УДК 513.88

Г. Л. ЛИТВИНОВ

АППРОКСИМАЦИОННЫЕ СВОЙСТВА ЛОКАЛЬНО ВЫПУКЛЫХ ПРОСТРАНСТВ И ПРОБЛЕМА ОДНОЗНАЧНОСТИ СЛЕДА ЛИНЕЙНОГО ОПЕРАТОРА

§ 1. Введение. В работах фон Неймана, посвященных математическому аппарату квантовой механики, впервые были описаны имеющие след линейные положительно определенные операторы в гильбертовых пространствах. Затем Шаттен и фон Нейман [1] описали все линейные непрерывные операторы со следом в гильбертовых пространствах. Оказалось, что операторы со следом взаимно однозначно соответствуют двухвалентным тензорам, и след оператора можно определить как результат полной свертки соответствующего тензора. Эта конструкция была обобщена Растоном на случай банаховых пространств и независимо от него — Гротендиком на случай произвольных локально выпуклых пространств [2]. Каждому элементу индуктивного топологического тензорного произведения $E'\overline{\otimes}E$ данного пространства E и сопряженного к нему пространства E' удается сопоставить линейный оператор в E. Однако полученные таким способом «операторы со следом», вообще говоря, не являются непрерывными; более узкий класс составляют так называемые операторы Фредгольма [2], которые всегда слабо непрерывны. Наконец, еще более узкий класс составляют ядерные операторы (которые непрерывны). Для банаховых пространств эти три класса операторов совпадают.

К сожалению, даже в банаховом пространстве различным тензорам может соответствовать один и тот же оператор. В таком случае след не может быть корректно определен для произвольного ядерного оператора. Если след любого оператора Фредгольма в локально выпуклом пространстве E корректно определен, то говорят, что *проблема однозначности* имеет положительное решение д я этого пространства [2]. Проблема однозначности тесно связана со знаменитой проблемой аппроксимации, а также с проблемой базиса, постановка которых восходит к Банаху [2, 3].

Гротендик [2] доказал, что для банахова пространства E проблема однозначности имеет положительное решение тогда и только тогда, когда E обладает свойством аппроксимации. Для локально выпуклых пространств Гротендик доказал следующее «условное утверждение» [2]: в каждом локально выпуклом пространстве все операторы Фредгольма имеют корректно определенный след в том и только в том случае, если проблема аппроксимации имеет положительное решение (т. е. если все банаховы пространства обладают свойством аппроксимации). Известный контрпример Энфло [3] к проблеме аппроксимации обесценил указанное «условное утверждение» и продемонстрировал существование рефлексивного банахова пространства, в котором нельзя корректно определить след для каждого ядерного оператора.

В статье доказано, что любой ядерный оператор в локально выпуклом пространстве E имеет корректно определенный след, если E обладает свойством аппроксимации. Однако наличие свойства аппроксимации еще не обеспечивает положительного решения проблемы однозначности: ниже приведен пример квазиполного пространства со свойством аппроксимации, в котором нельзя определить след для всех операторов Фредгольма. В статье доказано, что проблема однозначности имеет положительное решение, если пространство E обладает свойством «ограниченной аппроксимации». Предварительные сведения и результаты изложены в § 2. Различные аппроксимационные свойства локально выпуклых пространств и соотношения между этими свойствами рассмотрены в § 3. Основные результаты работы, а также некоторые следствия из этих результатов (например, о существовании матричного следа) содержатся в § 4. Настоящее сообщение примыкает к предшествовавшим статьям автора [4—6] и содержит часть результатов, анонсированных в [6], другая часть этих результатов подробно изложена в [5].

§ 2. Операторы Фредгольма и ядерные операторы. След оператора 1. Пусть E — отделимое локально выпуклое пространство над полем действительных или комплексных чисел[1]. Обозначим через E' сильное сопряженное к E, а через $\langle x', x\rangle$ — значение функционала $x' \in E'$ на элементе $x \in E$. Пусть B — абсолютно выпуклое множество в E (т. е. B выпукло и $\lambda B \subset B$ для всех таких чисел λ, что $|\lambda| \leqslant 1$). Если множество B ограничено, то через E_B обозначим линейное (не обязательно замкнутое) подпространство в E, порожденное элементами множества B и наделенное следующей нормой: $\|x\| = \inf\{\lambda > 0 : x \in \lambda B\}$. Если множество B полно (в частности, компактно или слабо компактно), то нормированное пространство E_B полно, т. е. банахово. Каноническое вложение $E_B \to E$ является непрерывным.

Пусть U — абсолютно выпуклая окрестность нуля в E, а $p_U(x)$ — соответствующий функционал Минковского, т. е. $p_U(x) = \inf\{\lambda > 0 : x \in \lambda U\}$. Обозначим через $\widehat{E}_U$ банахово пространство, которое получается из E в результате факторизации по линейному подпространству $\{x \in E : p_U(x) = 0\}$ и пополнения по норме, порожденной функционалом p_U. Каноническое отображение является непрерывным.

Обозначим через U^0 абсолютную поляру окрестности U, т. е. $U^0 = \{x' \in E' : |<x', x>| \leqslant 1\}$ для всех $x \in U$. Множество U^0 абсолютно выпукло, ограничено, замкнуто и полно. Легко видеть, что банахово пространство E'_{U^0} можно рассматривать как сильное сопряженное к $\widehat{E}_U$.

Банаховы пространства типа E_B и $\widehat{E}_U$ систематически рассматривались Гротендиком [2].

2. Линейный оператор A, отображающий пространство E в себя, называется *оператором Фредгольма*, если его можно представить в виде

$$A : x \mapsto \sum_{i=1}^{\infty} \lambda_i <x'_i, x> x_i, \tag{1}$$

где $\{\lambda_i\}$ — суммируемая числовая последовательность (т. е. $\sum\limits_{i=1}^{\infty} |\lambda_i| < \infty$), а последовательности $\{x_i\}$ и $\{x'_i\}$ содержатся в таких абсолютно выпуклых множествах $B \subset E$ и $B' \subset E'$ соответственно, что пространства E_B и $E'_{B'}$ полны.

---

[1] В дальнейшем будем предполагать, не оговаривая этого специально, что все рассматриваемые локально выпуклые пространства отделимы и определены над одним и тем же полем (действительных или комплексных чисел).

Если последовательность $\{x'_i\}$ равностепенно непрерывна, т. е. если можно положить $B' = U^0$ для некоторой окрестности нуля U в E, то оператор Фредгольма A называется *ядерным оператором.*

Любой оператор Фредгольма слабо непрерывен и является ядерным относительно топологии Макки $\tau(E, E')$, т. е. самой сильной локально выпуклой топологии в E, при которой сопряженное пространство совпадает с E'. Любой ядерный оператор является оператором Фредгольма и вполне непрерывен (компактен). Ясно, что если E — пространство Макки, т. е. топология в E совпадает с $\tau(E, E')$ в частности, если E — бочечное пространство), то класс операторов Фредгольма совпадает с классом ядерных операторов.

Если E — квазиполное бочечное пространство (например, банахово или полное метризуемое или рефлексивное пространство), то оператор A является ядерным тогда и только тогда, когда он допускает разложение вида (1), где последовательности $\{x_i\}$ и $\{x'_i\}$ ограничены, а числовая последовательность $\{\lambda_i\}$ суммируема.

3. Отображение $x \mapsto \lambda_i < x'_i,\ x >$ является оператором ранга один, так что любой оператор Фредгольма разлагается в сумму одномерных операторов. Любой линейный непрерывный оператор конечного ранга (т. е. оператор с конечномерным образом) допускает разложение в конечную сумму одномерных операторов $A : x \mapsto \sum_{i=1}^{n} \lambda_i < x'_i,\ x > x_i$ **(2)**, причем можно добиться, чтобы все коэффициенты λ_i совпали с единицей. Обозначим через $\operatorname{sp} A$ след конечномерного оператора, который A индуцирует в своем образе. Нетрудно убедиться, что $\operatorname{sp} A = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i < x'_i,\ x_i >$. Ясно, что эта величина не зависит от разложения (2).

Если A — оператор Фредгольма, допускающий разложение (1), то ряд $\sum_{i=1}^{\infty} \lambda_i < x'_i,\ x_i >$ **(3)** сходится абсолютно, поскольку величина $\langle x'_i,\ x_i \rangle$ ограничена по i. Сумму этого ряда Гротендик [2] называет *следом* $\operatorname{tr} A$ *оператора Фредгольма* A при условии, что эта величина не зависит от разложения (1) оператора A в сумму операторов ранга 1. В этом случае след оператора A *корректно определен*. Аналогично *след ядерного оператора* A *корректно определен*, если сумма ряда (3) не зависит от разложения A в сумму вида (1) с дополнительным условием, что последовательность $\{x'_i\}$ равностепенно непрерывна.

4. Пусть F и G — локально выпуклые пространства. В алгебраическом тензорном произведении $F \otimes G$ рассмотрим самую сильную локально выпуклую топологию, для которой раздельно

непрерывно каноническое билинейное отображение $F \times G \to F \otimes G$ (при этом отображении пара (f, g), где $f \in F$, $g \in G$, переходит в элемент $f \otimes g \in F \otimes G$). Пополнение пространства $F \otimes G$ в указанной топологии, называемой *индуктивной*, обозначается через $F \overline{\otimes} G$. Пространство $F \overline{\otimes} G$ называется *пополненным индуктивным топологическим тензорным произведением пространств* F и G [2]. Пусть H — любое полное локально выпуклое пространство. Сопоставляя каждому линейному непрерывному отображению $F \otimes G \to H$ его композицию с каноническим отображением $F \times G \to F \overline{\otimes} G$, мы получим взаимно однозначное соответствие между линейными непрерывными отображениями $F \overline{\otimes} G \to H$ и раздельно непрерывными билинейными отображениями $F \times G \to H$.

Отображение $(x', x) \mapsto \langle x', x \rangle$ является раздельно непрерывной билинейной формой на $E' \times E$, так что эту форму можно продолжить до непрерывной линейной формы на $E' \overline{\otimes} E$, называемой *следом*. След тензора $u \in E' \overline{\otimes} E$ обозначается через $\operatorname{tr} u$. При естественном соответствии между тензорами и линейными операторами, описанном ниже, след тензора соответствует следу линейного оператора.

5. Пусть $S(E)$ — алгебра линейных слабо непрерывных операторов в пространстве E, наделенная слабой операторной топологией. Она задается набором полунорм $A \mapsto |\langle x', Ax \rangle|$, где $A \in S(E)$, x' и x пробегают пространства E' и E соответственно.

Обозначим через Γ линейное отображение $E' \otimes E \to S(E)$, при котором элемент $u = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i x'_i \otimes x_i$ переходит в следующий оператор конечного ранга: $x \mapsto \sum_{i=1}^{n} \lambda_i \langle x'_i, x \rangle x_i$. Отображение Γ устанавливает взаимно однозначное соответствие между $E' \otimes E$ и пространством непрерывных операторов конечного ранга. При этом $\operatorname{tr} u = \operatorname{sp} \Gamma(u)$, т. е. след тензора $u \in E' \otimes E$ совпадает со следом оператора, индуцированного $\Gamma(u)$ в своем конечномерном образе.

Отображение Γ непрерывно в индуктивной топологии, но его не всегда можно продолжить на $E' \overline{\otimes} E$, т. к. пространство $S(E)$, вообще говоря, не полно. Гротендик [2] указал линейное подпространство в $E' \overline{\otimes} E$, на которое всегда можно продолжить отображение Γ. Это подпространство, обозначаемое через $E' \overline{\circledS} E$, состоит из всех элементов вида

$$u = \sum_{i=0}^{\infty} \lambda_i x'_i \otimes x_i, \tag{4}$$

где последовательности $\{\lambda_i\}$, $\{x'_i\}$, $\{x_i\}$ — такие же, как в разложении (1). В этом случае ряд (4) сходится в $E' \overline{\otimes} E$, и его сумма называется *ядром Фредгольма*. Продолжение отображения Γ на $E' \overline{\circledS} E$ или $E' \overline{\otimes} E$ обозначим снова через Γ.

Ясно, что если тензор u является ядром Фредгольма с разложением (4), что $\Gamma(u)$ — оператор Фредгольма с разложением (1). Таким образом, операторы Фредгольма представляют собой образы ядер Фредгольма при отображении Γ. Непосредственно из определений следов тензора и оператора Фредгольма вытекает следующий результат: если из условия $\Gamma(u)=0$ следует, что $\operatorname{tr} u=0$, то след $\operatorname{tr} A$ оператора Фредгольма A корректно определен и $\operatorname{tr} A = \operatorname{tr} \Gamma^{-1}(A)$. Это условие выполняется, если отображение Γ взаимно однозначно. Если указанное условие выполняется для линейного подпространства в $E' \overline{\otimes} E$, то след корректно определен для операторов, образующих более узкий класс, чем класс операторов Фредгольма (например, для ядерных операторов). Гротендик [2] для любого локально выпуклого пространства E указал линейное подпространство в $E' \overline{\otimes} E$, на котором отображение Γ взаимно однозначно. Это подпространство состоит из тензоров, допускающих разложение вида (4) с дополнительным условием $\sum\limits_{i=1}^{\infty} |\lambda_i|^{\frac{2}{3}} < \infty$. В литературе описаны и другие классы операторов в банаховых пространствах (более узкие, чем класс ядерных операторов), для которых след корректно определен.

При некоторых дополнительных условиях на пространство E (например, если E полно и метризуемо) отображение Γ можно продолжить на все пополненное индуктивное топологическое тензорное произведение $E' \overline{\otimes} E$. Операторы вида $\Gamma(u)$, где $u \in E' \overline{\otimes} E$, Гротендик [2] назвал *операторами со следом*, однако об операторах со следом, не являющихся операторами Фредгольма, практически ничего не известно (за исключением того факта, что они существуют). Если E — банахово пространство, то $E' \overline{\otimes} E$ содержит только ядра Фредгольма, так что в этом случае классы операторов со следом, операторов Фредгольма и ядерных операторов совпадают.

Замечание. Класс ядерных операторов не зависит от выбора топологии в E', и во всех описанных выше конструкциях пространство E' можно было бы наделить не только сильной топологией $\beta(E', E)$, но и слабой $\delta(E', E)$ или любой промежуточной, например, топологией Макки $\tau(E', E)$. Класс операторов Фредгольма не зависит и от выбора топологии в E, а определяется только дуальной парой (E', E), в этом смысле класс операторов Фредгольма является «более естественным», чем класс ядерных операторов [7].

§ 3. Аппроксимационные свойства локально выпуклых пространств. 1. Обозначим через $L(E)$ алгебру всех линейных непрерывных операторов в E, наделенную топологией предкомпактной сходимости (т. е. авномерной сходимости на предкомпактных множествах). Пространство E обладает свойством аппроксимации [2], если линейные непрерывные операторы конечного ранга[1] образуют плотное подмножество в $L(E)$. Если E — банахово пространство, то оно обладает свойством аппроксимации тогда и только тогда, когда для любого банахова пространства F каждый компактный оператор $F \to E$ можно аппроксимировать по норме операторами конечного ранга. Гипотеза аппроксимации, опровергнутая Энфло [3], состояла в том, что все локально выпуклые (или хотя бы все банаховы) пространства обладают свойством аппроксимации.

Будем говорить, что пространство E обладает *свойством слабой аппроксимации*, если множество операторов конечного ранга плотно в $L(E)$ относительно топологии равномерной сходимости на всех абсолютно выпуклых компактных множествах в E. Это определение заимствовано из книги [8]. Ясно, что из свойства аппроксимации вытекает свойство слабой аппроксимации, а для полных (в частности, банаховых) пространств эти свойства эквивалентны.

Банахово пространство E обладает свойством ограниченной аппроксимации, если существует сеть операторов конечного ранга $\{I_\nu\}$, которая сходится к единичному оператору в сильной операторной топологии (т. е. в топологии простой сходимости), причем нормы $\|I_\nu\|$ равномерно ограничены (по ν) [3]. Несколько более сильное свойство метрической аппроксимации для банаховых пространств сформулировано и исследовано Гротендиком [2].

Для произвольного локально выпуклого пространства E сформулируем свойство *ограниченной аппроксимации* следующим образом. Будем говорить, что E обладает этим свойством, если существует сеть конечномерных операторов, которая сходится к единичному оператору в слабой операторной топологии и ограничена в этой топологии. Из доказанного ниже предложения 2 следует, что для банаховых пространств наше определение эквивалентно приведенному выше «классическому» определению свойства ограниченной аппроксимации, а для полных метризуемых сепарабельных пространств — определению, сформулированному (применительно к случаю ядерных пространств Фреше) [9].

Хорошо известным свойством аппроксимационного типа (тесно связанным с другими аппроксимационными свойствами [2, 3]) является наличие базиса. *Базисом Шаудера* в локально выпуклом пространстве E называется такая последовательность $\{e_i\}$ векторов из E, когда каждый элемент $x \in E$ имеет единственное разложение $x = \sum_{i=1}^{\infty} \xi_i e_i$ (5), где линейные формы $x \mapsto \xi_i$ непрерывны.

---

[1] В дальнейшем, не оговаривая этого специально, мы будем считать все рассматриваемые операторы конечного ранга линейными непрерывными, а термины «оператор конечного ранга» и «конечномерный оператор» употреблять как синонимы.

Если E — банахово пространство, то непрерывность этих форм автоматически следует из единственности разложения (5). Если ряд (5) сходится лишь в слабой топологии $\sigma(E, E')$, то базис $\{e_i\}$ называется *слабым*.

Обозначим через e_i' элемент в E', соответствующий линейной форме $x \mapsto \xi_i$, так что $\xi_i = \langle e_i', x \rangle$, и разложение (5) можно переписать в следующем виде:

$$x = \sum_{i=1}^{\infty} < e_i', x > e_i. \tag{6}$$

Последовательность $\{e_i'\}$ образует базис Шаудера в пространстве E', наделенном слабой топологией $\sigma(E', E)$. Эта последовательность называется *биортогональной* к базису $\{e_i\}$.

2. Докажем несколько утверждений, устанавливающих взаимосвязь различных аппроксимационных свойств. Поскольку всякая сходящаяся счетная последовательность ограничена, из определения свойства ограниченной аппроксимации непосредственно вытекает следующее утверждение.

Предложение 1. *Если в локально выпуклом пространстве E существует счетная последовательность конечномерных операторов, сходящаяся к единичному оператору в слабой операторной топологии, то пространство E обладает свойством ограниченной аппроксимации.*

Следствие 1. *Если локально выпуклое пространство содержит базис Шаудера (хотя бы слабый), то оно обладает свойством ограниченной аппроксимации.*

В самом деле, пусть $\{e_i\}$ — базис Шаудера, где $\{e_i'\}$ — биортогональная последовательность в E'. Положим $I_n : x \to \sum_{i=i}^{n} < e_i', x > e_i$. Равенство (6) показывает, что последовательность конечномерных операторов $\{I_n\}$ сходится к единичному оператору в слабой операторной топологии, если ряд (6) сходится хотя бы слабо. Остается сослаться на предложение 1.

Предложение 2. *Пространство E обладает свойством ограниченной аппроксимации тогда и только тогда, когда существует сеть операторов конечного ранга в E, сходящаяся к единичному оператору в сильной операторной топологии (т. е. в топологии простой сходимости) и ограниченная в этой топологии.*

Доказательство. Пространство $L(E)$ имеет одно и то же сопряженное пространство $E' \otimes E$ относительно сильной и слабой операторных топологий. Поэтому для обеих топологий совпадают ограниченные множества и замыкания выпуклых множеств; это следует из теорем Хана — Банаха и Макки — Аренса. Пусть $\{I_\nu\}$ — сеть конечномерных операторов, которая слабо сходится к единичному оператору и ограничена. Ясно, что выпуклая оболочка этого множества ограничена, состоит из операторов конечного ранга и содержит единичный оператор в своем замыкании (слабом и сильном). Поэтому из свойства ограниченной аппроксимации вытекает существование сети конечномерных операторов, сходящейся к единичному оператору в сильной операторной топологии и ограниченной в этой топологии. Обратное утверждение очевидно.

Предложение 3. *Если пространство E бочечно и обладает свойством ограниченной аппроксимации, то оно обладает и свойством аппроксимации.*

Доказательство. Из предложения 2 следует существование сети $\{I_\nu\}$ конечномерных операторов в E, которая сходится к единичному оператору в топологии простой сходимости и ограничена в этой топологии. Поскольку E бочечно, из ограниченности указанной сети следует, что множество $\{I_\nu\}$ равностепенно непрерывно, а на любом равностепенно непрерывном подмножестве в $L(E)$ топологии простой и предкомпактной сходимости совпадают (принцип Банаха—Штейнгауза). Поэтому сеть $\{I_\nu\}$ сходится к единичному оператору в топологии предкомпактной сходимости. Отсюда легко следует, что для любого оператора $A \in L(E)$ сеть $\{AI_\nu\}$ сходится к оператору A в $L(E)$; поскольку операторы AI_ν конечномерны, свойство аппроксимации выполняется.

Предложение 4. *Если пространство E полно, метризуемо и сепарабельно, то оно обладает свойством ограниченной аппроксимации тогда и только тогда, когда существует счетная последовательность операторов конечного ранга, которая сходится к единичному оператору в сильной операторной топологии в $L(E)$ (и автоматически — в топологии предкомпактной сходимости).*

Доказательство. Если последовательность указанного в предложении 4 типа существует, то свойство ограниченной аппроксимации выполняется в силу предложения 1. Поскольку любое полное метризуемое пространство является бочечным, из свойства ограниченной аппроксимации, предложения 2 и принципа Банаха—Штейнгауза следует, что существует равностепенно непрерывное множество H в $L(E)$, которое состоит из операторов конечного ранга и содержит единичный оператор в своем замыкании относительно топологии простой сходимости. Сужение на H этой топологии метризуемо, т. к. совпадает с сужением на H метризуемой топологии простой сходимости на счетном тотальном подмножестве в E. Кроме того, совпадают сужения на H топологий простой и предкомпактной сходимости. В силу метризуемости H существует счетная последовательность элементов из H, сходящаяся к единичному оператору в топологиях простой и предкомпактной сходимости, что и требовалось.

3. Следующая лемма принадлежит Гротендику.

Лемма 1. *Пусть пространство E обладает таким базисом абсолютно выпуклых окрестностей нуля, что для любой окрестности U из этого базиса банахово пространство $\hat{E}_U$ об-*

ладает свойством аппроксимации. Тогда E обладает свойством аппроксимации.

Доказательство этой леммы можно найти в [2], гл. 1, § 5, п.1.

Предложение 5. *Если топология локально выпуклого пространства E совпадает со слабой топологией $\sigma(E, E')$, то это пространство обладает свойством аппроксимации.*

Доказательство. Легко видеть, что для любой окрестности нуля U в E пространство $\hat{E}_U$ конечномерно и, следовательно, обладает аппроксимационным свойством. Поэтому предложение 5 вытекает из леммы 1.

§. 4. Основные результаты. 1. Пространство $E' \otimes E$ является двусторонним $S(E)$-модулем. Произведение Au, где $u \in E' \otimes E$, $A \in S(E)$, определяется так, чтобы линейное непрерывное отображение $u \mapsto Au$ соответствовало раздельно непрерывному билинейному отображению $E' \times E \to E' \overline{\otimes} E$, при котором пара (x', x) переходит в элемент $x' \otimes Ax$ (см. выше, § 2, п.4, 5). Аналогично произведение uA определяется с помощью билинейного отображения $(x', x) \mapsto {}^tAx' \otimes x$, где ${}^tA$ — сопряженный к A оператор. Легко видеть, что для любого ядра Фредгольма $u = \sum \lambda_i x_i' \otimes x_i$ справедливы соотношения $Au = \sum \lambda_i x_i' \otimes Ax_i$, $uA = \sum \lambda_i {}^tAx_i' \otimes x_i$. Отсюда следует, что если $u \in E' \overline{\otimes} E$ то $Au \in E' \overline{\otimes} E$, $uA \in E' \overline{\otimes} E$. Из определений следа $\mathrm{tr}\, u$ тензора $u \in E' \overline{\otimes} E$ и отображения $\Gamma : E' \overline{\otimes} E \to S(E)$ (см. выше, § 2) непосредственно выводится справедливость следующих соотношений: $\mathrm{tr}\,(uA) = \mathrm{tr}\,(Au) = \sum_{i=1}^{\infty} \lambda_i \langle x_i', Ax_i \rangle$ (7); $\Gamma(uA) = \Gamma(u) A$; $\Gamma(Au) = A\Gamma(u)$ (8), где $A \in S(E)$ u — ядро Фредгольма с разложением $u = \sum_{i=1}^{\infty} \lambda_i x_i' \otimes x_i$ вида (4).

Полунормы $A \mapsto |\mathrm{tr}\,(Au)|$ определяют в $S(E)$ слабую операторную топологию, если элемент u пробегает алгебраическое тензорное произведение $E' \otimes E$. Рассмотрим топологию в $S(E)$, задаваемую полунормами указанного типа, где u пробегает пространство $E' \overline{\otimes} E$ ядер Фредгольма. Эту топологию будем так же, как в [4], называть *ультраслабой*. Для того случая, когда пространство E гильбертово, указанная топология совпадает с ультраслабой топологией в смысле теории алгебр фон Неймана.

Следующее *утверждение* содержится в [2, 4].

Предложение 6. *Все операторы Фредгольма в пространстве E имеют корректно определенный след в том и только в том случае, если множество операторов конечного ранга плотно в $S(E)$ относительно ультраслабой топологии.*

Для полноты изложения приведем доказательство этого утверждения. Нам потребуются следующие леммы.

Лемма 2. *Пусть F — оператор конечного ранга в E, и F: $x \mapsto \sum_{j=1}^{m} < y_j', x > y_j$, где $y_j \in E$, $y_j' \in E'$. Тогда для любого ядра*

Фредгольма $u \in E' \overline{\otimes} E$ *справедливо соотношение* $\mathrm{tr}(Fu) = \sum_{j=1}^{m} < y'_j,\ \Gamma(u)\, y_j > = \mathrm{sp}(F\Gamma(u))$.

Лемма 3. *Следующие утверждения эквивалентны:* 1) $\Gamma(u) = 0$; 2) $\mathrm{tr}(uF) = 0$ *для любого оператора конечного ранга* F *в* $S(E)$.

Доказательство леммы 2. Пусть ядро Фредгольма u допускает разложение (4), а оператор $A = \Gamma(u)$ — соответствующее разложение (1). Поскольку функционалы y'_j непрерывны, из (1) следует, что $< y'_j,\ A y_j > = \sum_{i=1}^{\infty} \lambda_i < x'_i,\ y_j >< y'_j,\ x_i >$. Отсюда $\sum_{j=1}^{m} < y'_j,\ \Gamma(u)\, y_j > = \sum_{j=1}^{m} \sum_{i=1}^{\infty} \lambda_i < x'_i,\ y_j >< y'_j,\ x_i >$. С другой стороны $\mathrm{tr}(Fu) = \sum_{i=1}^{\infty} \lambda_i < x'_i,\ F x_i > = \sum_{i=1}^{\infty} \sum_{j=1}^{m} \lambda_i < x'_i,\ y_i >< y'_j,\ x_i >$. Поскольку индекс j пробегает конечное число значений, суммирование по i перестановочно с суммированием по j, и остается заметить, что величина $\sum_{j=1}^{m} < y'_j,\ \Gamma(u)\, y_j >$ совпадает с обычным следом $\mathrm{sp}(F\Gamma(u))$ конечномерного оператора $F\Gamma(u)$.

Доказательство леммы 3. Если $\Gamma(u) = 0$, то в силу леммы 2 $\mathrm{tr}(uF) = \mathrm{tr}(Fu) = \mathrm{sp}(F \cdot \Gamma(u))$ для любого конечномерного оператора F. Чтобы доказать обратное утверждение, положим $F: x \mapsto < e',\ x > e$, где $e \in E$, $e' \in E'$. В этом случае $\mathrm{tr}(uF) = < e',\ \Gamma(u)\, e >$. Если $tr(uF) = 0$ для всех операторов F ранга один, то все матричные элементы $< e', \Gamma(u)\, e >$ оператора $\Gamma(u)$ равны нулю, т. е. $\Gamma(u) = 0$, что и требовалось.

Доказательство предложения 6. Из определения ультраслабой топологии следует, что любой линейный функционал l на $S(E)$, непрерывный в этой топологии, имеет вид $l(A) = \mathrm{tr}(uA)$, где $u \in E' \overline{\otimes} E$. Поэтому если операторы конечного ранга не плотны в $S(E)$ относительно ультраслабой топологии, то по теореме Хана — Банаха найдется такой линейный непрерывный функционал $l(A) = \mathrm{tr}(uA)$, что $l(A) = 0$ для всех операторов конечного ранга и $l(1) \neq 0$, где 1 — единичный оператор. Ясно, что ядро Фредгольма u имеет ненулевой след $\mathrm{tr}\, u = \mathrm{tr}(u \cdot 1) = l(1) \neq 0$, но $\Gamma(u) = 0$ в силу леммы 3. Таким образом, корректно определить след нельзя. Если же операторы конечного ранга плотны в $S(E)$ относительно ультраслабой топологии, то непрерывный функционал, который обращается в нуль на этом плотном множестве, автоматически обращается в нуль и на единичном операторе, т. е. из условия $\Gamma(u) = 0$ следует (в силу леммы 3), что $\mathrm{tr}\, u = 0$. В этом случае след корректно определен (см. § 2, п. 5), что и требовалось.

Замечание. Предложение 6 допускает следующее обобщение, рассмотренное в работе [10]. Пусть T — односторонний $S(E)$-подмодуль в $E'\hat{\otimes}E$. Топологию в $S(E)$ и $L(E)$, задаваемую полунормами $A \mapsto |\operatorname{tr}(uA)|$, где $u \in T$, назовем T-слабой. Предположим, что каноническое отображение $\Gamma: E' \otimes E \to S(E)$ (см. § 2) можно продолжить на подпространство $T \supset E' \otimes E$. В этом случае все операторы из $\Gamma(T)$ имеют корректно определенный след тогда и только тогда, когда единичный оператор в E можно аппроксимировать операторами конечного ранга в T-слабой топологии.

Таким образом, нетрудно указать аппроксимационные свойства, адекватно описывающие условия, при которых можно корректно определить след для различных классов операторов. Однако основная задача состоит в том, чтобы указать такие условия, которые не только представляют теоретический интерес, но и допускают эффективную проверку.

2. ***Лемма 4.*** *Пусть ядро Фредгольма u допускает такое разложение вида (4), что последовательность $\{x'_i\}$ равностепенно непрерывна, так что $\Gamma(u)$ — ядерный оператор. Пусть $\{A_\nu\}$ — сеть в $S(E)$, сходящаяся к оператору A в топологии равномерной сходимости на всех абсолютно выпуклых компактных множествах. Тогда* $\operatorname{tr}(uA_\nu) \to \operatorname{tr}(uA)$.

Доказательство. Выберем для тензора u такое разложение вида (4), чтобы последовательность $\{x_i\}$ содержалась в некотором компактном абсолютно выпуклом множестве K в E, а последовательность $\{x'_i\}$ — в поляре U° некоторой абсолютно выпуклой окрестности нуля U в E. Указанное разложение для тензора u всегда существует (см. [2], гл. 1, § 3, п. 2). Окрестность U поглощает компакт K, т. е. найдется такое число $\mu > 0$, что $Ax_i \in \mu U$. Поскольку сеть $\{A_\nu\}$ сходится равномерно на K, существует такой индекс ν_0, что $(A_\nu - A)x_i \in \mu U$ при $\nu \geqslant \nu_0$ и при всех значениях индекса i. Поэтому $A_\nu x_i \in 2\mu U$ и, следовательно, $|< x'_i, A_\nu x_i >| \leqslant 2\mu$ при всех i и $\nu \geqslant \nu_0$, т. е. величина $< x'_i, A_\nu x_i >$ равномерно ограничена, так что по известной теореме Лебега можно перейти к пределу под знаком суммы $\sum_{i=1}^{\infty} \lambda_i < x'_i, A_\nu x_i >$, и этот предел совпадает с величиной $\sum_{i=1}^{\infty} \lambda_i < x'_i, Ax_i >$. Другими словами, $\operatorname{tr}(uA_\nu) \to \operatorname{tr}(uA)$ в силу соотношения (7), что и требовалось.

Теорема 1. *Пусть пространство E обладает свойством слабой аппроксимации, т. е. существует сеть операторов конечного ранга, сходящаяся к единичному оператору в топологии равномерной сходимости на всех абсолютно выпуклых компактных множествах в E. Тогда любой ядерный оператор в E имеет корректно определенный след. Если $\{B_\nu\}$ — сеть в $L(E)$,* *сходящаяся к оператору $B \in L(E)$ в указанной топологии, то* $\operatorname{tr}(AB_\nu) \to \operatorname{tr}(AB)$ *для любого ядерного оператора A.*

Доказательство. Пусть $\{I_\nu\}$ — сеть конечномерных операторов, сходящаяся к единичному оператору равномерно на всех абсолютно выпуклых компактах, $A = \Gamma(u)$ — произвольный ядерный оператор, причем тензор u удовлетворяет условию леммы 4. В силу этой леммы и леммы 2

$$\operatorname{tr} A = \sum_{i=1}^{\infty} \lambda_i < x_i', x_i > = \lim_\nu \sum_{i=1}^{\infty} \lambda_i < x_i', I_\nu x_i > = \lim_\nu \operatorname{tr}(uI_\nu) =$$

$= \operatorname{sp}(AI_\nu)$. Поскольку величины $\operatorname{sp}(AI_\nu)$ и $\lim\limits_\nu \operatorname{sp}(AI_\nu)$ не зависят от тензора u и от разложений вида (1) и (4), величина $\operatorname{tr} A$ определена корректно. Второе утверждение теоремы также следует из леммы 4.

Следствие 2. *Если пространство E обладает свойством аппроксимации, то любой ядерный оператор в E имеет корректно определенный след.*

3. Продемонстрируем, что свойства аппроксимации недостаточно для того, чтобы любой оператор Фредгольма имел корректно определенный след. Рассмотрим рефлексивное банахово пространство E, построенное Энфло [3] и не обладающее свойством аппроксимации. Обозначим через $\tilde{E}$ это же пространство, но наделенное ослабленной топологией $\sigma(E, E')$. Пространство $\tilde{E}$ квазиполно и обладает свойством аппроксимации в силу предложения 5. Заметим, что операторы Фредгольма в E и $\tilde{E}$ одни и те же (зато все ядерные операторы в $\tilde{E}$ конечномерны). Поэтому из результатов Гротендика о связи между проблемами однозначности и аппроксимации для случая банаховых пространств вытекают следующие.

Теорема 2. *Существует квазиполное локально выпуклое пространство со свойством аппроксимации, в котором нельзя корректно определить след для всех операторов Фредгольма.*

Теорема 3. *Пусть локально выпуклое пространство E обладает свойством ограниченной аппроксимации. Тогда любой оператор Фредгольма в E имеет корректно определенный след. Если сеть $\{A_\nu\}$ в $S(E)$ сходится к оператору A в слабой операторной топологии и ограничена в этой топологии, то для любого оператора Фредгольма F справедливо соотношение* $\lim\limits_\nu \operatorname{tr}(FA_\nu) = \operatorname{tr}(FA)$.

Точно так же, как теорема 1 выводится из лемм 2, 4, теорема 3 следует из леммы 2 и следующей леммы.

Лемма 5. *Если сеть $\{A_\nu\}$ в $S(E)$ сходится к оператору A в слабой операторной топологии и ограничена в этой топологии, то $\operatorname{tr}(uA_\nu) \to \operatorname{tr}(uA)$ для любого тензора $u \in E' \tilde{\otimes} E$.*

Следствие 3. *Если сеть $\{A_\nu\}$ в $S(E)$ сходится в слабой операторной топологии и ограничена в этой топологии, то она сходится и в ультраслабой топологии.*

Следствие 4 [4]. *Если единичный оператор в E является пределом счетной последовательности $\{I_n\}$ операторов конечного ранга, то любой оператор Фредгольма F в E имеет корректно определенный след и* $\operatorname{tr} F = \lim\limits_{n\to\infty} \operatorname{tr}(FI_n) = \lim\limits_{n\to\infty} \operatorname{sp}(FI_n)$.

Лемма 5 доказывается так же, как лемма 4, причем равномерная ограниченность величин $|< x'_i,\ A_\nu x_i >|$ непосредственно выводится из ограниченности множеств $\{A_\nu\}$, $\{x_i\}$, $\{x'_i\}$. Фактически лемма 5 и следствие 3 доказаны в [4] (см. доказательство предложения 4.2 и примечание на с. 343 этой работы). Следствие 3 вытекает из леммы 5 и определения ультраслабой топологии. Следствие 4 вытекает из теоремы 3 и предложения 1 или из предложения 6 и следствия 3, поскольку всякая сходящаяся в слабой топологии счетная последовательность в $S(E)$ ограничена, так что, если выполнено условие следствия 4, то выполнены и условия теоремы 3. Отметим, что из предложения 6 и следствия 3 вытекает и теорема 3.

Следствие 5. *Существует квазиполное локально выпуклое пространство, обладающее свойством аппроксимации, но не обладающее свойством ограниченной аппроксимации.*

Это следствие вытекает из теорем 2, 3. Существует даже банахово пространство со свойством аппроксимации, но не обладающее свойством ограниченной аппроксимации. Это утверждение доказано в работе [11].

4. Пусть пространство E обладает базисом Шаудера $\{e_i\}$ (хотя бы слабым) и $\{e'_i\}$ — биортогональная к этому базису последовательность в E'. Положим $I_n : x \mapsto \sum\limits_{i=1}^{n} < e'_i,\ x > e_i$. Ясно, что $\{I_n\}$ — последовательность операторов конечного ранга, сходящаяся к единичному оператору в слабой операторной топологии. Из следствия 4 вытекает, что любой оператор Фредгольма F в E имеет корректно определенный след, причем $\operatorname{tr} F = \lim\limits_{n\to\infty} \operatorname{tr}(FI_n) = \lim\limits_{n\to\infty} \sum\limits_{i=1}^{n} < e'_i, Fe_i > = \sum\limits_{i=1}^{n} < e'_i, Fe_i >$. Величина $\sum\limits_{i=1}^{n} < e'_i, Fe_i >$ называется *матричным следом* оператора F. Таким образом, справедливо

Следствие 6 [5]. *Если пространство E имеет базис Шаудера (хотя бы слабый), то любой оператор Фредгольма в E имеет корректно определенный след, совпадающий с матричным следом.*

Для безусловных базисов в банаховых пространствах это утверждение более сложным способом доказано А. С. Маркусом и В. И. Мацаевым в работе [12].

Список литературы: 1. *Schatten R.*, von Neumann J. The cross — space of linear transformations. II. — Annals of Mathematics, 1946, 47, p. 608—630. 2. *Grothendieck. A.* Produits tensoriels topologiques et espaces nucléaires. —

Mem. Amer. Math. Soc., 1955, 16. — 334. 3. *Энфло П.* Контрпример в проблеме аппроксимации в банаховом пространстве.— Математика, 1974, 18, вып. 1, с. 146—155. 4. *Литвинов Г. Л.* Об условиях, при которых представление определяется своим характером с точностью до эквивалентности. — В кн.: Тр. семинара по векторному и тензорному анализу, вып. 17, М.: Изд-во при Моск. ун-те, 1974, с. 325—349. 5. *Литвинов Г. Л.* О следах линейных операторов в локально выпуклых пространствах. — В кн.: Тр. семинара по векторному и тензорному анализу, вып. 19, М.: Изд-во при Моск. ун-те, 1979, с. 263—272. 6. *Литвинов Г. Л.* О следах линейных операторов в локально выпуклых пространствах. — Функцион. анализ и его прил., 1979, 13, вып. 1, с. 73—74.

7. *Гротендик А.* Теория Фредгольма. — Математика, 1958, т. 2, вып. 5, с. 51—103.

8. *Köthe G.* Topological Vector Spaces II, Springer — Verlag, New Jork e. a., 1979. — 481p.

9. *Dubinsky E.* The structur of Nuclear Fréchet Spaces. Lecture Notes in Mathematics, vol. 720. Berlin e. a., 1979. — 187 p.

10. *Литвинов Г. Л., Ломоносов В. И.* Теоремы плотности в локально выпуклых пространствах и их приложения. — В кн.: Тр. семинара по векторному и тензорному анализу, вып. 20. М.: Изд-во при Моск. ун-те, 1981, с. 210—217. 11. *Figiel T., Johnson W. B.* The approximation property. —Proc. Amer Math. Soc., 1973, vol. 41, N 1, p. 197—200.

12. *Маркус А. С., Мацаев В. И.* Аналоги неравенств Вейля и теоремы о следе в банаховом пространстве. — Мат. сб., 1971, 86, № 2, с. 299—313.

Поступила в редколлегию 01. 04. 81.