УДК 517.53

Е. В. ГЛЕЙЗЕР, Я. И. САВЧУК

О ПОКРЫТИЯХ ПЛОСКИХ МНОЖЕСТВ

Во многих задачах, в которых изучается асимптотическое поведение функций, естественным образом возникают различные исключительные множества, разреженность которых характеризуется с помощью так называемых плотностей. В теории целых функций постоянно используются плоские множества нулевой линейной плотности (C_0-множества), а также множества с малой верхней линейной плотностью [1].

В работах [2—6] широко используются верхние γ-плотности плоских множеств. Несмотря на несомненную важность этих понятий, свойства γ-плотностей, насколько нам известно, сами по себе не изучались (исключение составляет работа [7]). Здесь доказываются некоторые теоремы о свойствах верхних γ-плотностей. Отметим, что несмотря на элементарность постановки задач, они могут оказаться довольно сложными, так, до сих пор не найдено точное значение верхней 2-плотности для $\mathbb{R}^2$. В статье рассматриваются множества из $\mathbb{R}^2$, но обобщение на случай $\mathbb{R}^m$ не связано с принципиальными трудностями.

Пусть на плоскости имеется некоторое множество E, $K(r_n, z_n)=\{z: |z-z_n| \leqslant r_n\}$. Образуем покрытие множества E кругами $C=\bigcup\limits_{n=1}^{\infty} K(r_n, z_n)$. Рассмотрим величину $D(\gamma, E, C, a)=\overline{\lim\limits_{R\to\infty}} R^{-\gamma} \times \times \sum\limits_{|z_n-a|<R} r_n^\gamma$, $0<\gamma\leqslant 2$. Легко показать, что величина $D(\gamma, E, C, a)$ не зависит от a, поэтому далее будем писать просто $D(\gamma, E, C)$. Через $\sum_R$ обозначим суммирование по всем n, таким, что $|z_n|\leqslant R$. Верхней γ-плотностью множества называется величина $d(\gamma, E)=\inf\{D(\gamma, E, C).\ C\supset E\}$.

Установим некоторые закономерности для $d(\gamma, E)$ как функции от E и γ.

Легко видеть, что $d(\gamma, E)$ монотонна как функция от E, т. е., если $E_1\subset E_2$, то $d(\gamma, E_1)\leqslant d(\gamma, E_2)$. Кроме того, $d(\gamma, E)$ обладает свойством конечной субаддитивности, т. е. $\sum\limits_{j=1}^{m} d(\gamma, E_j)\geqslant \geqslant d(\gamma, \bigcup\limits_{j=1}^{m} E_j)$. Свойством счетной субаддитивности $d(\gamma, E)$ не обладает (достаточно E с $d(\gamma, E)>0$ представить в виде $E= =\bigcup\limits_{j=1}^{\infty} E_j$, где E_j — ограниченные множества). В конце статьи будет приведен пример, показывающий, что $d(\gamma, E)$ не обладает свойством сильной субаддитивности.

Займемся изучением свойств $d(\gamma, E)$ как функции от γ.

Далее, где это не вызовет недоразумений, будем писать $d(\gamma, E) = d(\gamma)$, $D(\gamma, E, C) = D(\gamma)$.

Теорема 1. *Для любого множества* $E \subset \boldsymbol{R}^2$ *функция* $d(\gamma)$ *невозрастающая при* $0 < \gamma \leqslant 2$, *причем* $0 \leqslant d(\gamma) \leqslant 1$.

Для того, чтобы доказать второе утверждение теоремы, очевидно, достаточно показать, что $d(\gamma, \boldsymbol{R}^2) \leqslant 1$. Зададим покрытие $C = \bigcup\limits_{n=0}^{\infty} K_n$, где $K_n = K((n!)^{1/\gamma}, (n! + 1)^{1/\gamma} \exp(0{,}5\pi n i))$, при $n \geqslant 1$, $K_0 = K(2, 0)$. Легко проверить, что $D(\gamma, \boldsymbol{R}^2, C) = 1$. Таким образом, $d(\gamma, E) \leqslant 1$, причем infimum достаточно брать по тем C, для которых $r_n < |z_n|$, $n \geqslant n_0$ (если для покрытия C' неравенство $r_n < |z_n|$ не выполняется при всех $n \geqslant n_0$, то, очевидно, $D(\gamma, E, C') \geqslant 1$). А для таких покрытий C невозрастание функции $D(\gamma, E, C)$ при $0 < \gamma \leqslant 2$ очевидно. Отсюда сразу следует первое утверждение теоремы.

Далее будем рассматривать только покрытия, для которых $r_n < |z_n|$ при $n \geqslant n_0$. Пусть задано покрытие C множества E. Определим величину $\delta = \varlimsup\limits_{R \to \infty} \max\{r_n/R : |z_n| \leqslant R\}$. Очевидно, что $\delta \leqslant D^{1/\gamma}(\gamma)$.

Теорема 2. *Пусть* $D(\gamma_0) \neq 0$. *Тогда для* $\gamma > \gamma_0$ *функции* $D^{1/\gamma}(\gamma)$ *и* $D(\gamma) D^{-\gamma/\gamma_0}(\gamma_0)$ *не возрастают.*

Пусть $\gamma_0 < \gamma_1 < \gamma_2$. Запишем $D(\gamma_2) = \varlimsup\limits_{R \to \infty} R^{-\gamma_1} \sum_R \{r_n^{\gamma_1} \times (r_n/R)^{\gamma_2 - \gamma_1}\} \leqslant D(\gamma_1) \delta^{\gamma_2 - \gamma_1}$. Подставив сюда $\delta \leqslant D^{1/\gamma_1}(\gamma_1)$, получим $D^{1/\gamma_2}(\gamma_2) \leqslant D^{1/\gamma_1}(\gamma_1)$, а записав $\delta \leqslant D^{1/\gamma_0}(\gamma_0)$, получим $D(\gamma_2) \times D^{-\gamma_2/\gamma_0}(\gamma_0) \leqslant D(\gamma_1) D^{-\gamma_1/\gamma_0}(\gamma_0)$.

Теорема 3. $D(\gamma)$ — *выпуклая функция на* $]0; 2]$.

Пусть $0 < \Delta\gamma < \gamma \leqslant 2 - \Delta\gamma$. *Тогда* $D(\gamma + \Delta\gamma) + D(\gamma - \Delta\gamma) \geqslant \varlimsup\limits_{R \to \infty} R^{-\gamma} \sum_R \{r_n^{\gamma}((r_n/R)^{\Delta\gamma} + (R/r_n)^{\Delta\gamma})\} \geqslant 2D(\gamma)$.

Теорема 4. $D(\gamma)$ *может иметь только одну точку разрыва* $\gamma_0 = \inf\{\gamma : D(\gamma) < \infty\}$. *Величина* $D(\gamma) > 0$ *на* $]\gamma_0; 2]$ *тогда и только тогда, когда* $\delta > 0$. *Если* $\delta = 0$, *то* $D(\gamma) = 0$ *при* $\gamma > \gamma_0$.

Из теоремы 3 и невозрастания $D(\gamma)$ вытекает первое утверждение теоремы. Если $\delta > 0$, то $D(\gamma) > 0$ для всех $\gamma \in]0; 2]$. Пусть $\delta = 0$. Предположим, что существует точка $\gamma_1 < 2$, для которой $D(\gamma_1) \neq 0, \infty$. Тогда, взяв $\gamma > \gamma_1$, получим $D(\gamma) = \varlimsup\limits_{R \to \infty} R^{-\gamma_1} \sum_R \times \{r_n^{\gamma_1}(r_n/R)^{\gamma - \gamma_1}\} \leqslant D(\gamma_1) \delta^{\gamma - \gamma_1} = 0$. В точке γ_1 функция $D(\gamma)$ терпит разрыв, поэтому $\gamma_1 = \gamma_0$. Если такой точки γ_1 не существует, то очевидно, что $D(\gamma) = 0$ при $\gamma > \gamma_0$.

В отличие от $D(\gamma)$ всегда $d(\gamma) \leqslant 1$, тем не менее $d(\gamma)$ может иметь разрыв, например, если E — прямая линия, то $d(\gamma, E) = 1$ при $0 < \gamma \leqslant 1$ и $d(\gamma, E) = 0$ при $1 < \gamma \leqslant 2$. Более того, справедлива следующая

Теорема 5. *Пусть заданы* $\alpha > 0$ *и последовательность* $l = (\gamma_n)$ *такая, что* $\gamma_n \geqslant \alpha$ *для всех* n. *Тогда существует такое множество* E_l, *что функция* $d(\gamma, E_l)$ *терпит разрыв в точках* γ_n.

Лемма 1. *Пусть* $\xi \in]0; 2]$. *Тогда найдется множество* E_ξ *такое, что функция* $d(\gamma, E_\xi)$ *разрывна в точке* ξ.

Доказательство леммы 1. Рассмотрим множество

$$E_\xi = \bigcup_{n=1}^{\infty} \bigcup_{k=1}^{2n-1} K(r_0, z_{n,k}) = \bigcup_{n=1}^{\infty} \bigcup_{k=1}^{2n-1} K(r_0, R_n \exp(2\pi k i/(2n-1))),$$

где $r_0 < 0{,}5$ и $R_n = n^{2/\xi}$. Покажем, что для всех $\gamma \in]\xi; 2]$ выполняется $d(\gamma, E_\xi) = 0$, но $d(\xi, E_\xi) > 0$. Рассмотрим покрытие $C = E_\xi$. Очевидно, есть n^2 кругов покрытия C с центрами в круге $K(R_n, 0)$. Возьмем произвольное R так, что $R_n \leqslant R \leqslant R_{n+1}$. Тогда $R^{-\gamma} \sum_R r_0^\gamma = R^{-\gamma} \sum_{R_n} r_0^\gamma \leqslant R_n^{-\gamma} \cdot n^2 \cdot r_0^\gamma = r_0^\gamma n^{2(1-\gamma/\xi)}$ и, переходя к пределу, получим $d(\gamma, E_\xi) = 0$ при $\gamma > \xi$. Докажем, что $d(\xi, E_\xi) > 0$. Пусть $K = K(r, z)$, где $r_0 \leqslant r < |z|$. Оценим количество $N(K)$ кругов множества E_ξ, пересекающихся с K. Обозначим $\zeta = r/|z|$. Если $\zeta \geqslant 0{,}5$, то

$$N(K) \leqslant N(K(2|z|, 0)) \leqslant [(2r/\zeta)^{\xi/2}]^2 \leqslant 16 r^\xi \tag{1}$$

($[x]$ обозначает целую часть x). Пусть теперь $\zeta < 0{,}5$. Обозначим через 2φ угол, под которым из начала координат виден круг K. Ясно, что $2\varphi \leqslant 2\operatorname{tg}\varphi = 2\zeta/\sqrt{1-\zeta^2} < 3\zeta$. Обозначим также $\mathcal{P} = (|z|-r)^{\xi/2}$, $Q = (|z|+r)^{\xi/2}$. Буквами A с индексами будем обозначать различные постоянные, зависящие только от ξ. Рассмотрим множество $V = \{w : |\arg z - \arg w| \leqslant \varphi;\ R_p \leqslant |w| \leqslant R_{q+1}\}$, где $p = [\mathcal{P}]$ и $q = [Q]$. Очевидно, $K \subset V$, поэтому $N(K) \leqslant N(V)$. Возьмем целое j так, чтобы выполнялось $p \leqslant j \leqslant q+1$. В силу того, что на окружности $\{z : |z| = R_j\}$ центры $z_{j,k}$ $(1 \leqslant k \leqslant 2j-1)$ размещаются равномерно, количество кругов из E_ξ с центрами на этой окружности и пересекающихся с V не будет превышать величины $(2j-1)3\zeta/(2\pi) + 1$. Ясно, что $q \leqslant Q$, $\mathcal{P} - 1 < p \leqslant \mathcal{P}$, и можно записать: $N(K) \leqslant N(V) \leqslant \sum_{j=p}^{q+1} \times ((2\pi)^{-1} 3\zeta(2j-1) + 1) = (2\pi)^{-1} 3\zeta (q^2 - p^2 + 2(q+p)) + q - p + 2 \leqslant (2\pi)^{-1} 3\zeta (Q^2 - (\mathcal{P}-1)^2 + 2(Q+\mathcal{P})) + Q - (\mathcal{P}-1) + 2 = (2\pi)^{-1} 3\zeta ((|z|+r)^\xi - (|z|-r)^\xi) + (|z|+r)^{\xi/2}(\pi^{-1}3\zeta + 1) + (|z|-r)^{\xi/2}(\pi^{-1}6\zeta - 1) + 3 \leqslant (2\pi)^{-1} 3\zeta (r/\zeta)^\xi ((1+\zeta)^2 - (1-\zeta)^2) + (r/\zeta)^{\xi/2}((\pi^{-1}3\zeta + 1)(1+\zeta) + (\pi^{-1}6\zeta - 1)(1-\zeta)) + 3 \leqslant 6\pi^{-1}\zeta^{2-\xi} r^\xi + \zeta^{1-\xi/2} r^{\xi/2}(3\pi^{-1}(3-\zeta) + 2) + 3$. Разделив на r^ξ и, учитывая то, что $r \geqslant r_0$, $< 0{,}5$, придем к неравенству $r^{-\xi} N \times (K) \leqslant A_1 r_0^{-\xi}$ **(2)**. Возьмем теперь произвольное покрытие $C =$

$= \bigcup\limits_{j=1}^{\infty} K(r_j, z_j) \supset E_\xi$. Покажем, что существует такое $A_2 > 0$, что

$$D(\xi, E_\xi, C) \geqslant A_2 r_0^\xi. \tag{3}$$

Если $\delta \geqslant 1/3$, то $D(\xi, E_\xi, C) \geqslant 3^{-\xi}$ и (3) выполняется. Пусть теперь $\delta < 1/3$. Возьмем $R = 1{,}5R_n$, тогда круги из E_ξ^1, лежащие внутри $K(R_n, 0)$, полностью покрываются кругами $K(r_j, z_j)$ с $|z_j| \leqslant R$ (для всех, достаточно больших n). Разобьем сумму $\sum_R r_j^\xi$ на два слагаемых: в первое войдут те r_j, для которых $r_j \geqslant r_0$, во второе — те, для которых $r_j < r_0$. Первое слагаемое, в силу (2), не меньше, чем $A_1^{-1} r_0^\xi \sum N(K_j)$. Обозначим через t, количество кругов из E_ξ, не пересекающихся с теми $K(r_j, z_j)$, у которых $r_j \geqslant r_0$. Общая их площадь равна $t\pi r_0^2$. Учитывая то, что $r_j < r_0$, $\xi < 2$, отсюда заключаем, что второе слагаемое не меньше, чем tr_0^ξ. Просуммировав и заметив, что $\sum N(K_j) + t \geqslant n^2$, наконец, получим

$$R^{-\xi} \sum_R r_j^\xi \geqslant (1{,}5R_n)^{-\xi} (A_1^{-1} r_0^\xi \sum N(K_j) + tr_0^\xi) \geqslant A_2 r_0^\xi R_n^{-\xi} n^2 = \\ = A_2 r_0^\xi > 0$$

и значит $d(\xi, E_\xi) > 0$.

Лемма 2. *Для любых положительных чисел* $b < 1$; α, ξ, $0 < \alpha \leqslant \xi < 2$; φ_0, $0 \leqslant \varphi_0 < 2\pi$, *существует множество* E_ξ^b *такое, что* $E_\xi^b \subset \{z : |\arg z - \varphi_0| \leqslant \varphi\}$, *где* $\varphi \leqslant \arcsin(b^{1/\alpha})$, $d(\alpha, E_\xi^b) \leqslant b$; $d(\gamma, E_s^b) = 0$ *при* $\gamma > \xi$, $d(\xi, E_\xi) > 0$.

Доказательство леммы 2. Зададим последовательность $r_n = 2^{n^2}$ и последовательность (z_n) такую, что для всех n выполняется $\arg z_n = \varphi_0$, $r_n/|z_n| = \delta \leqslant b^{1/\alpha}$. Образуем множество $B = \bigcup\limits_{n=1}^{\infty} K(r_n, z_n)$. Пусть теперь $E_\xi^b = E_\xi \cap B$, где E_ξ — множество, построенное в лемме 1. Во-первых, $E_\xi^b \subset B \subset \{z : |\arg z - \varphi_0| \leqslant \arcsin \delta\}$. Во-вторых, $d(\alpha, E_\xi^b) \leqslant d(\alpha, B) \leqslant D(\alpha, B, B) = \overline{\lim\limits_{R\to\infty}} R^{-\alpha} \sum_R r_n^\alpha = \lim\limits_{n\to\infty} |z_n|^{-\alpha} (r_n^\alpha + o(r_n^\alpha)) = \delta^\alpha \leqslant b$. В-третьих, при $\gamma > \xi$, будет $d(\gamma, E_\xi^b) \leqslant d(\gamma, E_\xi) = 0$. Пусть $M = \bigcup\limits_{n=1}^{\infty} \{z : ||z| - |z_n|| \leqslant 0{,}5r_n\}$. Тогда $M \subset \bigcup\limits_{n=1}^{N} M_j$, где M_j получено из E_ξ^b поворотом на некоторый угол вокруг начала координат. Далее, с помощью рассуждений, вполне аналогичных рассуждениям, использованным при доказательстве леммы 1, можно показать, что $d(\xi, M) \geqslant A_3 d(\xi, E_\xi)$, а значит $d(\xi, E_\xi^b) > 0$.

Доказательство теоремы 5. Возьмем из леммы 2 $G_n = E_{\gamma_n}^{b_n}$, где $b_n = 2^{-n} \sin^2(4^{-n}\pi)$, так, что $G_n \subset \{z : 3\pi/4^n \leqslant \arg z \leqslant$

$\leqslant \pi/4^{n-1}\}$. Положим $E_l = \bigcup\limits_{n=1}^{\infty} G_n$. Покажем, что $d(\gamma, E_l) = \sum\limits_{n=1}^{\infty} d(\gamma, G_n)$, $\gamma \geqslant \alpha$ **(4)**. Из построения множеств G_n легко видеть, что

$$\bigcup_{n=j}^{\infty} G_n \subset \{z : 0 \leqslant \arg z \leqslant 4^{-j+1}\pi\} \cap \left(\bigcup_{k=1}^{\infty} \{z : ||z| - 2^{k^2}| \leqslant \leqslant 2^{k^2} \sin(4^{-j}\pi)\}\right),$$

поэтому $d(\gamma, \bigcup\limits_{n=j}^{\infty} G_n) = o(1)$, $j \to \infty$ равномерно относительно $\gamma \in [\alpha, 2]$. Тогда, используя конечную субаддитивность, запишем $d(\gamma, E_l) \leqslant d(\gamma, \bigcup\limits_{n=1}^{j} G_n) + d(\gamma, \bigcup\limits_{n=j}^{\infty} G_n) \leqslant \sum\limits_{n=1}^{j} d(\gamma, G_n) + o(1)$, $j \to \infty$.

Устремляя $j \to \infty$, получаем $d(\gamma, E_l) \leqslant \sum\limits_{n=1}^{\infty} d(\gamma, G_n)$. Предположим, что при некотором фиксированном γ здесь имеет место строгое неравенство. Тогда существует покрытие C и натуральное N такие, что $D(\gamma, \bigcup\limits_{n=1}^{N} G_n, C) \leqslant D(\gamma, E_l, C) < \sum\limits_{n=1}^{N} d(\gamma, G_n) \leqslant \sum\limits_{n=1}^{N} D(\gamma, G_n, C)$ **(5)**. Тут через $D(\gamma, E, C)$ обозначаем величину $D(\gamma, E, C')$, где C' содержит те и только те круги из C, которые пересекаются с E. Обозначим $H_k = \bigcup\limits_{n=k}^{N} G_n$, $1 \leqslant k \leqslant N$. Очевидно, при $1 \leqslant k \leqslant N-1$ выполняется

$$D(\gamma, H_{k+1}, C) + D(\gamma, G_k, C) \geqslant D(\gamma, H_k, C). \tag{6}$$

Если для всех k в (6) будет равенство, то, просуммировав, получим $\sum\limits_{n=1}^{N} D(\gamma, G_n, C) = D(\gamma, H_1, C)$, а это противоречит (5). Пусть k_0 — наименьшее из k, при которых в (6) будет строгое неравенство. Тогда в C существует последовательность кругов $(K_m) = (K(r_m, z_m))$, такая, что каждый круг K_m пересекается и с множеством G_{k_0}, и с множеством H_{k_0+1}. Тогда $r_m/|z_m| \geqslant \geqslant \sin 0{,}5(3\pi 4^{-k_0} - \pi 4^{-k_0}) = \sin(\pi 4^{-k_0}.)$ Отсюда следует, что $D(\gamma, H_{k_0}, C) \geqslant \sin^{\gamma}(\pi 4^{-k_0}) \geqslant \sin^2(\pi 4^{-k_0})$ и, наконец, получаем $D(\gamma, H_1, C) = \sum\limits_{n=1}^{k_0-1} D(\gamma, G_n, C) + D(\gamma, H_{k_0}, C) \geqslant \sum\limits_{n=1}^{k_0-1} D(\gamma, G_n, C) + \sin^2 \times (\pi 4^{-k_0}) \geqslant \sum\limits_{n=1}^{k_0-1} d(\gamma, G_n) + \sum\limits_{n=k_0}^{\infty} 2^{-n} \sin^2(\pi 4^{-n}) \geqslant \sum\limits_{n=1}^{\infty} d(\gamma, G_n)$, а это противоречит (5). Таким образом, (4) доказано. Покажем, что

$d(\gamma, E_l)$ терпит разрыв в точках γ_n. Воспользовавшись (4) и монотонностью $d(\gamma, E_l)$, рассмотрим при $\gamma > \gamma_n$ разность $d(\gamma_n, E_l) - d(\gamma, E_l) = \sum_{j=1}^{\infty} (d(\gamma_n, G_j) - d(\gamma, G_j)) \geqslant d(\gamma_n, G_n) - d(\gamma, G_n) = d(\gamma_n, G_n) > 0$. Значит, $d(\gamma_n, E_l) - d(\gamma_n + 0, E_l) > 0$, что полностью доказывает теорему 5.

В заключение покажем, что $d(\gamma, E)$ как функция от E не обладает свойством сильной субаддитивности. Будут построены такие множества E_1 и E_2, что $d(E_1 \cup E_2) + d(E_1 \cap E_2) > d(E_1) + d(E_2)$, где обозначено $d(E) = d(1, E)$. Рассмотрим вспомогательный

Пример 1. Пусть последовательность положительных чисел $(l_n)_{n=1}^{\infty}$ такова, что $\sum_{k=1}^{n-1} l_k = o(l_n)$, $n \to \infty$. Рассмотрим множество $A_\varkappa = \bigcup_{n=1}^{\infty} I_n = \bigcup_{n=1}^{\infty} \{z : \arg(z - l_n) = \pm \pi/2; \quad |z - l_n| \leqslant \varkappa l_n\}$, где $0 < \varkappa < 1$. Тогда $d(A_\varkappa) \geqslant \varkappa/(1+\varkappa)^2$. Пусть нам задано произвольное покрытие $C = \bigcup_{m=1}^{\infty} K(r_m, z_m)$ множества $A_\varkappa$. Обозначим через R_n минимальный радиус, при котором I_n покрыто кругами из C с центрами, лежащими в $K(R_n, 0)$. Рассмотрим две возможности. Пусть $R_n \leqslant (1+\varkappa) l_n$. Тогда

$$R_n^{-1} \sum\nolimits_{R_n} r_m \geqslant R_n^{-1} \varkappa l_n \geqslant \varkappa (1 + \varkappa) > \varkappa (1 + \varkappa)^2.$$

Пусть $R_n > (1+\varkappa) l_n$. Тогда на окружности $\{z : |z| = R_n\}$ лежит хотя бы один центр z_q круга $K(r_q, z_q)$ такого, что $K(r_q, z_q) \cap I_n \neq \varnothing$ (это следует из определения R_n), и можно записать $R_n^{-1} \sum_{R_n} r_m \geqslant R_n^{-1} r_q \geqslant R_n^{-1} (R_n - \sqrt{1+\varkappa^2} l_n) \geqslant \varkappa/(1+\varkappa)^2$. Итак, для любого C выполняется $D(1, A_\varkappa, C) \geqslant \varkappa/(1+\varkappa)^2$, а значит, $d(A_\varkappa) \geqslant \varkappa/(1+\varkappa)^2$.

Пример 2. Пусть последовательность (l_n) — та же, что и в примере 1. Определим множество $B_\mu = \bigcup_{n=1}^{\infty} J_n = \bigcup_{n=1}^{\infty} \{z : z \overline{\in} \boldsymbol{R}_+; |z - l_n| \leqslant \mu l_n\}$, где $0 < \mu < 1$. Тогда $d(B_\mu) \geqslant \mu/(\mu + 1)$.

Доказательство проводится совершенно аналогично доказательству в примере 1.

Пример 3. Пусть последовательность (l_n) — из примера 1. Определим последовательность $(l_n') = (l_n/\cos\theta)$, где $0 < \theta < \pi/4$. Возьмем множества $E_S = \bigcup_{n=1}^{\infty} K(R_n, l_n' e^{(-1)^S i\theta})$, $s = 1, 2$; где $R_n = l_n' \operatorname{tg} \varphi$, при $0 < \theta < \varphi < \pi/4$.

Взяв $C_S = E_S$, $S = 1, 2$, видим, что $D(1, E_S, C_S) = \operatorname{tg}\varphi$, а значит $d(E_S) \geqslant \operatorname{tg}\varphi$, $S = 1, 2$. Нетрудно увидеть, что $E_1 \cup$

$\cup E_2 \supset A_\varkappa$ при $\varkappa = (\sin\theta + \operatorname{tg}\varphi)/\cos\theta$, а $E_1 \cap E_2 \supset B_\mu$ при $\mu = \sqrt{\operatorname{tg}^2\varphi - \sin^2\theta}/\cos\theta$. Таким образом, $d(E_1) + d(E_2) \leqslant 2\operatorname{tg}\varphi$,

$$d(E_1 \cup E_2) \geqslant \frac{(\sin\theta + \operatorname{tg}\varphi)\cos\theta}{(\sin\theta + \cos\theta + \operatorname{tg}\varphi)^2},\quad d(E_1 \cap E_2) \geqslant$$

$\geqslant \dfrac{\sqrt{\operatorname{tg}^2\varphi - \sin^2\theta}}{\cos\theta + \sqrt{\operatorname{tg}^2\varphi - \sin^2\theta}}$. Будем теперь при заданном φ выбирать θ так, чтобы выполнялось $\sin\theta = k\operatorname{tg}\varphi$, где $0 < k < 1$. Тогда $d(E_1 \cup E_2) \geqslant \operatorname{tg}\varphi(1+k) + o(\varphi)$, $d(E_1 \cap E_2) \geqslant \operatorname{tg}\varphi\sqrt{1-k^2} + o(\varphi)$, $\varphi \to 0$. Но, как легко проверить, при всех $k \in]0;\ 1[$ выполняется $\sqrt{1-k^2} + 1 + k > 2$, поэтому, при достаточно малых φ, выполняется $d(E_1 \cup E_2) + d(E_1 \cap E_2) > d(E_1) + d(E_2)$.

Список литературы. 1. *Левин Б. Я.* Распределение корней целых функций.— М.: ГИТТЛ, 1956.— 638 с. 2. *Азарин В. С.* Об асимптотическом поведении субгармонических и целых функций.— Докл. АН СССР, 1976, **229**, № 6, с. 1289—1291. 3. *Азарин В. С.* Об асимптотическом поведении субгармонических функций конечного порядка. — Мат. сб., 1979, **108**, № 2, с. 147—167. 4. *Гирнык М. А.* Об асимптотических свойствах некоторых канонических произведений. II.— Сиб. мат. журн., 1976, **17**, № 5, с. 967—985. 5. *Гольдберг А. А. Коренков Н. Е.* Асимптотика логарифмической производной целой функции вполне регулярного роста.— Сиб. мат. журн., 1980, **21**, № 3, с. 63—79. 6. *Фридман А. Н.* Оценки снизу субгармонических функций.— Укр. мат. журн., 1980, **32**, № 5, с. 701—706. 7. *Красичков-Терновский И. Ф.* Одна геометрическая лемма, полезная в теории целых функций, и теоремы типа Левинсона.—Мат. заметки, 1978, 24, № 4, с. 531—546.

Поступила в редколлегию 28.02.81.