -1/8\pi\,\mathrm{Re}\,\theta$, из (8.17) получаем $(f \,|\, E_{-\theta^2}) = -c/8\pi\,\mathrm{Re}\,\theta$, откуда следует (8.5).

8. 3. Следствие. *$\forall f,\ g \in H^{1/2}$ при $\mathrm{Re}\,\theta \geqslant 0$ справедливо равенство Парсеваля (5 · 10), а при $\mathrm{Re}\,\theta < 0$ — (5 · 10′).*

Действительно, из (8.4) следует $(f\,|\,g) = (\Phi f\,|\,\Phi g) = ((1 + {}^*\hat{L}^{\bar{\theta}}_{\pm}) \Phi^{\theta}_{\pm} f \,|\, \Phi g) = (\Phi^{\theta}_{\pm} f \,|\, (1 + \hat{L}^{\bar{\theta}}_{\pm}) \Phi g) = (\Phi^{\theta}_{\pm} f \,|\, \Phi^{\bar{\theta}}_{\pm} g)$; *аналогично рассуждаем в случае* $\mathrm{Re}\,\theta < 0$.

8. 4. Следствие. *Оператор $\Phi^{\theta}_{\pm}$ является непрерывным относительно $\|\cdot\|_{H}$.*

Доказательство. Предположим сначала, что $\theta \in \boldsymbol{R}$. Тогда если $\theta \geqslant 0$, то, как видно из (5.10), оператор $\Phi^{\theta}_{\pm}$ изометричен $H \to H$, а если $\theta < 0$, то $\Phi^{\theta}_{\pm}$ отличается от изометричного на $\|\cdot\|_H$-непрерывный одномерный оператор. Отсюда заключаем, что оператор $\hat{L}^{\theta}_{\pm}$ является $\|\cdot\|_H$ — непрерывным, поскольку $\Phi^{\theta}_{\pm} = (1 + \hat{L}^{\theta}_{\pm})\Phi$. Однако, для произвольных $\theta_1,\ \theta_2 \in \boldsymbol{C}$ операторы $\hat{L}^{\theta_1}_{\pm}$, $\hat{L}^{\theta_2}_{\pm}$ отличаются на оператор умножения на функцию $\xi \mapsto (i\theta_1 + |\xi|)(i\theta_2 + |\xi|)^{-1}$, которая ограничена (при $i\theta_j \notin \boldsymbol{R}$). Поэтому оператор $\hat{L}_{\pm}^{\theta}$, а вместе с ним и $\Phi_{\pm}^{\theta}$, является $\|\cdot\|_H$-непрерывным также для комплексных θ (таких, что $i\theta \in \boldsymbol{R}$).

8. 5. Следствие. *$\forall f, g \in H$ при* $\operatorname{Re}\theta \geqslant 0$ *справедливо равенство Парсеваля (5.10), а при* $\operatorname{Re}\theta < 0$ — (5.10′), *поскольку $H^{1/2}$ плотно в H и $\Phi_{\pm}^{\theta}$ можно продолжать по непрерывности на все H.*

На этом доказательство теоремы 5.2. фактически закончено. Можно еще заметить, что, поскольку операторы $\Phi_{\pm}^{\theta}$ и $^{*}\Phi_{\pm}^{\theta}$ взаимно сопряжены относительно $(\cdot|\cdot)_H$ на плотных в H подпространствах и, при надлежащем выборе области определения $\Phi_{\pm}^{\theta} \in B(H)$, то в этом смысле $^{*}\Phi^{\theta} \in B(H)$.

Поступила в редколлегию 02.10.81.