УДК 513.015.7

З. М. ДУНАЕВСКИЙ

О РОСТЕ ГОЛОМОРФНЫХ КРИВЫХ

Пусть M — компактное комплексное многообразие размерности p, допускающее положительное линейное расслоение L (см. [1] с. 109). Если S — голоморфное сечение L, то длина $|S|$ является разностью двух логарифмически субгармонических функций на M. Каждое такое сечение определяет дивизор $D_S = \{q \in M : S(q) = 0\}$. Всюду далее предполагаются фиксированными M и некоторое семейство Q сечений такое, что дивизоры D_S, $S \in Q$ гладкие и имеют нормальное пересечение (см. [1] с. 113).

Пусть $f: C \to M$ — голоморфная кривая. Для любого $S \in Q$ функция $\log|S(f)|$ является разностью субгармонических функций в C, поэтому можно рассматривать неванлинновские характеристики $m(r, D, f) = m(r, -\log|S(f)|)$, $n(r, D, f) = n(r, -\log|S(f)|)$, где $D = D_S$. Функция $N(r, D, f)$ определяется обычным образом. Имеет место 1-я основная теорема теории голоморфных кривых (см. [1] с. 110): $m(r, D_S, f) + N(r, D_S, f) = T(r, L, f) + O(1)$ $(r \to \infty)$. Функция $T(r) = T(r, L, f)$ определяется только по расслоению и кривой f; эта функция монотонно возрастает и неограничена. Положим $L(r, D, f) = \max_{\theta} \times (-\log|S(f(re^{i\theta}))|)$, $D = D_S$, $S \in Q$. Если λ — нижний порядок кривой (определяемый по $T(r)$), то справедлива оценка для $\beta(D, f) = \underline{\lim}_{r\to\infty} L(r, D, f)/T(r)$

$$\beta(D, f) \leqslant \begin{cases} \pi\lambda, \ \lambda \geqslant 0{,}5, \text{ и } 0 < \lambda < 0{,}5, \ \sin\frac{\pi\lambda}{2} \geqslant \sqrt{0{,}5} \\ \pi\lambda\,[\operatorname{ctg}\pi\lambda + \operatorname{tg} 0{,}5\,\pi\lambda]; \ 0 < \lambda < 0{,}5, \ \sin\frac{\pi\lambda}{2} < \sqrt{0{,}5} \end{cases} \tag{1}$$

(см. [1] с. 110). Обозначим $\Omega(f) = \{S \in Q : \beta(D_S, f) > 0\}$.

Теорема. *Если f — конечного нижнего порядка, то множество $\Omega(f)$ не более чем счетно, причем для любого* $\varepsilon > 0$ $\sum_{\Omega(f)} (\beta \times (D_S, f))^{4+\varepsilon} < \infty$ **(2)**. Известно [1, с. 112], что если M — проективное пространство, а $\{D_S\}$ — система гиперплоскостей в общем положении, то $4 + \varepsilon$ в (2) можно заменить на 1. Если нижний порядок бесконечен, то $\Omega(f)$ может быть несчетным даже в случае, когда $M = \overline{C}$ (см. [2] гл. III).

Доказательство. Ограничимся для простоты случаем, когда $\lambda \geqslant 0{,}5$. Фиксируем конечное множество $\{S_1, \ldots, S_\omega\} \subset \Omega(f)$. Положим $u_j(z) = -\log|S_j(f(z))|$, $j = 1, \ldots, \omega$. Выберем какую-нибудь функцию $\Lambda(r) \to \infty$, $r \to \infty$, $\Lambda(r) = 0(T(r))$ и положим $E_j(r) = \{\theta \in [0, 2\pi] : u_j(re^{i\theta}) \geqslant \Lambda(r)\}$. В силу того, что рассматриваемые дивизоры имеют нормальное пересечение, пересечение любых $p+1$ множеств $E_j(r)$ пусто при $r > r_0$. Отсюда легко следует, что $\sum_{j=1}^{\omega} E_j(r) \leqslant 2\pi p$, $r > r_0$ **(3)** [3, с. 1021].

Пусть задано $\varepsilon > 0$. Рассмотрим последовательность пиков Пойа S_k для фун ции $T(r)$. Это означает, что $T(r) \leqslant T(S_k) \times \left(\frac{r}{S_k}\right)^{\lambda+\varepsilon}$, $0{,}5\,S_k \leqslant r \leqslant R_k$, $\frac{R_k}{S_k} \to \infty$, $k \to \infty$, где λ — нижний порядок f.

Обозначим $I_k = \int_{2S_k}^{0{,}5R_k} T(t)\, t^{-1-\lambda}\, dt$. Пусть $D_j = D_{S_j}$; имеет место формула (см. [2], с. 112). $L(r, D_j) \leqslant I_1(R, r, x, D) + I_2(R, r, x, D)$ **(4)**, где $x = \frac{\pi}{2\alpha}$, $0 < \alpha < \pi$, $R > 1$, $0 < r < R$, причем $I_1 \times (R, r, x, D) = (2x)^2 r^{2x} \int_0^R \frac{m(t, D_j, f)\, t^{2x-1}}{(t^{2x} + r^{2x})^2}\, dt$; $\int_{2S_k}^{0{,}5R_k} I_1(R, r, x, D_j) \times$

$\times r^{-1-\lambda}\,dr \leqslant \frac{\pi\lambda}{\sin\frac{\pi\lambda}{2x}} \int\limits_{2S_k}^{0,5R_k} m(t,\ D_j,\ f) t^{-1-\lambda}\,dt + o(I_k),\ \ k \to \infty$ **(5)**; $\int\limits_{2S_k}^{0,5R_k} I_2(R,\ r,\ x,\ D_j)\, r^{-1-\lambda}\,dr \leqslant \pi\lambda \operatorname{tg}\frac{\pi\lambda}{4x} I_k + o(I_k),\ \ k \to \infty$ **(6)**; $I_1 \times (R, r, x, D_j) \leqslant I_3(R, r, x)$; **(7)** $\int\limits_{2S_k}^{0,5R_k} I_3(R,\ r,\ x)\, r^{-1-\lambda}\,dr \leqslant \frac{\pi\lambda}{\sin\frac{\pi\lambda}{2x}} I_k + o(I_k),\ k \to \infty$; **(8)** ($I_3$ получается, если в I_1 вместо $m(r,\ D_j)$ подставить $T(r)$). Разделим (4) на $r^{\lambda+1}$, проинтегрируем от $2S_k$ до $0,5R_k$, воспользуемся неравенствами (5), (6) $L(r,\ D_j) \leqslant (\beta \times (D_j) + o(1))\, T(r),\ r \to \infty$. После преобразований $\left(\frac{\sin\frac{\pi\lambda}{2x}}{\pi\lambda}\beta(D_j) + \cos\frac{\pi\lambda}{2x} - 1\right) I_k \leqslant \int\limits_{2S_k}^{0,5R_k} m(t,\ D_j) t^{-1-\lambda} dt + o(I_k),\ k \to \infty$ **(9)**. Беря в левой части равенства максимум, с учетом $\beta \leqslant \pi\lambda$ (это следует из (1) при условии, что $\lambda \geqslant 0,5$), получаем $c(\lambda)\beta^2(D_j)\, I_k \leqslant$

$$\leqslant \int\limits_{2S_k}^{0,5R_k} I_3(R,\ t,\ x)\, E_j(t) t^{-1-\lambda}\,dt + 2\pi^2\lambda \operatorname{tg}\frac{\pi\lambda}{4x} I_k + o(I_k),\ \ k \to \infty \quad \textbf{(10)}.$$

Из определения $E_j(r)$, (4), (7), следует $m(t,\ D_j) \leqslant L(t,\ D_j) E_j \times (t) + o(T(t)) \leqslant I_1(R,\ t,\ x,\ D_j) E_j(t) + 2\pi I_2(R,\ t,\ x,\ D_j) + o(T \times (t)) \leqslant I_3(R,\ t,\ x) E_j(t) + 2\pi I_2(R,\ t,\ x,\ D_j) + o(T(t))$. Подставив это в (10) и используя (6), запишем $c(\lambda)\beta^2(D_j) I_k \leqslant \int\limits_{2S_k}^{0,5R_k} I_3\ (R,\ t,\ x)\, E_j(t) t^{-1-\lambda} dt + 2\pi^2\lambda \operatorname{tg}\frac{\pi\lambda}{4x} I_k + o(I_k),\ \ k \to \infty$. Суммируя по j от 1 до ω, учитывая (3), (8), получаем $c(\lambda)\, I_k \sum\limits_{j=1}^{\omega} \beta^2(D_j) \leqslant (2p\pi \times \frac{\pi\lambda}{\sin\frac{\pi\lambda}{2x}} + 2\omega\pi^2 \operatorname{tg}\frac{\pi\lambda}{4x} + o(1))\, I_k \leqslant c(\lambda,\ p)\, (x + \frac{\omega}{x} + o(1))\, I_k,\ k \to \infty$.

Беря в правой части максимум по x и сокращая на I_k, получаем $\sum\limits_{j=1}^{\omega} \beta^2(D_j) \leqslant C(\lambda,\ p) \cdot \sqrt{\omega}$, откуда и следует счетность $\Omega \times (f)$ и сходимость $\sum\limits_{j=1}^{\infty} \beta^{4+\varepsilon}(D_j)$.