УДК 517. 21

В. Н. ГИНЗБУРГ, Г. А. ШАРШАНОВА

ОБ ОСОБЕННОСТЯХ АНАЛИТИЧЕСКИХ ЭРМИТОВО-ПОЗИТИВНЫХ ФУНКЦИЙ

§ 1. Аналитической эрмитово-позитивной функцией (а.э.-п.ф.) называется эрмитово-позитивная функция $\varphi(t)$, $-\infty < t < \infty$, $\varphi(0) = 1$, аналитическая в некоторой окрестности действительной оси. Как известно [1, с. 14], класс а.э.-п.ф. совпадает с классом функций, допускающих представление

$$\varphi(t) = \int\limits_{-\infty}^{\infty} e^{itx} P(dx), \tag{1}$$

где P — вероятностное расределение на прямой, удовлетворяющее условию $\varliminf\limits_{r\to\infty} r^{-1} \ln(1/P(|x| \geqslant r)) > 0$.

Следующие свойства а.э.-п.ф. хорошо известны [1, с. 38]. Каждая а.э.-п.ф. допускает аналитическое продолжение в некоторую полосу $\Pi_{\alpha\beta} = \{t: -\alpha < \operatorname{Im} t < \beta\}$, $\alpha > 0$, $\beta > 0$, максимальную из этих полос условимся обозначать через $\Pi(\varphi)$. В $\Pi(\varphi)$ справедливо представление (1), причем интеграл сходится абсолютно. Функция φ положительна при $t \in \{t: \operatorname{Re} t = 0\} \cap \Pi(\varphi)$, а в $\Pi(\varphi)$ удовлетворяет условиям $|\varphi(t)| \leqslant \varphi(i \operatorname{Im} t)$, $\overline{\varphi(t)} = \varphi(-\bar{t})$ (2). Точки пересечения границы полосы $\Pi(\varphi)$ с осью $\{t: \operatorname{Re} t = 0\}$ обязательно являются особыми точками функции $\varphi(t)$.

А.э.-п.ф., вообще говоря, может допускать аналитическое продолжение за пределы полосы $\Pi(\varphi)$. Класс областей, в которые возможно продолжение, полностью описан в работе [2] (см. также [1, с. 42]). Настоящая статья посвящена изучению возможных особенностей а.э.-п.ф. $\varphi(t)$, могущих возникнуть в результате продолжения за пределы полосы $\Pi(\varphi)$. Более точно постановка вопроса такова: каким условиям должна удовлетворять функция f, аналитическая в полосе $\Pi_{\alpha\beta}$, $\alpha > 0$, $\beta > 0$, для того чтобы существовала целая функция g такая, что функция $\varphi = f + g$ является а. э.-п.ф. и $\Pi(\varphi) = \Pi_{\alpha\beta}$.

В случае, когда функция f, «определяющая особенности», дополнительно предполагается мероморфной во всей плоскости, ответ на этот вопрос можно рассматривать как аналог для а.э.-п.ф. классической теоремы Миттаг — Леффлера о существовании мероморфной функции с заданными полюсами и главными частями в них.

Полный ответ на вопрос (даже в мероморфном случае) нам получить не удалось. Основным результатом работы является следующая теорема, описывающая довольно широкий класс возможных функций f, «определяющих особенности».

Теорема 1. *Пусть f—функция, представимая в виде $f = f_1 + f_2$ (3), где f_1 — рациональная функция вида*

$$f_1(t) = \sum_{k=1}^{m} \frac{a_{k1} i^k}{(t+i\alpha)^k} + \sum_{k=1}^{n} \frac{a_{k2}(-i)^k}{(t-i\beta)^k} \tag{4}$$

($0 < \alpha, \beta < \infty$, $a_{k1}, a_{k2} \in R$, $a_{m1} > 0$, $a_{n2} > 0$). *Функция f_2 аналитична в полосе $\Pi_{\alpha\beta}$, непрерывна в ее замыкании и удовлетворяет там условию $\overline{f_2(t)} = f_2(-\bar{t})$. Тогда существует целая* *функция g такая, что функция $\varphi = f + g$ является а. э.-п. ф. и* $\Pi(\varphi) = \Pi_{\alpha\beta}$.

Частным случаем этой теоремы является такое достаточное условие существования мероморфной а.э.-п.ф. с заданными полюсами и главными частями в них:

Следствие 1. *Пусть f — функция, представимая в виде (3), где f_1 допускает представление (4), а f_2 — мероморфная функция, не имеющая полюсов в замыкании полосы $\Pi_{\alpha\beta}$ и удовлетворяющая условию $\overline{f_2(t)} = f_2(-\overline{t})$. Тогда существует целая функция g такая, что функция $\varphi = f + g$ является а. э.-п. ф. и* $\Pi(\varphi) = \Pi_{\alpha\beta}$.

Условие $\overline{f_2(t)} = f_2(-\overline{t})$ влечет за собой то, что множество полюсов функции $f(it)$ симметрично относительно действительной оси и соответствующие коэффициенты в главных частях, отвечающих симметричным полюсам, сопряжены (в частности, коэффициенты главных частей в чисто действительных полюсах действительны). Из приведенных выше свойств а.э.-п.ф. легко следует, что эти условия на множество полюсов и коэффициенты главных частей мероморфных а. э.-п. ф. являются необходимыми. Первое из условий (2) показывает, что условия $a_{m1} > 0$, $a_{n2} > 0$ в (4) также необходимы. Однако, как показывают известные примеры [1, с. 436], условие отсутствия полюсов функции f на границе полосы $\Pi_{\alpha\beta}$ (кроме точек $-i\alpha$, $i\beta$) необходимым не является. Из первого условия формулы (2) следует лишь, что полюсы мероморфной а.э.-п.ф. φ, $\Pi(\varphi) = \Pi_{\alpha\beta}$, лежащие на прямой $\{t : \operatorname{Im} t = -\alpha\}$ ($\{t : \operatorname{Im} t = \beta\}$), должны иметь кратности, не превосходящие кратности полюса в точке $-i\alpha$ ($i\beta$), причем в случае совпадения кратности, старший коэффициент в главной части не должен по модулю превосходить коэффициент a_{m1} (a_{n2}) в (4). В связи с этим представляет интерес следующая теорема, дополняющая теорему 1.

Теорема 2. *Пусть f — функция, представимая в виде $f = f_1 + f_2 + f_3$, где f_1 и f_2 удовлетворяют тем же условиям, что и в теореме 1, а f_3 — мероморфная функция, аналитическая в $\Pi_{\alpha\beta}$ и удовлетворяющая условию $\overline{f_3(t)} = f_3(-\overline{t})$, причем кратности ее полюсов, лежащих на прямой $\{t : \operatorname{Im} t = -\alpha\}$ ($\{t : \operatorname{Im} t = \beta\}$), строго меньше числа m (числа n) из (4). Тогда существует целая функция g такая, что функция $\varphi = f + g$ является а. э.-п. ф. и* $\Pi(\varphi) = \Pi_{\alpha\beta}$.

Следствие 2. Утверждение следствия 1 сохраняет силу, если фигурирующее в нем условие отсутствия полюсов функции f_2 в замыкании $\Pi_{\alpha\beta}$ заменить более слабым: функция f_2 не имеет полюсов в $\Pi_{\alpha\beta}$, а кратности полюсов, лежащих на прямой $\{t : \operatorname{Im} t = -\alpha\}$ ($\{t : \operatorname{Im} t = \beta\}$), строго меньше числа m (числа n) из (4).

Замечание. Теоремы 1 и 2, а также следствия 1 и 2 сохраняют силу и в случае, когда одно из чисел α или β равно $+\infty$;

нужно лишь считать, что при $\alpha = +\infty$ $(\beta = +\infty)$ соответствующее слагаемое в (4) равно нулю.

Результаты настоящей работы при дополнительном предположении мероморфности функции f были первоначально получены Г. А. Шаршановой; в рассматриваемом более общем случае их доказал Б. Н. Гинзбург.

В доказательствах теорем будем предполагать, что α и β конечны, так как без этого предположения рассуждения только упрощаются.

Нам понадобится следующая простая лемма.

Лемма 1. *Пусть $\varphi_0(t)$ — функция вида $\varphi_0(t) = \int\limits_{-\infty}^{\infty} e^{itx} Q(dx)$, $-\infty < t < \infty$, где Q — вполне конечный заряд на борелевских множествах прямой, сужение которого на некоторое множество вида $\{x : |x| \geqslant d\}$ неотрицательно (т. е. является мерой). Тогда существует целая функция g_0 такая, что функция $\varphi = \varphi_0 + g_0$ эрмитово-позитивна и удовлетворяет условию $\varphi(0) = 1$.*

Действительно, можно найти столь большое $c > d$, что величина $\delta_c = Q(\{|x| \geqslant c\})$ строго меньше единицы. Функция $g_0(t) = -\int\limits_{(-c,\, c)} e^{itx} Q(dx) + 1 - \delta_c$ является искомой.

§ 2. Доказательство теоремы 1. Воспользуемся следующим результатом, представляющим частный случай одной теоремы М. В. Келдыша [3, с. 69]: для любой функции $F(t)$, аналитической в полосе $-\alpha < \operatorname{Im} t < \beta$ и непрерывной в полосе $-\alpha \leqslant \operatorname{Im} t \leqslant \beta$, любого $\varepsilon > 0$ существует такая целая функция $h_\varepsilon(t)$, что всюду в полосе $-\alpha \leqslant \operatorname{Im} t \leqslant \beta$ выполняется неравенство $|F(t) - h_\varepsilon(t)| \leqslant \varepsilon e^{-|t|^{1/4}}$ (5).

Применим это утверждение к функции $F(t) = f_2(t)$, фигурирующей в формулировке теоремы. Так как $\overline{F(t)} = F(-\bar{t})$, то наряду с функцией $h_\varepsilon(t)$ неравенству (5) удовлетворяет и функция $\frac{1}{2}(h_\varepsilon(t) + \overline{h_\varepsilon(-\bar{t})})$. Поэтому можно считать, что сама функция $h_\varepsilon(t)$ удовлетворяет условию $\overline{h_\varepsilon(t)} = h_\varepsilon(-\bar{t})$.

Оценим интеграл $q_\varepsilon(x) = \frac{1}{2\pi} \int\limits_{-\infty}^{\infty} e^{-itx}(f_2(t) - h_\varepsilon(t))\, dt$. Так как из (5) следует, что при $-\alpha \leqslant \nu \leqslant \beta$, $\xi \in R$

$$\left| \int\limits_{\xi}^{\xi + i\nu} e^{-itx}(f_2(t) - h_\varepsilon(t))\, dt \right| \leqslant \varepsilon \int\limits_0^{\nu} e^{x\eta} e^{-|\xi + i\eta|^{1/4}}\, d\eta \to 0 \text{ при } |\xi| \to \infty,$$

то по теореме Коши

$$2\pi q_\varepsilon(x) = \int\limits_{-\infty + i\nu}^{\infty + i\nu} e^{-itx}(f_2(t) - h_\varepsilon(t))\, dt =$$

$$= e^{\nu x} \int\limits_{-\infty}^{\infty} e^{-i\xi x}(f_2(\xi + i\nu) - h_\varepsilon(\xi + i\nu))\, d\xi.$$

Отсюда, воспользовавшись (5), получим $|2\pi q_\varepsilon(x)| \leqslant \varepsilon e^{\nu x}\int\limits_{-\infty}^{\infty} e^{-|\xi|^{1/4}} d\xi = 48\varepsilon e^{\nu x}$. Так как ν — любое число такое, что $-\alpha \leqslant \nu \leqslant \beta$, то справедлива оценка

$$|q_\varepsilon(x)| \leqslant 8\varepsilon e^{\beta x} \; (x < 0), \quad |q_\varepsilon(x)| < 8\varepsilon e^{-\alpha x} \; (x \geqslant 0). \tag{6}$$

Преобразование Фурье-функции $f_1(t)$ имеет вид

$$p(x) = \begin{cases} e^{\beta x} \sum\limits_{k=1}^{n} \dfrac{a_{k2}}{(k-1)!} (-x)^{k-1}, & x < 0, \\ e^{-\alpha x} \sum\limits_{k=1}^{m} \dfrac{a_{k1}}{(k-1)!} x^{k-1}, & x \geqslant 0. \end{cases} \tag{7}$$

Так как $a_{m1} > 0$, $a_{n2} > 0$, то из (6) и (7) следует, что найдутся такие $c > 0$, $\varepsilon > 0$, что для всех x, $|x| > c$, будет выполняться $q_\varepsilon(x) + p(x) > 0$. Поэтому функция $\varphi_0 = f_1 + f_2 - h_\varepsilon$ удовлетворяет условиям леммы 1, применяя которую, получаем утверждение доказываемой теоремы.

§ 3. Прежде, чем переходить к доказательству теоремы 2, докажем такой ее частный случай.

Лемма 2. *Пусть f — функция, представимая в виде $f = f_1 + f_3$, где*

$$f_1(t) = 2\varkappa \left\{ \left(\frac{i\alpha}{t + i\alpha} \right)^m + \frac{i\alpha}{t + i\alpha} \right\}, \; \alpha > 0, \; \varkappa > 0, \; m \in N, \tag{8}$$

а $\overline{f_3(t)} = f_3(-\bar{t})$ — мероморфная функция, все полюсы которой лежат на прямой $\operatorname{Im} t = -\alpha$ и не совпадают с $-i\alpha$, причем кратности полюсов строго меньше m. Тогда существует целая функция $g(t)$ такая, что функция $\varphi = f + g$ **(9)** *является а.э.-п.ф.*

Доказательство. Пусть $\tau_1 - \bar{\tau}_1, \ldots, \tau_k, -\bar{\tau}_k, \ldots, \tau_k = \xi_k - i\alpha$, $\xi_{k+1} > \xi_k > 0$ **(10)** — полюсы функции $f_3(t)$,

$$\varphi_k(t) = \sum_{l=1}^{n_k} \left[\lambda_{kl} \left(\frac{-\tau_k}{t - \tau_k} \right)^l + \bar{\lambda}_{kl} \left(\frac{\bar{\tau}_k}{t + \bar{\tau}_k} \right)^l \right], \; k = 1, 2, \ldots \tag{11}$$

— сумма главных частей функции $f_3(t)$ в полюсах τ_k, $-\bar{\tau}_k$. По условию теоремы имеем $n_k < m$.

Легко видеть, что числа $0 < \eta_k < 1$ можно выбрать столь малыми, что, полагая $\tau_k' = \tau_k - i\eta_k$ и

$$F_k(t) = \sum_{l=1}^{n_k} \left[\lambda_{kl} \left(\frac{-\tau_k}{t - \tau_k'} \right)^l + \bar{\lambda}_{kl} \left(\frac{\bar{\tau}_k}{t + \bar{\tau}_k'} \right)^l \right],$$

получим $|\varphi_k(t) - F_k(t)| \leqslant 2^{-k}$ **(12)** для всех $t \in \{t : |t - \tau_k| \geqslant \alpha/2, |t + \bar{\tau}_k| \geqslant \alpha/2\}$. Положим

$$u_k(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-itx} \{\varphi_k(t) - F_k(t)\}\, dt$$

и докажем, что за счет уменьшения чисел η_k можно добиться выполнения при $x \geqslant 0$ неравенства

$$|u_k(x)| \leqslant \frac{1}{2^{k+1}} \varkappa e^{-\alpha x} \left\{ \frac{\alpha^m x^{m-1}}{(m-1)!} + 1 \right\}. \tag{13}$$

Действительно, непосредственное вычисление дает

$$u_k(x) = -2e^{-\alpha x} \operatorname{Re} \left\{ e^{-i\xi_k x} \sum_{l=1}^{n_k} \lambda_{kl}(-i\tau_k) \frac{(i\tau_k x)^{l-1}}{(l-1)!} - \right.$$

$$\left. - e^{-i\xi_k x - \eta_k x} \sum_{l=1}^{n_k} \lambda_{kl}(-i\tau_k) \frac{(i\tau_k x)^{l-1}}{(l-1)!} \right\}. \tag{14}$$

Так как $0 < \eta_k < 1$, то $|\tau_k| \leqslant |\tau_k| + 1$ и, следовательно, $|u_k(x)| \leqslant$ $\leqslant 2e^{-\alpha x} \left\{ \sum_{l=1}^{n_k} |\lambda_{kl}| \frac{|\tau_k|^l x^{l-1}}{(l-1)!} + \sum_{l=1}^{n_k} |\lambda_{kl}| \frac{(|\tau_k| + 1)^l x^{l-1}}{(l-1)!} \right\}$. Поскольку $n_k < m$, то отсюда видно, что найдется не зависящая от выбора $0 < \eta_k < 1$ величина A_k такая, что при $x \geqslant A_k$ выполняется (13). Так как величина, стоящая в правой части (14), равномерно на отрезке $0 \leqslant x \leqslant A_k$ стремится к 0 при $\eta_k \to 0$, то, выбирая η_k достаточно малым, добиваемся выполнения (13) и при $0 \leqslant x \leqslant A_k$.

В силу (13) ряд $R = \sum_{k=1}^{\infty} \{\varphi_k - F_k\}$ **(15)** равномерно сходится на компактах. Покажем, что функция $\Phi_1 = \frac{1}{2} f_1 + R$ **(16)** является а.э.-п.ф. с точностью до положительного постоянного множителя.

Обозначая через R_N сумму первых N членов ряда (15), а через Φ_{1N} — функцию, отличающуюся от (16) заменой R на R_N, имеем

$$\frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \Phi_{1N}(t) e^{-itx}\, dt = \varkappa e^{-\alpha x} \left\{ \frac{\alpha^m x^{m-1}}{(m-1)!} + 1 \right\} + \sum_{k=1}^{N} u_k(x). \tag{17}$$

В силу (13) правая часть (17) положительна при $x \geqslant 0$. При $x < 0$ интеграл, стоящий в (17), равен нулю, так как $\Phi_{1N}(t)$ аналитична и есть $O(1/|t|)$ в полуплоскости $\{t : \operatorname{Im} t \geqslant 0\}$. Поэтому Φ_{1N} является а.э.-п.ф. с точностью до положительного постоянного множителя. В силу классической теоремы Леви [1, с. 14], это верно и для функции $\Phi_1 = \lim\limits_{N\to\infty} \Phi_{1N}$.

Обозначим через $f_2(t)$ мероморфную функцию с полюсами в точках $\{\tau'_k\}^\infty$, и главными частями в точках τ'_k, $-\overline{\tau}'_k$ такими же, как у функции $F_k(t)$. Существование функции $f_2(t)$ обеспечено теоремой Миттаг—Леффлера. Переходя в случае надобности от $f_2(t)$ к $\frac{1}{2}\{f_2(t) + \overline{f_2(-\overline{t})}\}$, можем считать, что $f_2(t)$ удовлетворяет условию $\overline{f_2(t)} = f_2(-\overline{t})$. По теореме 1 существует целая функция $g_1(t)$ такая, что функция $\Phi_0 = \frac{1}{2} f_1 + f_2 + g_1$, где f_1 определено равенством (8), является а.э.-п.ф.

Рассмотрим функцию $\Phi_1 + \Phi_0 = f_1 + f_2 + R + g_1$. В силу доказанного, эта функция является а.э.-п.ф. с точностью до постоянного множителя. По лемме 1 существует целая функция g_0 такая, что функция $\varphi = \Phi_1 + \Phi_0 + g_0$ является а.э.-п.ф. Замечая, что по построению функций R и f_2 имеем $R + f_2 = f_3 + g_2$, где g_2 некоторая целая функция, убеждаемся, что функция φ допускает представление (9) $g = g_0 + g_1 + g_2$.

§ 4. **Доказательство теоремы 2.** Выберем число $\varkappa > 0$ настолько малым, чтобы функция $\tilde{f}_1(t) = f_1(t) - \varkappa \left\{\left(\frac{i\alpha}{t+i\alpha}\right)^m + \frac{i\alpha}{t+i\alpha} + \left(\frac{-i\beta}{t-i\beta}\right)^m + \frac{-i\beta}{t-i\beta}\right\}$ все еще допускала представление в форме (4) с некоторыми $a_{m1} > 0$, $a_{n2} > 0$. По теореме 1 существует целая функция g_1 такая, что функция $\varphi_1 = \tilde{f}_1 + f_2 + g_1$, является а.э.-п.ф. По лемме 2 существует целая функция g_2 такая, что функция $\varphi_2 = f_1 - \tilde{f}_1 + f_3 + g_2$ является а.э.-п.ф. Но тогда функция $\varphi_1 + \varphi_2 = f_1 + f_2 + f_3 + g_1 + g_2$ является а.э.-п.ф. с точностью до постоянного множителя и, применяя лемму 1, получаем доказываемое утверждение.

Список литературы: 1. *Линник Ю. В., Островский И. В.* Разложения случайных величин и векторов.— М.: Наука, 1972.— 480 с. 2. *Островский И. В.* Некоторые свойства голоморфных характеристических функций многомерных вероятностных законов. — Теория функций, функцион. анализ и их прил., 1966, вып. 2, с. 169—177. 3. *Мергелян С. Н.* Равномерные приближения функций комплексного переменного. — Усп. мат. наук, 1952, 7, вып. 2, с. 31—123.

Поступила в редколлегию 01.07.81.