

УДК 517.535.4

*Е. Д. ФАЙНБЕРГ*

**ОБ ИНДИКАТОРЕ НЕКОТОРЫХ КЛАССОВ ФУНКЦИЙ,  
АНАЛИТИЧЕСКИХ В ПОЛУПЛОСКОСТИ**

Для аналитических в полуплоскости функций вполне регулярного роста связь между индикатором функции и распределением нулей изучалась Н. В. Говоровым. Им получены формулы, выражающие с помощью интеграла Стильтьеса индикатор функции через аргументно-границную плотность (величину, характеризующую асимптотическое поведение нулей и граничных значений, см. [1]).

Для функций, не имеющих вполне регулярный рост, можно ставить лишь вопрос об оценках индикатора через характеристики асимптотического поведения нулей и граничных значений.

Эта задача для функций, аналитических в полуплоскости и нецелого конечного порядка, рассматривалась в [2] при некоторых ограничениях на верхнюю аргументную, верхнюю и нижнюю граничные плотности. Однако получены оценки не точны. В настоящей статье найденные точные оценки индикатора через указанные выше характеристики распределения нулей и граничных значений. Они записаны с помощью интеграла по неаддитивной мере, введенного в [3], [4].

1°. Пусть  $A(\rho, C^+)$  — класс функций  $f(z)$ , аналитических в верхней полуплоскости  $C^+$ , ограниченных в каждом полукруге  $K_R = \{z: |z| \leq R, \text{Im } z > 0\}$  и имеющих не более чем нормальный тип при порядке  $\rho$ , т. е. таких, что  $\lim_{r \rightarrow \infty} r^{-\rho} \sup_{0 < \varphi < \pi} \ln |f(re^{i\varphi})| = \sigma < \infty$ . Мы будем считать, что  $\rho > 1$  — нецелое.

Обозначим через  $E_q(u, v)$  первичный множитель Неванлинны вида  $E_q(u, v) = (E(\frac{u}{v}, q)) / (E(\frac{u}{v}, q))$  где  $E(z, q)$  — канонический множитель Вейерштрасса. Положим  $K(z, \zeta, q) = \frac{\ln |E_q(z, \zeta)|}{\sin \arg \zeta}$ , если  $\text{Im } \zeta > 0$ , а для  $z \in C^+$  доопределим  $K(z, \zeta, q)$  при  $\text{Im } \zeta = 0$  формулами  $K(z, t, q) = \lim_{\theta \rightarrow +0} K(z, te^{i\theta}, q)$ ;  $K(z, -t, q) = \lim_{\theta \rightarrow \pi - 0} K(z, te^{i\theta}, q)$ .

Из определения функции  $K(z, \zeta, q)$  следует, что она непрерывна по  $\zeta$  при  $z \neq \zeta$  и субгармонична по  $z$  в  $C^+$ .

Для  $f \in A(\rho, C^+)$  Н. В. Говоровым [1] получено следующее

представление  $f(z) = \exp \left\{ i \sum_{n=1}^q d_n z^n + \frac{1}{\pi i} \int_{-1}^1 \frac{d\Psi(t)}{t-z} \right\} \prod_{|a_k| < 1} \frac{z - a_k}{z - \bar{a}_k} \times$   
 $\times \exp \left\{ -2iz^{q+1} \int_{|t| > 1} \frac{d\tau(t)}{t^q(t-z)} \right\} \prod_{|a_k| > 1} E_q(z, a_k)$  (1), в котором

$q = [\rho]$ ,  $d_n$  — вещественные постоянные,  $a_k$  — нули  $f(z)$ , лежащие в  $C^+$ , а  $\Psi(t), \tau(t)$ ,  $t \in (-\infty, \infty)$  — вещественные функции, имеющие локально ограниченную вариацию, причем  $|\tau|$  (вариация  $\tau$ ) удовлетворяет условию  $\int_{|t| > 1} \frac{|d\tau|}{|t|^{q+1}} < \infty$ .

Пусть  $n_f$  — распределение нулей функции  $f(z)$  в  $C^+$ ,  $C_f(E)$  и  $\gamma_f(E)$  — соответственно мера и заряд, определенные равенствами  $dC_f(\zeta) = \sin(\arg \zeta) dn_f$ ;  $dC_f(\zeta)$ , если  $\text{Im } \zeta > 0$ ,

$$d\gamma_f = \begin{cases} -\frac{1}{2\pi} \frac{d\Psi}{|\zeta|}, & \text{если } \text{Im } \zeta = 0, |\zeta| \leq 1, \\ -d\tau = d(-\tau), & \text{если } \text{Im } \zeta = 0, |\zeta| > 1. \end{cases} \quad (2)$$

Если  $f \in A(\rho, C^+)$ , то  $\gamma_f$  удовлетворяет условию  $\lim_{R \rightarrow \infty} R^{-\rho} |\gamma_f|(K_R \setminus K_1) = \Delta_1 < \infty$  (3).

Пусть  $\Theta$  — некоторое множество на  $[0, \pi]$ . Обозначим через  $K_{R, \Theta} = \{\zeta; 0 \leq |\zeta| \leq R, \arg \zeta \in \Theta\}$  и через  $C(r, \Theta, f) = C_f(K_{r, \Theta})$ , где  $C_f$  — мера, определенная равенством (2).

Асимптотическое поведение нулей и граничных значений  $f \in A(\rho, C^+)$  будем характеризовать следующими величинами: верх-

ней  $\lambda^*$  и нижней  $\lambda_*$  аргументными плотностями  $\lambda^*(\lambda_*) (\Theta, f) \stackrel{\text{def}}{=} \overline{\lim}_{r \rightarrow \infty} (\lim) r^{-\rho} C(r, \Theta, f)$  (4), правосторонней (ниж-

ней и верхней)  $l_{1*}, l_1^*$  и левосторонней (нижней и верхней)  $l_{2*}, l_2^*$  соответственно граничными плотностями, где

$l_{1*} (l_1^*) [f] = \lim_{t \rightarrow \infty} (\overline{\lim}) t^{-\rho} \tau(t); l_{2*} (l_2^*) [f] \stackrel{\text{def}}{=} \lim_{t \rightarrow \infty} (\overline{\lim}) t^{-\rho} \tau(-t)$ . Эти величины были введены Н. В. Говоровым [1] для описания асимптотического поведения функций вполне регулярного роста в полуплоскости.

2°. Обозначим через  $D(C^+)$  пространство функций  $f(z)$  непрерывных в  $C^+ \cup R$ , бесконечно-дифференцируемых в  $C^+$  и таких, что для достаточно малых  $r$  и достаточно больших  $R$ , (зависящих от  $f(z)$ )  $f(z) = 0$ , если  $|z| < r$  или  $|z| > R$ .  $D(C^+)$  назовем пространством основных функций. Обозначим через  $D'(C^+)$  пространство обобщенных функций над основным пространством  $D(C^+)$ .

Пусть  $f \in A(\rho, C^+)$  и заряд  $\gamma = \gamma_f$  определяется равенством (2). Определим (см. [5], [6]) преобразование  $(\cdot)_t$  над  $\gamma$  равенством  $\gamma_t(E) = t^{-\rho} \gamma(tE)$ ,  $t > 0$ , где  $tE = (z = t\zeta : \zeta \in E)$ .

**Предложение 1.** Пусть  $\gamma$  удовлетворяет условию (3). Тогда из любой последовательности  $t_j \rightarrow \infty$  можно выделить подпоследовательность  $t'_j \rightarrow \infty$  и найти такой заряд  $\nu$ , что  $\gamma_{t'_j} \rightarrow \nu^+; \gamma_{t'_j}^- \rightarrow \nu^-; \gamma_{t'_j} \rightarrow \nu$  в  $D'(C^+)$ .

Это утверждение является следствием теоремы Хелли.

Совокупность пределов  $\nu$  из предложения 1 назовем (см. [5]) предельным множеством для  $\gamma$  и обозначим  $Fg[\gamma]$ .

Заметим, что значение заряда  $\gamma$  в конечной области не влияет на асимптотическое поведение  $\gamma_t$ , а именно, если  $\tilde{\gamma}$  — сужение  $\gamma$  на дополнение к конечной области и  $\gamma_{t'_j} \xrightarrow{D'(C^+)} \nu$ , то  $\tilde{\gamma}_{t'_j} \xrightarrow{D'(C^+)} \nu$ . В частности, предельные множества для  $\gamma$  и  $\tilde{\gamma}$  совпадают.

Пусть  $X_\theta$  — семейство, состоящее из множеств  $\Theta \subset [0, \pi]$  вида  $\Theta = \Theta_1 \cup (\partial\Theta_1 \cap \partial[0, \pi])$ , где  $\Theta_1$  — открытое множество,  $\partial\Theta_1$  — граница множества  $\Theta_1$ . Иначе говоря,  $\Theta$  открыто, если его расстояние до концов интервала  $(0, \pi)$  положительно, а если оно равно нулю, то соответствующий конец интервала  $(0, \pi)$  присоединен к  $\Theta$ . Например, интервал  $(\alpha, \beta) \subset\subset (0, \pi)$  и полуинтервал  $(\alpha, \pi]$ ,  $\alpha \neq 0$  могут принадлежать  $X_\theta$ , а интервал  $(0, \frac{\pi}{2})$  — не может. Потребуем также, чтобы  $[0, \pi] \in X_\theta$ .

Пусть  $\delta(\Theta)$  — неотрицательная монотонная функция множества, определенная на множествах  $\Theta \in X_\theta$  (неаддитивная мера). Для любого борелевского множества  $\Theta^E$  полагаем  $\delta(\Theta^E) = \inf \{ \delta(\Theta) : \Theta \supset \Theta^E \in X_\theta \}$ .

Обозначим через  $\Lambda(\delta, X_\Theta)$  множество мер  $\mu$ , вида  $\Lambda(\delta, X_\Theta) \{ \mu: \mu(K_{r,\Theta}) \leq \delta(\Theta) r^\rho, \Theta \in X_\Theta \}$  (5).

Введем в рассмотрение величину  $\bar{\lambda}^*(\Theta, f) = \sup \{ \lambda^*(\Theta^F, f) : \Theta^F \subset \Theta \}$ , где  $\Theta^F$  — замкнутое множество, а  $\lambda^*(\Theta, f)$  — верхняя аргументная плотность нулей (см. (4)).

Определим следующие классы функций из  $A(\rho, C^+)$ :  $B'(\delta, X_\Theta) = \{ f: \lambda^*(\Theta, f) \leq \delta(\Theta), \Theta \in X_\Theta \}$ ;  $B''(\delta, X_\Theta) = \{ f: \bar{\lambda}^*(\Theta, f) \leq \delta(\Theta), \Theta \in X_\Theta \}$ ;  $B_{Fr}(\delta, X_\Theta) = \{ f: Fr[C_f] \subset \Lambda(\delta, X_\Theta) \}$ , ( $C_f$  — сужение  $\gamma_f$  на открытую полуплоскость, но  $Fr[C_f]$  может содержать распределение масс, носитель которого пересекается с границей полуплоскости).

**Предложение 2.** Если  $\delta_1, \delta_2$  — неаддитивные меры такие, что  $\delta_1(\bar{\Theta}) \leq \delta_2(\Theta)$ ,  $\Theta \in X_\Theta$  ( $\bar{\Theta}$  — замыкание  $\Theta$ ), то  $B''(\delta_1, X_\Theta) \subset B'(\delta_2, X_\Theta) \subset B_{Fr}(\delta_2, X_\Theta) \subset B''(\delta_2, X_\Theta)$ .

Для доказательства понадобится следующая

**Лемма 1.** Пусть  $G$  — открытое множество в  $C^+$  и  $\tilde{G} = G \cup (\partial G \cap \partial C^+)$ . Пусть последовательность мер  $\mu_h \xrightarrow{D'(C^+)} \mu$ . Тогда  $\lim_{h \rightarrow \infty} \mu_h(\tilde{G}) \geq \mu(\tilde{G})$ .

Доказательство предложения 2. Покажем, что  $B''(\delta_1, X_\Theta) \subset B'(\delta_2, X_\Theta)$ . Пусть  $f \in B''(\delta_1, X_\Theta)$  и  $\Theta', \Theta \in X_\Theta, \Theta' \supset \bar{\Theta}$ . Легко проверить, что  $\lambda^*(\Theta, f) \leq \lambda^*(\Theta', f)$ . Из определения класса функций  $B''(\delta_1, X_\Theta)$  следует, что  $\lambda^*(\Theta', f) \leq \inf \{ \delta_1(\Theta') : \Theta' \supset \bar{\Theta} \} = \delta_1(\bar{\Theta}) \leq \delta_2(\Theta)$ , т. е.  $f \in B'(\delta_2, X_\Theta)$ .

Пусть  $f \in B'(\delta, X_\Theta)$ , проверим, что  $f \in B_{Fr}(\delta, X_\Theta)$ . По лемме 1 для  $\mu \in Fr[C_f]$  имеем  $\mu(K_{r,\Theta}) \leq \lim_{t \rightarrow \infty} C_{t_j}(\Theta, r, \bar{f}) \leq \lim_{t \rightarrow \infty} C_t(\Theta, r, f) \leq r^\rho \lambda^*(\Theta, f) \leq r^\rho \delta(\Theta)$ . Значит,  $\mu \in \Lambda(\delta, X_\Theta)$  и  $f \in B_{Fr}(\delta, X_\Theta)$ .

Осталось показать, что  $B_{Fr}(\delta, X_\Theta) \subset B''(\delta, X_\Theta)$ . Пусть  $\Theta \in X_\Theta$  и  $\Theta^F$  — замкнутое множество такое, что  $\Theta^F \subset \Theta$ . Тогда для  $f \in B_{Fr}(\delta, X_\Theta)$  получаем  $\lambda^*(\Theta, f) = r^{-\rho} \sup_{\Theta^F \subset \Theta} \lim C_t(\overline{K_{r,\Theta^F}}, f) \leq r^{-\rho} \sup_{\mu \in Fr(C_f)} \mu(\overline{K_{r,\Theta}}) \leq \delta(\Theta)$ .

**Следствие.** Если  $\delta(\bar{\Theta}) = \delta(\Theta)$ , то  $B'(\delta, X_\Theta) = B''(\delta, X_\Theta) = B_{Fr}(\delta, X_\Theta)$ .

Пусть  $\tau$  — заряд из представления (1),  $Fr[\tau]$  — предельное множество для заряда  $\tau$  на вещественной оси. Очевидно,  $Fr[\tau] = \{ -v|_R : v \in Fr[\gamma] \}$ , где  $v|_R$  — сужение заряда  $v$  на вещественную ось. Положим

$$\Psi^*(x) = \begin{cases} L_1^* x^\rho, & x > 0, \\ L_2^* |x|^\rho, & x < 0, \end{cases}; \Psi_*(x) = \begin{cases} L_{1*} x^\rho, & x > 0, \\ L_{2*} |x|^\rho, & x < 0, \end{cases}$$

где  $L_{i*}, L_i^*$  — конечные числа, удовлетворяющие неравенствам  $-\infty < L_{i*} < L_i^* < \infty$  ( $i = 1, 2$ ). Обозначим через  $\alpha$  распределе-

ние зарядов на  $R \setminus 0$ , удовлетворяющее условию  $|\alpha|((-\infty, x)) \leq \delta|x|^p$ , а через  $\Lambda(L)$  — множество зарядов, определяемое равенством  $\Lambda(L) = \{\alpha: \psi_*(x) \leq \alpha(x) \leq \psi^*(x)\}$  (6), где

$$\alpha(x) = \begin{cases} \alpha([0, x]), & x > 0, \\ \alpha((-\infty, 0]), & x < 0. \end{cases}$$

Рассмотрим еще два класса функций из

$A(\rho, C^+)$ , а именно,  $B(L) = \{f: L_{i*} \leq l_{i*} \leq l_i^* \leq L_i^*, i = 1, 2\}$ ;  $B_{Fr}(L) = \{f: Fr[\tau_f] \subset \Lambda(L)\}$ . Нетрудно проверить, что имеет место

**Предложение 3.** *Справедливо соотношение  $B(L) \subset B_{Fr}(L)$ .*

3°. Как обычно, индикатором функции  $f \in A(\rho, C^+)$  называем величину  $h_f(\varphi) = h(f, \varphi) = \lim_{r \rightarrow \infty} r^{-p} \ln |f(re^{i\varphi})|$ ,  $0 < \varphi < \pi$ .

В статье изучается поведение индикатора аналитических в полуплоскости функций  $f(z)$ , принадлежащих классу  $B(\delta, X_\theta, L) = B'(\delta, X_\theta) \cap B(L)$ . Как мы видим, класс  $B(\delta, X_\theta, L)$  определен ограничениями на асимптотические характеристики поведения функции и эти ограничения зависят от неаддитивной меры  $\delta(\theta)$ , системы множеств  $X_\theta$  и величин  $L_{i*}, L_i^* (i = 1, 2)$ .

Сформулируем теоремы, которые дают точную оценку индикатора в этом классе. Пусть  $\delta(\theta)$  — неаддитивная мера на  $X_\theta$ . Рассмотрим следующие семейства множеств:  $\{X_z\} = \{K_{r,\theta}: \theta \in X_\theta\}$ ,  $G_r = \{z: |z| \leq r, \text{Im } z < 0\}$ ,  $X_z = \{X_z\} \cup \{G_r\}$ . Неаддитивную меру  $\delta_z$  на  $X_z$  зададим равенствами:  $\delta_z(X_z) = r^p \delta(\theta)$ ,  $\delta_z(G_r) = 0$ . Функцию  $\Psi_\varphi(x)$  определим соотношением

$$\Psi_\varphi(x) = \begin{cases} -\psi^*(x), & \text{если } K'_x(e^{i\varphi}, x, q) > 0; \\ -\psi_*(x), & \text{если } K'_x(e^{i\varphi}, x, q) < 0. \end{cases}$$

Результат формулируется в терминах интеграла по неаддитивной мере (определение и свойства этого интеграла см. в [3], [4]).

**Теорема 1.** *Для  $f \in B(\delta, X_\theta, L)$  выполняется неравенство<sup>1</sup>*

$$h_f(\varphi) \leq \int_R K(e^{i\varphi}, x, q) d\Psi_\varphi(x) + X_z \int_{R^2} K(e^{i\varphi}, \zeta, q) d\delta_z(\zeta) \quad (7)$$

(второе слагаемое в правой части — интеграл по неаддитивной мере  $\delta_z$  относительно семейства множеств  $X_z$ ).

**Теорема 2.** *Если  $\delta(\theta) = \delta(\bar{\theta}), \forall \theta \in X_\theta$ , то оценка (7) точна в классе  $B(\delta, X_\theta, L)$ . Существует  $f \in B(\delta, X_\theta, L)$ , для которой равенство выполняется при всех  $\varphi \in (0, \pi)$ .*

В доказательстве теоремы 1 мы используем свойства предельных множеств, характеризующие асимптотическое поведение субгармонических в  $C^+$  функций.

<sup>1</sup> Как обычно,  $a^+(x) = \max(0, a(x))$ .

Если  $\gamma$  — заряд в  $\bar{C}^+ = C^+ \cup R$ , удовлетворяющий условию (3), то интеграл

$$I(z, \gamma) = \int_{\bar{C}^+/0} K(z, \zeta, q) d\gamma(\zeta)$$

сходится для всех  $z \in C^+$  (см. [7]). Если сужение  $\gamma$  на открытую полуплоскость является распределением масс, то  $I(z, \gamma)$  — субгармоническая в  $C^+$  функция.

Пусть  $f \in A(\rho, C^+)$  и  $u(z) = \ln |f(z)|$ . Определим преобразование  $(\cdot)_t$  над  $u(z)$  равенством  $u_t(z) = t^{-\rho} u(tz)$ .

Поведение  $u_t$  при  $t \rightarrow \infty$  описывает следующее утверждение.

**Предложение 4.** Пусть  $\gamma_{t_j} \rightarrow \nu$  в  $D'(C^+)$ . Тогда соответствующая последовательность  $u_{t_j}$  сходится в  $D'(C^+)$  к субгармонической функции  $v(z) = I(z, \nu)$ .

При доказательстве мы используем представление (1) функций из класса  $A(\rho, C^+)$ , определение функции  $K(z, \zeta, q)$  и соотношения (2) (ср. [6], с. 55—57).

Множество субгармонических функций  $v(z)$ , полученное в предложении 4, называется предельным множеством для  $u(z)$  относительно преобразования  $(\cdot)_t$  и обозначается  $\text{Fr}[u]$  (см. [5]).

Итак, множество  $\text{Fr}[u] = \{I(z, \nu) : \nu \in \text{Fr}[\gamma]\}$ . Далее покажем связь между индикатором  $f \in A(\rho, C^+)$  и  $\text{Fr}[u]$ . Имеет место предложение

**Предложение 5.** Справедливо следующее равенство  $h_f(\varphi) = \sup \{I(e^{i\varphi}, \nu) : \nu \in \text{Fr}[\gamma]\}$ .

Предложение 5 является аналогом соответствующего утверждения из [5] для субгармонических в  $C$  функций (см. [5], следствие т. 2.1.2).

Укажем основные моменты доказательства теоремы 1 (подробные доказательства теорем 1 и 2 приведены в [8]). Из предложений 2, 3, 5 получаем неравенство  $h_f(\varphi) \leq \sup_{\alpha \in \Lambda(L)} \left( - \int_R K(e^{i\varphi}, x, q) d\alpha(x) \right) + \sup_{\mu \in \Lambda(\delta, X_\theta)} \int_{R^2} K(e^{i\varphi}, \zeta, q) d\mu(\zeta)$ , где  $\Lambda(L)$  и  $\Lambda(\delta, X_\theta)$  опре-

делены соотношениями (5) и (6). Заметим, что второе слагаемое в последнем неравенстве можно выразить через интеграл по неаддитивной мере  $\delta_z$  (см. [3]), а именно,  $\sup_{\mu \in \Lambda(\delta, X_\theta)} \int_{R^2} K(e^{i\varphi}, \zeta, q) d\mu(\zeta) =$

$= X_z \cdot \int_{R^2} K^+(e^{i\varphi}, \zeta, q) d\delta_z(\zeta)$ . Из определения функций  $\Psi_\varphi(x)$ ,  $\alpha(x)$

и условия  $K(te^{i\varphi}, \zeta, q) \leq At^{q+1} |\zeta|^{-q} (t + |\zeta|)^{-1}$  (см. [7], с. 38) следует, что  $\sup_{\alpha \in \Lambda(L)} \left( - \int_R K(e^{i\varphi}, x, q) d\alpha(x) \right) = \int_R K(e^{i\varphi}, x, q) d\Psi_\varphi(x)$ .

Непосредственной проверкой можно убедиться, что первое слагаемое в (7) совпадает с первой частью выражения, полученного в теореме 1 из [2], второе слагаемое в (7), как это следует из теоремы 2, точнее чем в [2].

Для доказательства теоремы 2 мы строим сначала функцию  $f_\varphi(z)$ , которая является экстремальной в соотношении (7) для фиксированного  $\varphi$ . А затем из  $f_\varphi(z)$  строится экстремальная функция  $f \in B(\delta, X_\theta, L)$ , для которой верно второе утверждение теоремы 2. Следует отметить, что при построении примера мы использовали идеи работы [5].

**Список литературы:** 1. *Говоров Н. В.* Об индикаторе функций нецелого порядка, аналитических и вполне регулярного роста в полуплоскости. — Докл. АН СССР, 1965, 162, № 3, с. 495—498. 2. *Файнберг Е. Д.* Оценки индикаторов функций, аналитических и нецелого конечного порядка в полуплоскости. I. — Докл. АН УССР, 1976, № 1, с. 34—37. 3. *Файнберг Е. Д.* Об оценке индикатора целой функции и интеграле по неаддитивной мере. — Докл. АН АрмССР, 1981, т. 72, № 2, с. 78—81. 4. *Файнберг Е. Д.* Об оценке индикатора целой функции и интеграле по неаддитивной мере. — Рук. деп. в ВИНТИ, 1979, № 2397 (РЖ мат., 1979, 103275). 5. *Азарин В. С.* Об асимптотическом поведении субгармонических функций конечного порядка. — Мат. сб., 1979, 108, (150), № 2, с. 147—167. *Азарин В. С.* Теория роста субгармонических и целых функций. — Харьков: Изд-во при Харьк. гос. ун-те, 1978, — 72 с. 7. *Nevanlinna R.* Über die Eigenschaften meromorphen Funktionen in einem Winkelraum. — Acta Sos. Sci. Fenn., 1925, Bd 50, N 12, S. 1—45.

8. *Файнберг Е. Д.* Оценки индикаторов специальных классов функций, аналитических в полуплоскости. Рук. деп. в ВИНТИ, 1981, № 4167 (РЖ мат., 1981, 125146).

Поступила в редколлегию 16. 10. 81.