УДК 517.5 + 519.210

В. Э. КАЦНЕЛЬСОН

КОНТИНУАЛЬНЫЕ АНАЛОГИ ТЕОРЕМЫ ГАМБУРГЕРА—НЕВАНЛИННЫ И ОСНОВНЫЕ МАТРИЧНЫЕ НЕРАВЕНСТВА КЛАССИЧЕСКИХ ЗАДАЧ. III.

В статье излагается третья часть работы. Обозначения согласованы с приведенными в работах [1, 2], нумерация параграфов и формул продолжает их нумерацию в [1—2].

§ 8.1°. Приведем формулировки теорем об убывании меры.

Теорема $D_{н}$. Пусть $w(z)$ — *функция класса* ($\boldsymbol{R}$), $U(z)$ и $V(z)$ — *полиномы, причем полином* U — *вещественный степени* $L+1$. *Пусть выполняется асимптотическое соотношение* $U(z)w(z)+$ $+V(z)=O(1)$, $(|z|\to\infty,\ \arg z=\pi/2)$ **(8.1.1)**.

Тогда для меры $d\sigma(\lambda)$, *участвующей в интегральном представлении* (I_R) *функции* $w(z)$, *выполняется условие* $(\boldsymbol{d}_L)$.

Теорема $D_{\boldsymbol{\omega}}$. *Пусть функция* $w(z)$ *класса* ($\boldsymbol{R}$) *и целая функция* $V(z)$, *имеющая оценку роста не выше нормального типа при порядке* 1, *таковы, что хотя бы при одном* θ, $0<\theta<\pi/2$, *на лучах* $\arg z=\pm\theta$ *выполняется асимптотическое соотношение* $e^{Lz}w(z)+V(z)=O(e^{\varepsilon|z|})$ **(8.1.2)** $(|z|\to\infty,\ \arg z=\pm\theta$, $\varepsilon>0$ — *произвольно фиксировано*).

Тогда для меры $d\rho(\lambda)$, *участвующей в интегральном представлении* (I_R) *функции* $w(z)$, *выполняется условие* $(D^+_{(1,\ L)})$.

Теорема $D_{к}$. *Пусть функция* $w(z)$ *класса* ($\boldsymbol{R}$) *и целая функция* $V(z)$, *имеющая оценку роста не выше нормального типа при порядке* 1/2, *таковы, что хотя бы на лучах* $\arg z=\pm\pi/2$ *выполняется асимптотическое соотношение* $u_L(z)\cdot w(z)+V(z)=$ $=O(e^{\varepsilon\sqrt{|z|}})$ **(8.1.3)** $(|z|\to\infty,\ \arg z=\pm\pi/2,\ \varepsilon>0$ — *произвольно фиксировано*), *где* $u_L(z)=\cos L\sqrt{z}$ *или* $u_L(z)=(\sin L\sqrt{z})/\sqrt{z}$.

Тогда для меры $d\sigma(\lambda)$, участвующей в представлении (I_R) функции $w(z)$, выполняется условие ($D^-(1/2, L)$).

2°. Доказательство теорем D опирается на следующую лемму.

Основная лемма об убывании меры. *Пусть мера $d\sigma(\lambda)\geqslant 0$ и функция $p(\lambda)\geqslant 0$ на некотором измеримом пространстве E таковы*[1]*, что выполняется условие*

$$\int_E e^{-(L+\varepsilon)p(\lambda)}\,d\rho(\lambda)<\infty \quad (\forall\varepsilon>0) \tag{8.2.1}$$

(здесь $L>0$ — некоторое число), и пусть функция $F(\varsigma)$ определяется в полуплоскости $\operatorname{Re}\varsigma<-L$ интегралом

$$F(\zeta)=\int_E e^{\zeta p(\lambda)}\,d\rho(\lambda). \tag{8.2.2}$$

Пусть известно, что функция $F(\zeta)$ (заведомо аналитическая в полуплоскости $\operatorname{Re}\zeta<-L$) аналитически продолжается в некоторую область, содержащую эту полуплоскость и отрицательную полуось.

Тогда для меры $d\rho(\lambda)$ выполняется условие

$$\int_E e^{-\varepsilon p(\lambda)}d\rho(\lambda)<\infty \quad (\forall\varepsilon>0) \tag{8.2.3}$$

Эта лемма доказывается так же, как ее ослабленный вариант из § 5 (и может быть получена из этого утверждения «заменой переменных», но мы предпочтем непосредственное доказательство).

Доказательство. Пусть $\zeta_0<-L$ — некоторая точка луча $(-\infty, -L)$. Вследствие (8.2.1) производные $F^{(k)}(\zeta_0)$ можно получить, дифференцируя в (8.2.2) под знаком интеграла:

$$F^{(k)}(\zeta_0)=\int_E p(\lambda)^k e^{\zeta_0 p(\lambda)}\,d\rho(\lambda) \quad (k=0, 1, 2, \ldots). \tag{8.2.4.}$$

Отсюда видно, что $F^{(k)}(\zeta_0)\geqslant 0$ ($k=0, 1, 2, \cdots$). Круг $\{\zeta : |\zeta-\zeta_0|\leqslant|\zeta_0|-L\}$ содержится в полуплоскости аналитичности функции $F(\zeta)$, поэтому $F(\zeta)$ есть в этом круге сумма своего ряда Тейлора:

$$F(\zeta)=\sum_{0\leqslant k<\infty}\frac{1}{k!}F^{(k)}(\zeta_0)\cdot(\zeta-\zeta_0)^k. \tag{8.2.5}$$

Коэффициенты этого ряда неотрицательны, и по условиям леммы функция $F(\zeta)$ аналитически продолжается вправо от точки ζ_0 по крайней мере до точки $\zeta=0$. По теореме Прингсгейма о степенных рядах с неотрицательными коэффициентами [3, гл. 3, § 6, с. 326], радиус сходимости ряда в (8.2.5) не меньше, чем $|\zeta_0|$.

---

[1] Мера $d\rho(\lambda)$ предполагается σ-конечной, функция $p(\lambda)$ — измеримой.

Поэтому этот ряд будет сходиться при подстановке в него $\zeta = -\varepsilon$ (если $0 < \varepsilon < |\zeta_0|$): $\sum\limits_{0<k<\infty} \frac{1}{k!} F^{(k)}(\zeta_0) \cdot (-\varepsilon - \zeta_0)^k < \infty$. Подставляя сюда выражение (8.2.4) для $F^{(k)}(\zeta_0)$ и меняя порядок суммирования по k и интегрирования по λ (это можно — все неотрицательно), получаем: $\int\limits_E \left\{ \sum\limits_{0<k<\infty} \frac{1}{k!} (-\varepsilon - \zeta_0)^k p(\lambda)^k \right\} \cdot e^{\zeta_0 p(\lambda)} \times$ $\times\, d\rho(\lambda)$. Суммируя ряд в подинтегральном выражении, мы и получим (8.2.3). Лемма доказана.

Как сообщил нам недавно И. В. Островский, близкое утверждение было получено еще в [4] и широко известно в кругу лиц, занимающихся разложением вероятностных законов.

3°. Теорема о перестановке порядка интегрирования в сингулярном интеграле. Пусть $w(z)$ — функция класса $(\boldsymbol{R})$, имеющая интегральное представление

$$w(z) = \alpha + \beta z + \int\limits_{-\infty}^{\infty} \left(\frac{1}{\lambda - z} - \frac{\lambda}{1+\lambda^2} \right) d\sigma(\lambda) \quad (I_R),$$

где $\alpha = \bar{\alpha}$, $\beta \geqslant 0$ — константы, $d\sigma(\lambda) \geqslant 0$ — мера, удовлетворяющая условию (r_2). Через σ_0 ниже обозначена величина $d\sigma$ — меры точки $\lambda = 0$, или, что то же самое, величина скачка в точке $\lambda = 0$, соответствующей функции распределения $\sigma(\lambda)$.

a. Пусть Γ — контур, образованный лучами $\arg z = \pm\theta$ (где $0 < \theta < \pi$), ориентированный «снизу вверх», $\varphi(z)$ — функция, аналитическая внутри угла $\{z : 0 < |z| < \infty,\ -\theta < \arg z < \theta\}$, непрерывная вплоть до его границы и имеющая в этом угле асимптотическое поведение

$$\varphi(z) = \varphi_\infty z^{-2} + 0(|z|^{-2}) \tag{8.3.1}$$

($|z| \to \infty$, $-\theta \leqslant \arg z \leqslant \theta$), где φ_∞ — некоторая константа.

Тогда имеет место равенство

$$\frac{1}{2\pi i} \int\limits_\Gamma' w(z)\varphi(z)\, dz = \frac{\theta}{\pi} (\sigma_0 \varphi(0) + \beta\varphi_\infty) + \int\limits_{+0}^{\infty} \varphi(\lambda)\, d\sigma(\lambda). \tag{8.3.2.}$$

b. Пусть Γ — контур, образованный лучами $\arg z = \pi \pm \theta$ (где $0 < \theta < \pi$) и ориентированный «сверху вниз», $\varphi(z)$ — функция, аналитическая внутри угла $\{z : 0 < |z| < \infty,\ \pi - \theta < \arg z < \pi + \theta\}$, непрерывная вплоть до его границы и имеющая в этом угле асимптотическое поведение $\varphi(z) = \varphi_\infty \cdot z^{-2} + 0(|z|^{-2}$ ($|z| \to \infty$, $\pi - \theta \leqslant \arg z \leqslant \pi + \theta$), где φ_∞ — некоторая константа.

Тогда имеет место равенство

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{\Gamma}' w(z)\varphi(z)\,dz = \frac{\theta}{\pi}(\sigma_0\varphi(0)+\beta\varphi_\infty)+\int_{-\infty}^{-0}\varphi(\lambda)\,d\sigma(\lambda)\cdot \tag{8.3.3.}$$

Интеграл по Γ в (8.3.2.) и (8.3.3) существует в смысле главного значения:

$$\int_{\Gamma}' w(z)\cdot\varphi(z)dz = \lim_{\varepsilon\to 0,\ R\to\infty}\int_{\Gamma_{\varepsilon R}} w(z)\varphi(z)dz,$$

где $\Gamma_{\varepsilon,R}=\Gamma\cap\{z:\varepsilon\leqslant|z|\leqslant R\}$.

Доказательство. Утверждения a и b получаются аналогично и сформулированы нами раздельно лишь для удобства пользования. Докажем поэтому лишь одно из них, для определенности a.

Подставим в интеграл $\int\limits_{\Gamma} w(z)\varphi(z)dz$ интегральное представление $(I_{\mathbf{R}})$ для $w(z)$. Из выражения (8.3.1) следует равенство $\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\Gamma}(\alpha+\beta z)\varphi(z)dz=\frac{\theta}{\pi}\beta\varphi_\infty$ (контурное интегрирование с учетом вычета на бесконечности), и значит, осталось доказать, что

$$\lim_{\varepsilon\to+0,\ R\to\infty}\frac{1}{2\pi i}\int_{\Gamma_{\varepsilon,\ R}}\left(\int_{-\infty}^{\infty}\left(\frac{1}{\lambda-z}-\frac{\lambda}{1+\lambda^2}\right)d\sigma(\lambda)\right)\varphi(z)dz=\frac{\theta}{\pi}\varphi(0)\sigma_0+$$

$$+\int_{+0}^{+\infty}\varphi(\lambda)\,d\sigma(\lambda). \tag{8.3.4}$$

Так как $\left|\frac{1}{\lambda-z}-\frac{\lambda}{1+\lambda^2}\right|\leqslant\left(\frac{1}{\varepsilon}+R\right)\cdot\frac{2}{\sin\theta}\cdot\frac{1}{1+\lambda^2}$ $(\varepsilon\leqslant|z|\leqslant R$, $-\theta\leqslant\arg z\leqslant\theta;\ -\infty<\lambda<\infty)$ (это неравенство является следствием неравенства (7.2.4) и неравенства $(1+|\lambda|\cdot|z|)\cdot(|\lambda|+|z|)^{-1}\leqslant\varepsilon^{-1}+R$, если $\varepsilon\leqslant|z|\leqslant R$), то с учетом (8.3.1) и условия $(\boldsymbol{r}_2)$ на меру $d\sigma(\lambda)$ имеем

$$\int_{-\infty}^{\infty}\left(\int_{\Gamma_{\varepsilon,\ R}}|\varphi|(z)|\cdot\left|\frac{1}{\lambda-z}-\frac{\lambda}{1+\lambda^2}\right|\cdot|dz|\right)d\sigma(\lambda)<\infty.$$

Таким образом, применима теорема Фубини, и

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{\Gamma_{\varepsilon,\ R}}\left(\int_{-\infty}^{\infty}\left(\frac{1}{\lambda-z}-\frac{\lambda}{1+\lambda^2}\right)d\sigma(\lambda)\right)\varphi(z)\,dz=\int_{-\infty}^{\infty}d\sigma(\lambda)\cdot\left(\frac{1}{2\pi i}\int_{\Gamma_{\varepsilon,\ R}}\times\right.$$

$$\left.\varphi(z)\cdot\left(\frac{1}{\lambda-z}-\frac{\lambda}{1+\lambda^2}\right)dz\right). \tag{8.3.5}$$

С помощью контурного интегрирования и вычетов устанавливается, что

$$\lim_{\varepsilon\to+0,\ R\to\infty}\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\Gamma_{\varepsilon,R}}\varphi(z)\left(\frac{1}{\lambda-z}-\frac{\lambda}{1+\lambda^2}\right)dz=\chi(\lambda)\varphi(\lambda)$$

$(-\infty<\lambda<\infty)$, где $\chi(\lambda)=1$ при $\lambda>0$, $\chi(0)=\theta/\pi$, $\chi(\lambda)=0$ при $\lambda<0$. Правая часть соотношения (8.3.4) равна интегралу $\int\limits_{-\infty}^{\infty}\chi(\lambda)\varphi(\lambda)d\sigma(\lambda)$ и для доказательства теоремы осталось показать, что в (8.3.5) можно переходить к пределу по ε и R при $\varepsilon\to+0$, $R\to\infty$. Этот предельный переход обосновывается ссылкой на теорему Лебега о мажорированном предельном переходе под интегралом. Наличие суммируемой мажоранты вытекает из следующей леммы.

Лемма 1. *Пусть $\varphi(z)$ — функция, аналитическая внутри кольцевого сектора $S=\{z:\varepsilon\leqslant|z|\leqslant R,\ -\theta\leqslant\arg z\leqslant\theta\}$ (где $0<\theta<\pi$, $0<\varepsilon<R<\infty$) и непрерывная вплоть до его границы, удовлетворяющая неравенству $|\varphi(z)|\leqslant M(1+|z|^2)^{-1}$, $(\varepsilon\leqslant|z|\leqslant R,\ -\theta\leqslant\arg z\leqslant\theta)$* **(8.3.6)**, *где $M<\infty$ не зависит от z, R, ε. Пусть $\Gamma_{\varepsilon,R}$ — контур, образованный отрезками $\arg z=\pm\theta$, $\varepsilon\leqslant|z|\leqslant R$, ориентированный «снизу вверх». Тогда имеет место неравенство*

$$\left|\int\limits_{\Gamma_{\varepsilon,R}}\varphi(z)\cdot\left(\frac{1}{\lambda-z}-\frac{\lambda}{1+\lambda^2}\right)dz\right|\leqslant\frac{C}{1+\lambda^2}\qquad(8.3.7)$$

$$(-\infty<\lambda<\infty),$$

где $C<\infty$ не зависит от λ, ε, R, а зависит лишь от M; можно взять $C=A\cdot M$, где $A<\infty$ ни от чего не зависит.

Доказательство. Так как

$$\frac{1}{\lambda-z}-\frac{\lambda}{1+\lambda^2}=\left(\frac{1+z^2}{\lambda-z}+z\right)\cdot\frac{1}{1+\lambda^2},$$

то достаточно получить неравенства

$$\left|\int\limits_{\Gamma_{\varepsilon,R}}z\varphi(z)dz\right|\leqslant A_1\cdot M\qquad(8.3.8)$$

и

$$\left|\int\limits_{\Gamma_{\varepsilon,R}}(1+z^2)\varphi(z)\cdot\frac{1}{\lambda-z}dz\right|\leqslant A_2\cdot M,\qquad(8.3.9)$$

где A_1, $A_2<\infty$ — не зависит от λ, ε, R.

Кольцевой сектор S ограничен образующими контур $\Gamma_{\varepsilon,R}$ радиальными отрезками и дугами окружностей D_ε и D_R (радиусов

ε и R), и при надлежащей ориентации дуг D_ε и D_R, согласно интегральной теореме Коши, имеем $\int\limits_{\Gamma_{\varepsilon, R}} z\varphi(z)\,dz = \int\limits_{D_\varepsilon} z\,\varphi(z)\,dz + \int\limits_{D_R} z\varphi(z)\,dz$. Из (8.3.6) следует, что $|z\varphi(z)| \leqslant M \cdot |z|^{-1}$ $(\forall z \in S)$, и значит, $\left|\int\limits_{D_\varepsilon} z\varphi(z)\,dz\right| \leqslant M \cdot \varepsilon^{-1}|D_\varepsilon| \leqslant 2\pi M$, $\left|\int\limits_{D_R} z\varphi(z)\,dz\right| \leqslant M \times R^{-1} \cdot |D_R| \leqslant 2\pi M$.

Таким образом,

$$\left|\int\limits_{\Gamma_{\varepsilon, R}} z\varphi(z)dz\right| \leqslant 4\pi M. \tag{8.3.10}$$

Неравенство (8.3.8) доказано (с $A_1 = 4\pi$). Для доказательства неравенства (8.3.9) разобьем контур интегрирования на две части: $\Gamma_{\varepsilon, R} = \Gamma^1_{\varepsilon, R} \cup \Gamma^2_{\varepsilon, R}$, где $\Gamma^1_{\varepsilon, R} = \Gamma_{\varepsilon, R} \cap \{z: |z| \leqslant 2|\lambda|\}$, $\Gamma^2_{\varepsilon, R} = \Gamma_{\varepsilon, R} \cap \{z: |z| \geqslant 2|\lambda|\}$. Мы рассмотрим лишь случай, когда оба множества $\Gamma^1_{\varepsilon, R}$ и $\Gamma^2_{\varepsilon, R}$ непусты. Случай, когда одно из них пусто, рассматривается аналогично (и даже проще). Имеем

$$\left|\int\limits_{\Gamma^1_{\varepsilon, R}} (1+z^2)\varphi(z) \cdot \frac{1}{\lambda - z}\,dz\right| \leqslant \max_{z \in S}\{(1+|z|^2) \cdot |\varphi(z)|\} \cdot \int\limits_{\Gamma^1_{\varepsilon, R}} \frac{1}{|\lambda - z|} \times |dz|,$$

так как $|\lambda - z| \geqslant |\lambda| \cdot |\sin\theta|$ $(\arg z = \pm\theta,\ -\infty < \lambda < \infty)$ и $|\Gamma^1_{\varepsilon, R}| \leqslant 4|\lambda|$, то с учетом (8.3.6) получаем, что

$$\left|\int\limits_{\Gamma^1_{\varepsilon, R}} (1+z^2) \cdot \varphi(z) \cdot \frac{1}{\lambda - z}\,dz\right| \leqslant \frac{4}{\sin\theta} M \tag{8.3.11}$$

Функция $(1+z^2)\varphi(z) \cdot (\lambda - z)^{-1}$ аналитична по z внутри кольцевого сектора, ограниченного образующими контур $\Gamma^2_{\varepsilon, R}$ радиальными отрезками и дугами окружностей $D_{2|\lambda|}$ и D_R (радиусов $2|\lambda|$ и R), и при надлежащей ориентации дуг $D_{2|\lambda|}$ и D_R имеем

$$\int\limits_{\Gamma^2_{\varepsilon, R}} (1+z^2)\varphi(z)(\lambda - z)^{-1}dz = \int\limits_{D_{2|\lambda|} \cup D_R} (1+z^2)\varphi(z) \cdot (\lambda - z)^{-1}\,dz.$$

Так как $|\lambda - z|^{-1} \leqslant 2|z|^{-1}$, $(2|\lambda| \leqslant |z| < \infty)$, с учетом (8.3.6) получим $|(1+z^2)\varphi(z)(\lambda - z)^{-1}| \leqslant 2M \cdot |z|^{-1}$ $(2|\lambda| \leqslant |z| < \infty,\ -\theta \leqslant \arg z \leqslant \theta)$, и так как $|D_{2|\lambda|}| \leqslant 4\pi|\lambda|$, $|D_R| \leqslant 2\pi R$, то $\left|\int\limits_{D_{2|\lambda|}} \times (1+z^2)\varphi(z)(\lambda - z)^{-1}dz\right| \leqslant 4\pi M$; $\left|\int\limits_{D_R} (1+z^2)\varphi(z)(\lambda - z)^{-1}dz\right| \leqslant 4\pi M$.

Таким образом,

$$\left| \int\limits_{\Gamma^2_{\varepsilon,\, R}} (1+z^2)\varphi(z)\cdot\frac{1}{\lambda - z}\,dz \right| \leqslant 8\pi M. \tag{8.3.12}$$

Из (8.3.11) и (8.3.12) следует неравенство $\left| \int\limits_{\Gamma_{\varepsilon,\, R}} (1+z^2)\cdot\varphi(z) \times \right.$ $\left. \times \frac{1}{\lambda - z}\,dz \right| \leqslant 4\left(\frac{1}{\sin\theta} + 2\pi\right)M$, т. е. неравенство (8.3.9.) с $A_2 = 4(2\pi + \sin^{-1}\theta)$. Значит, неравенство (8.3.7) выполняется с $C = A\cdot M$, где $A = 4(3\pi + 1/\sin\theta)$. Лемма доказана.

Лемма 2. *Пусть* $S = \{z : 0 < |z| < R,\ -\theta < \arg z < \theta\}$ *— сектор в комплексной z-плоскости,* $\overline{S}$ *— его замыкание (где* $0<\theta<\pi$, $0<R<\infty$*),* G *— область в комплексной z-плоскости. Пусть* $\varphi(z,\ \zeta)$ *— функция переменных* z, ζ, *аналитическая при* $(z,\ \zeta)\in S\times G$ *и непрерывная при* $(z,\ \zeta)\in\overline{S}\times G$; $w(z)$ *— функция класса* $(\boldsymbol{R})$. *Пусть* $\Gamma = \{z : 0 \leqslant |z| \leqslant R,\ \arg z = \pm\theta\}$ *— контур, ориентированный «снизу вверх»,* $\Gamma_\varepsilon = \Gamma \cap \{z : |z| \geqslant \varepsilon\}$.

Тогда при любом $\zeta\in G$ существует в смысле главного значения (и притом сходится равномерно на каждом компакте в G) интеграл

$$\int\limits_{\Gamma}{}' \varphi(z,\ \zeta) w(z)\,dz \overset{\text{def}}{=} \lim_{\varepsilon\to+0} \int\limits_{\Gamma_\varepsilon} \varphi(z,\ \zeta) w(z)\,dz,$$

и этот интеграл является аналитической функцией переменного $\zeta\in G$.

Доказательство. Воспользуемся представлением (I_R) функции $w(z)$. Достаточно доказать существование и аналитичность по ζ для $\zeta\in G$ предела при $\varepsilon\to+0$ интеграла

$$I_\varepsilon(\zeta) = \int\limits_{\Gamma_\varepsilon} \varphi(z,\ \zeta)\cdot\left(\int\limits_{-\infty}^{\infty}\left(\frac{1}{\lambda - z} - \frac{\lambda}{1+\lambda^2}\right)d\sigma(\lambda)\right)dz,$$

где $d\sigma(\lambda)$ — мера из представления (I_R) (и значит, удовлетворяющая условию (r_2)). Для каждого $\varepsilon > 0$ интеграл $I_\varepsilon(\zeta)$ является аналитической функцией ζ при $\zeta\in G$. Если мы покажем, что для любого $\zeta\in G$ существует $\lim\limits_{\varepsilon\to+0} I_\varepsilon(\zeta)$ и что семейство функций $I_\varepsilon(\zeta)$ ограничено для ζ из каждого фиксированного компакта области G величиной, не зависящей от ε, то равномерность по ζ предела, и значит, аналитичность подынтегральной функции будут следовать из теоремы Витали. Меняя порядок интегрирования, получаем

$$I_\varepsilon(\zeta) = \int\limits_{-\infty}^{\infty} d\sigma(\lambda)\cdot\left(\int\limits_{\Gamma_\varepsilon}\varphi(z,\ \zeta)\cdot\left(\frac{1}{\lambda - z} - \frac{\lambda}{1+\lambda^2}\right)dz\right).$$

Внутренний интеграл — интеграл по Γ_ε — оценивается с помощью леммы 1. Существование предела этого интеграла при $\varepsilon \to +0$ для каждых фиксированных λ, $\zeta : \lambda \in (-\infty, \infty)$, $\zeta \in G$, очевидно; существование же предела I_ε получается ссылкой на теорему Лебега о мажорированном предельном переходе под интегралом. Лемма 2 доказана.

4°. Доказательство теоремы D_W. Пусть выполняется асимптотическое соотношение $w_L(z) = 0(e^{\varepsilon |z|})$ **(8.4.1)**, $(|z| \to \infty$; $\arg z = \pm\theta$; $\varepsilon > 0$ — произвольно фиксировано), где

$$w_L(z) = e^{Lz} w(z) + V(z). \tag{8.4.2}$$

Пусть Γ — контур, образованный лучами $\arg z = \theta$ и $\arg z = -\theta$, ориентированный «снизу вверх».

Пусть ζ лежит в угле $\{\zeta : |\arg \zeta - \pi| < \pi/2 - \theta$. Рассмотрим функцию $G(\zeta)$, определяемую интегралом по контуру Γ:

$$G(\zeta) = \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{\Gamma} w_L(z) \cdot e^{\zeta z} dz. \tag{8.4.3}$$

Интеграл по Γ здесь может иметь смысл только как несобственный, так как функция $w_L(z) \cdot e^{\zeta z}$ аналитична лишь в открытых полуплоскостях $\operatorname{Im} z > 0$ и $\operatorname{Im} z < 0$, а контур Γ выходит на границу области аналитичности как при $z \to 0$, так и при $z \to \infty$; поэтому необходимо придать точный смысл интегралу в (8.4.3) справа.

Разобъем контур интегрирования Γ на две части: $\Gamma = \Gamma^\circ \cup \cup \Gamma^\infty$, где $\Gamma^\circ = \Gamma \cap \{z : |z| \leqslant 1\}$, $\Gamma^\infty = \Gamma \cap \{z : |z| \geqslant 1\}$; ориентация контура Γ индуцирует ориентацию на Γ^0 и Γ^∞. Интеграл по Γ в (8.4.3) по определению будем считать равным сумме интегралов по Γ^0 и Γ^∞; существование и свойства этих интегралов мы сейчас обсудим. Пусть

$$G^\infty(\zeta) = \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{\Gamma^\infty} w_L(z) \cdot e^{\zeta z} dz \quad (|\arg \zeta - \pi| < \pi/2 - \theta). \tag{8.4.4}$$

Для $z \in \Gamma$ имеем $\operatorname{Re} z\zeta = |z| \cdot |\zeta| \cdot \cos(\pm\theta + \arg z)$, и значит, $\operatorname{Re} \zeta z \leqslant -|\zeta| \cdot |z| \cdot \cos\delta$ $(z \in \Gamma)$, $|\arg \zeta - \pi| < \pi/2 - \theta - \delta)$, где $0 < \delta < \pi/2 - \theta)$ **(8.4.5)**. Из (8.4.1) и (8.4.5) следует, что интеграл по Γ в (8.4.4) сходится абсолютно и равномерно по ζ, когда ζ изменяется на любом фиксированном компакте, лежащем в угле $\{\zeta : |\arg \zeta - \pi| < \pi/2 - \theta\}$, и этот интеграл определяет функцию $G^\infty(\zeta)$, аналитическую в этом угле. Пусть

$$G^0(\zeta) = \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{\Gamma^0} w_L(z) \cdot e^{\zeta z} dz. \tag{8.4.6}$$

Интеграл в (8.4.4.) сходится абсолютно из-за быстрого убывания подынтегральной функции; интеграл же в (8.4.6) существует (вообще говоря, лишь в смысле главного значения) благодаря специальной структуре подынтегрального выражения, сингулярности которого сосредоточены в члене $w(z)$, являющемся функцией класса ($\boldsymbol{R}$). Действительно, подынтегральное выражение в (8.4.6) имеет вид

$$w_L(z)\cdot e^{\zeta z} = e^{\zeta z}\cdot e^{Lz}w(z) + e^{\zeta z}V(z), \tag{8.4.7}$$

где $w(z)$ — функция класса ($\boldsymbol{R}$), $V(z)$ — целая функция переменного z. Интеграл

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{\Gamma_0}' e^{\zeta z}\cdot e^{Lz}w(z)\,dz \tag{8.4.8}$$

существует, согласно лемме 2, благодаря принадлежности функции $w(z)$ классу ($\boldsymbol{R}$); он является целой функцией переменного ζ. Существование же и целость по ζ интеграла по Γ° от $\exp\{\zeta z\}\cdot V(z)$ сомнений не вызывают.

Таким образом, функция $G(\zeta) = G^\circ(\zeta) + G^\infty(\zeta)$ является функцией, аналитической по ζ, когда ζ изменяется в угле $\{\zeta: |\arg\zeta - \pi| < \pi/2 - \theta\}$. Функция $V(z)$, по условиям теоремы, допускает при некотором A, $A < \infty$, оценку $V(z) = O(e^{A|z|})$ ($|z|\to\infty$). Поэтому при $\zeta\in(-\infty, -L_1)$, где $L_1 = A/\cos\theta$, функция $\exp\{\zeta z\}\cdot V(z)$ быстро убывает по z в угле $\{z: |\arg z|\leqslant\theta\}$, и вследствие аналитичности подынтегральной функции «внутри» контура Γ имеем

$$\frac{1}{2\pi i}\int e^{\zeta z}V(z)dz = 0 \ \ (\zeta\in(-\infty, -L_1). \tag{8.4.9}$$

Пусть теперь $\zeta\in(-\infty, -L)$. Согласно теореме о перестановке порядка интегрирования в сингулярном интеграле, примененной к функции $\varphi(z) = e^{\zeta z}\cdot e^{Lz}$ в угле $\{z: |\arg z|\leqslant\theta\}$, имеем

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{\Gamma} e^{\zeta z}\cdot e^{Lz}w(z)dz = \frac{\theta}{\pi}\sigma_0 + \int_{+0}^{+\infty} e^{\zeta\lambda}\cdot e^{L\lambda}d\sigma(\lambda). \tag{8.4.10}$$

Рассмотрим функцию $F(\zeta) = \int_{+0}^{+\infty} e^{\zeta\lambda}d\rho(\lambda)$ — преобразование Фурье — Стилтьеса неотрицательной меры $d\rho(\lambda) = e^{L\lambda}d\sigma(\lambda)$. Так как $\int_{+0}^{\infty} e^{-(L+\varepsilon)\lambda}d\rho(\lambda) < \infty$, то функция $F(\zeta)$ аналитична в полуплоскости $\{\zeta: \operatorname{Re}\zeta < -L\}$. Сравнивая (8.4.2), (8.4.3), (8.4.9) и (8.4.10), убеждаемся в том, что функция $F(\zeta)$ связана с функцией $G(\zeta)$, аналитической в угле $\{\zeta: |\arg\zeta - \pi| < \pi/2 - \theta\}$, соотношением $F(\zeta) = G(\zeta) - \sigma_0\theta/\pi$, ($\zeta\in(-\infty, -L_2)$ где $L_2 = \max(L, L_1)$.

Таким образом, функция $F(\zeta)$ аналитически продолжается из полуплоскости $\{\zeta: \operatorname{Re}\zeta < -L)$ в некоторую область, содержащую эту полуплоскость и отрицательную полуось. Воспользуемся теперь основной леммой об убывании меры из пункта 2° этого параграфа. По этой лемме (примененной при $E=(+0, +\infty)$, $p(\lambda)=\lambda$), для меры $d\rho(\lambda)$ выполняется условие $\int\limits_{+0}^{\infty} e^{-\varepsilon\lambda}d\rho(\lambda)<\infty$ $(\forall\varepsilon>0)$, что для меры $d\sigma(\lambda)$ означает условие $\int\limits_{+0}^{\infty} e^{t\lambda}d\sigma(\lambda) < \infty$ $(\forall t : t<L)$ $(\boldsymbol{D}^{+}_{1,\,L})$. Теорема D_{W} доказана.

5°. Доказательство теоремы D_K. Случаи $u_L(z)=\cos L\times\sqrt{z}$ и $u_L(z)=(\sin L\sqrt{z})/\sqrt{z}$ рассматриваются аналогично. Пусть выполняется асимптотическое соотношение $w_L(z)=O(e^{\varepsilon\sqrt{|z|}})$ **(8.5.1)** $(|z|\to\infty,\ \arg z=\pm\pi/2;\ \varepsilon>0$ — любое фиксированное), где $w_L(z)=u_L(z)w(z)+V(z)$ **(8.5.2)**. Будем понимать под $\sqrt{z}$ ту из ветвей квадратного корня в комплексной плоскости с разрезом по положительной полуоси, которая принимает положительные значения на верхнем берегу разреза. Пусть Γ — мнимая ось, ориентированная «сверху вниз». Для ζ, лежащих в угле $\{\zeta:|\arg\times\times\zeta-\pi|<\pi/4\}$, рассмотрим функцию $G(\zeta)$, определяемую интегралом

$$G(\zeta)=\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\Gamma}' w_L(z)\cdot e^{-i\zeta\sqrt{z}}\,dz, \qquad (8.5.3)$$

где, как и в п°. 4, $\Gamma=\Gamma^0\cup\Gamma^\infty$, $\Gamma^0=\Gamma\cap\{z:|z|\leqslant 1\}$, $\Gamma^\infty=\Gamma\cap\{z:|z|\geqslant 1\}$, $G(\zeta)=G^0(\zeta)+G^\infty(\zeta)$.

$$G^0(\zeta)=\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\Gamma^0}' w_L(z)\cdot e^{-i\zeta\sqrt{z}}\,dz; \qquad (8.5.4$$

$$G^\infty(\zeta)=\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\Gamma^\infty} w_L(z)\,e^{-i\zeta\sqrt{z}}\,dz. \qquad (8.5.5)$$

Так как $\arg\sqrt{z}=\pi/2\pm\pi/4\ (z\in\Gamma)$, то $\operatorname{Re}(-i\zeta\sqrt{z})=|\zeta|\cdot|z|\cdot\cos\times\times(\arg\zeta\pm\pi/4)\ (z\in\Gamma)$. Из (8.5.1) следует, что интеграл в (8.5.5) справа сходится абсолютно и равномерно по ζ, когда ζ изменяется на любом фиксированном компакте внутри угла $\{\zeta:|\arg\times\times\zeta-\pi|<\pi/4\}$. Значит, функция $G^\infty(\zeta)$ аналитична в этом угле. Как и в п°. 4, используя лемму 2 п°. 3, убеждаемся в том, что интеграл в (8.5.4) справа сходится (в смысле главного значения) равномерно на любом фиксированном компакте комплексной ζ-плоскости, и значит, определяет целую функцию $G^0(\zeta)$. Таким образом, функция $G(\zeta)$ аналитична в угле $\{\zeta:|\arg\zeta-\pi|<\pi/4\}$.

Функция $V(z)$ по условию теоремы допускает при некотором A, $A<\infty$, оценку $V(z)=O(e^{A\sqrt{|z|}})$. Поэтому при $\zeta\in(-\infty,$

$-L_1$), где $L_1 = A\sqrt{2}$, функция $\exp\{-i\zeta\sqrt{z}\}V(z)$ быстро убывает в полуплоскости $\{z: \mathrm{Re}\, z \leqslant 0\}$ (ограниченной контуром Г), и вследствие аналитичности подынтегральной функции в этой полуплоскости имеем

$$\frac{1}{2\pi i}\int_\Gamma V(z)\cdot e^{-i\zeta\sqrt{z}}V(z)\,dz = 0 \quad (-\infty < \zeta < -L_1) \qquad (8.5.6)$$

Пусть теперь $\zeta \in (-\infty, \ -L)$ — фиксировано. Функция $u_L(z) \times \times e^{-i\zeta\sqrt{z}}$ убывает в полуплоскости $\{z: \mathrm{Re}\, z < 0\}: |u_L(z)\cdot e^{-i\zeta\sqrt{z}}| \leqslant \leqslant e^{(-|\zeta|+L)\sin\pi/4\cdot\sqrt{|z|}}$ $(\zeta \in (-\infty, \ -L); \ \mathrm{Re}\, z \leqslant 0)$, и согласно теореме о перестановке порядка интегрирования в сингулярном интеграле, примененной к функции $\varphi(z) = e^{-i\zeta\sqrt{z}}\,u_L(z)$, рассматриваемой в угле $\{z: \pi/2 < \arg z < 3\pi/2\}$, имеем

$$\frac{1}{2\pi i}\int_\Gamma' e^{-i\zeta\sqrt{z}}\cdot u_L(z)\,w(z)\,dz = \frac{\sigma_0}{2}u_L(0) + \int_{-\infty}^{-0} e^{\zeta\sqrt{|\lambda|}}u_L(\lambda)\,d\sigma(\lambda), \quad (\zeta \in \in (-\infty, \ -L)). \qquad (8.5.7)$$

Сравнивая выражения (8.5.2), (8.5.6) и (8.5.7), получим, что

$$\frac{1}{2\pi i}\int_\Gamma' w_L(z)\cdot e^{-i\zeta\sqrt{z}}\,dz = \frac{\sigma_0}{2}u_L(0) + \int_{-\infty}^{-0} e^{\zeta\sqrt{|\lambda|}}u_L(\lambda)\,d\sigma(\lambda) \ (\zeta \in (-\infty, \ -L_2)), \qquad (8.5.8)$$

где $L_2 = \max(L, \ L_1)$.

Рассмотрим функцию $F(\zeta)$, определяемую интегралом

$$F(\zeta) = \int_{-\infty}^{-0} e^{\zeta\sqrt{|\lambda|}}u_L(\lambda)\,d\sigma(\lambda). \qquad (8.5.9)$$

Так как мера $d\sigma(\lambda)$ удовлетворяет условию (r_2), то интеграл в (8.5.9) слева сходится равномерно на каждом компакте в полуплоскости $\{\zeta: \mathrm{Re}\,\zeta < -L\}$, и значит, функция аналитична в этой полуплоскости. Из (8.5.3), (8.5.8) и (8.5.9) следует, что $F(\zeta) = G(\zeta) + \frac{\sigma_0}{2}u_L(0)$, $(\zeta \in (-\infty, \ L_2))$, и значит, функция $F(\zeta)$ аналитически продолжается из полуплоскости $\{\zeta: \mathrm{Re}\,\zeta < -L\}$ в некоторую область, содержащую эту полуплоскость и отрицательную полуось. Согласно основной лемме об убывании меры (см. n° 2 этого параграфа), примененной при $E = (-\infty, \ 0)$, $p(\lambda) = \sqrt{|\lambda|}$, $d\rho(\lambda) = u_L(\lambda)\,d\sigma(\lambda)$, выполняется условие $\int_{-\infty}^{-0} \times \times e^{-\varepsilon\sqrt{|\lambda|}}u_L(\lambda)\,d\sigma(\lambda) < \infty$ $(\forall\varepsilon > 0)$, равносильное условию $(D_{(1/2,\ L)})$. Теорема D_K доказана.

6°. Доказательство теоремы D_H. Пусть для функции $w(z)$ класса $(\boldsymbol{R})$ выполняется асимптотическое соотношение $w_L(z) = O(1)$, $(|z| \to \infty,\ \arg z = \pm \pi/2)$ **(8.6.1)**, где $w_L(z) = U(z) \times \times w(z) + V(z)$, $U(z)$, $V(z)$ — полиномы, причем U — вещественный, $\deg U = L + 1$. (Здесь deg — степень полинома). Мы покажем, что для меры $d\sigma(\lambda)$, участвующей в представлении (I_R) функции $w(z)$, выполняются условия $\int\limits_{-\infty}^{0} (1 + |\lambda|)^t d\sigma(\lambda) <$

$$< \infty\ (\forall t : t < L),\ (d_L^-) \int\limits_0^\infty (1 + |\lambda|)^t d\sigma(\lambda) < \infty\ (\forall t : t < L)\ (d_L^+).$$

Ограничимся доказательством выполнения одного из этих условий, для определенности (d_L^+). Умножая, если нужно, U на -1, можем считать, что $U(\lambda) \geqslant 0$ при $\lambda \in (\lambda_0, \infty)$.

Пусть Γ — мнимая ось, ориентированная «снизу вверх»; мы будем рассматривать Γ как границу полуплоскости $\{z : \operatorname{Re} z > 0\}$. Будем понимать под $\ln(1 + z)$ ту ветвь логарифма в этой полуплоскости, которая положительна на положительной полуоси. Для ζ, лежащих в полуплоскости $\{\zeta : \operatorname{Re} \zeta < 0\}$, рассмотрим функцию

$$G(\zeta) = \frac{1}{2\pi i} \int\limits_\Gamma{}' w_L(z)(1 + z)^{-1} \cdot e^{\zeta \ln(1+z)} dz. \tag{8.6.2}$$

Из (8.6.1) и леммы 2 п°. 3 следует, что интеграл в (8.6.2) сходится равномерно по ζ на каждом компакте в полуплоскости $\{\zeta : \operatorname{Re} \zeta < 0\}$. (При $|z| \to \infty$ сходимость абсолютная, при $|z| \to 0$ — в смысле главного значения), и значит, функция $G(\zeta)$ аналитична в этой полуплоскости.

При $-\infty < \zeta < -\deg V$ имеем

$$\frac{1}{2\pi i} \int\limits_\Gamma V(z)(1 + z)^{-1} \cdot e^{\zeta \ln(1+z)} dz = 0 \tag{8.6.3}$$

(при таких ζ интеграл в (8.6.3) сходится абсолютно). Согласно теореме о перестановке по ядка интегрирования в сингулярном интеграле, имеем

$$\frac{1}{2\pi i} \int\limits_\Gamma w(z) U(z) \cdot (1 + z)^{-1} \cdot e^{\zeta \ln(1+z)} dz = \int\limits_0^\infty e^{\zeta \ln(1+\lambda)} U(\lambda)(1 + \lambda)^{-1} \times$$
$$\times d\sigma(\lambda) + \frac{1}{2} \sigma_0 U(0)\ (-\infty < \zeta < -(\deg U + 1)). \tag{8.6.4}$$

Рассмотрим функцию

$$F(\zeta) = \int\limits_{\lambda_0}^\infty e^{\zeta \cdot \ln(1+\lambda)} U(\lambda)(1 + \lambda)^{-1} d\sigma(\lambda) \tag{8.6.5}$$

(напомним, что λ_0 таково, что $U(\lambda) \geqslant 0$ при $\lambda \geqslant \lambda_0$). Так как мера $d\sigma(\lambda)$ удовлетворяет условию (r_2), а $\deg U = L+1$, то интеграл в (8.6.5) справа сходится равномерно в полуплоскости $\{\zeta : \operatorname{Re} \zeta \leqslant -(L+2)\}$, и значит, функция $F(\zeta)$ аналитична в этой полуплоскости. Из (8.6.2) — (8.6.4) следует, что при $-\infty < \zeta < -\zeta_0$, где $\zeta_0 = \max(\deg V, \deg U + 1)$, функция $F(\zeta)$ совпадает с функцией $G(\zeta) - F_0(\zeta)$, где $F_0(\zeta)$ — некоторая целая функция переменного ζ. Так как функция $G(\zeta)$ аналитична в полуплоскости $\{\zeta : \operatorname{Re} \zeta < 0\}$, то функция $F(\zeta)$ аналитически продолжается в полуплоскость $\{\zeta : \operatorname{Re} \zeta < 0\}$. Согласно основной лемме об убывании меры (примененной при $E = (\lambda_0, \infty)$, $p(\lambda) = \ln(1+\lambda)$, $d\rho(\lambda) = U(\lambda) \cdot (1+\lambda)^{-1} d\sigma(\lambda)$, выполняется условие $\int\limits_{\lambda_0}^{\infty} e^{-\varepsilon \ln(1+\lambda)} \times U(\lambda) \cdot (1+\lambda)^{-1} d\sigma(\lambda) < \infty$ $(\forall \varepsilon > 0)$, равносильное условию (d_L^+). Теорема D_H доказана.

Список литературы: 1. *Кацнельсон В. Э.* Контитуальные аналоги теоремы Гамбургера-Неванлинны и основные матричные неравенства классических задач. I. — Теория функций, функцион. анализ и их прил., 1981, вып. 36, с. 31. 2. *Кацнельсон В. Э.* Континуальные аналоги теоремы Гамбургера-Неванлинны и основные матричные неравенства классических задач. II. — Теория функций, функцион. анализ и их прил., 1982, вып. 37, с. 31—48. 3. *Маркушевич А. И.* Теория аналитических функций, т. 1. — М.: Наука, 1967. — 486 с. 4. *Райков Д. А.* О разложении законов Гаусса и Пуассона. — Изв. АН СССР. Сер. мат., 1938, 2, № 2, с. 91—124.

Поступила в редколлегию 26. 01. 81.