УДК 517.521.7

Н. А. ДАВЫДОВ

(A, φ)-МЕТОД СУММИРОВАНИЯ РЯДОВ

1. *Определение* (A, φ)-*метода.* Пусть дана полунепрерывная матрица $A = \|a_k(x)\|$, т. е. последовательность комплекснозначных функций $a_k(x)$ $(k = 0, 1, 2, \ldots)$, определенных в промежутке $[0, \bar{x}_0)$, где $\bar{x}_0$ — конечное число или $+\infty$. Считают [1, с. 70], что числовой ряд $\sum_{n=0}^{\infty} z_n$ (1) или последовательность $S_n = \sum_{k=0}^{n} z_k$ $(n = 0, 1, 2, \ldots)$ (2) суммируется к числу S полунепрерывной матрицей $A = \|a_k(x)\|$ (или (A)-методом) и записывают $\sum_{n=0}^{\infty} z_n = S(A)$ или $\lim_{n\to\infty} S_n = S(A)$, если ряд $t(x) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k(x) S_k$ (3) сходится для $x \in [0, \bar{x}_0)$ и существует конечный предел $\lim_{x\to\bar{x}_0-0} t(x) = S$ (4). Пусть $\varphi(x)$ — действительная функция, определенная в промежутке $[0, \bar{x}_0)$, $\varphi(x) \geqslant 0$, $\lim_{x\to\bar{x}_0-0} \varphi(x) = +\infty$.

Введем следующее определение.

Определение. *Будем говорить, что ряд (1) или последовательность (2) суммируется к числу S $(A,\ \varphi)$-методом, если* $t(x,\ \varphi) \equiv \sum_{k=0}^{[\varphi(x)][1]} a_k(x) S_k \to S\,(x \to \bar{x}_0 - 0)$, запишем $\sum_{n=0}^{\infty} z_n = S\,((A, \varphi))$ или $\lim_{n\to\infty} S_n = S\,((A,\ \varphi))$.

2. *Консервативность и регулярность $(A,\ \varphi)$-метода.* Метод суммирования называется консервативным (регулярным), если он суммирует каждую сходящуюся последовательность (к ее пределу).

Теорема 1. *Для того, чтобы $(A,\ \varphi)$-метод был консервативным, необходимо и достаточно, чтобы выполнялись следующие три условия:*

1) $\sum_{k=0}^{[\varphi(x)]} |a_k(x)| \leqslant H < +\infty$ для $0 \leqslant x_0 \leqslant x < \bar{x}_0$,

где H не зависит от x;

2) $\lim_{x\to\bar{x}_0-0} a_k(x) = \alpha_k$

для каждого фиксированного $k = 0,\ 1,\ 2,\ \ldots;$

3) $\sum_{k=0}^{[\varphi(x)]} a_k(x) \equiv \tau(x) \to a\,(x \to \bar{x}_0 - 0)$.

Если $\lim_{n\to\infty} S_n = S$, то $\lim_{n\to\infty} S_n = Sa + \sum_{k=0}^{\infty} (S_k - S)\,\alpha_k\,((A,\ \varphi))$.

Теорема 2. *Для того, чтобы $(A,\ \varphi)$-метод был регулярным, необходимо и достаточно, чтобы выполнялись три условия:*

1) $\sum_{k=0}^{[\varphi(x)]} |a_k(x)| \leqslant H < +\infty$ для $0 \leqslant x_0 \leqslant x < \bar{x}_0$,

где H не зависит от x;

2) $\lim_{x\to\bar{x}_0-0} a_k(x) = 0$ для каждого фиксированного $k = 0,\ 1,\ 2,\ \ldots;$

3) $\sum_{k=0}^{[\varphi(x)]} a_k(x) \equiv \tau(x) \to 1\,(x \to \bar{x}_0 - 0)$.

Теоремы 1 и 2 являются соответственно теоремами Кожима-Шура [2, с. 74] и Сильвермана-Теплица [2, с. 79] для специальной полунепрерывной матрицы $A^* = \| a_k^*(x) \|$ с функциями $a_k^*(x)$, определяемыми равенствами

$$a_k^*(x) = \begin{cases} a_k(x), & \text{если } k \leqslant [\varphi(x)], \\ 0, & \text{если } k > [\varphi(x)]. \end{cases}$$

Выбор этой специальной матрицы определяется заданной функцией $\varphi(x)$.

Замечание. Если каждая из функций $a_k(x)$ ограничена на каждом отрезке $[0;\ b]$ $(b < \bar{x}_0)$, т. е. $|a_k(x)| \leqslant C(k,\ b)$ для $x \in [0;\ b]$,

[1] $[\varphi(x)]$ — целая часть числа $\varphi(x)$.

где константа C зависит от k и b, то условие 1) в теоремах 1 и 2 можно заменить условием

1') $\sum_{k=0}^{[\varphi(x)]} |a_k(x)| \leqslant H < +\infty$ для $x \in [0; \bar{x}_0)$,

где H не зависит от x.

Действительно, допустим, что 1') неверно. Тогда для любого натурального числа n найдется точка $x_n \in [0; \bar{x}_0)$ такая, что

$$\sum_{k=0}^{[\varphi(x_n)]} |a_k(x_n)| > n. \tag{5}$$

Покажем, что $x_n \to \bar{x}_0 (n \to \infty)$. В противном случае существует подпоследовательность $x_{n_i} \to \alpha < \bar{x}_0 (i \to \infty)$. Тогда $\sup\limits_{(i)}\{x_{n_i}\} = \alpha' < \bar{x}_0$; $\varphi(x_{n_i}) \leqslant H_1 (i = 1, 2, \ldots)$; $\sum_{k=0}^{[\varphi(x_n)]} |a_k(x_{n_i})| \leqslant \sum_{k=0}^{[H_1]} |a_k(x_{n_i})| \leqslant \sum_{k=0}^{[H_1]} \operatorname{Sup}_{0 \leqslant x \leqslant \alpha'} |a_k(x)| = C < +\infty$, что противоречит (5). Теперь имеем $x_n \to \bar{x}_0 (n \to \infty)$, $\sum_{k=0}^{[\varphi(x_n)]} |a_k(x_n)| \to +\infty (n \to \infty)$. Существует сходящаяся последовательность $\{S_n\}$ [1, с. 65—66], которую конечнострочная дискретная матрица $A_1 = \|a_{nk}\|$, где $a_{nk} = a_k(x_n)$ $(n = 0, 1, 2, \ldots, k = 0, 1, 2, \ldots, [\varphi(x_n)])$ преобразует в неограниченную последовательность $t_n = \sum_{k=0}^{[\varphi(x_n)]} a_{nk} S_k (n = 0, 1, 2, \ldots)$ и, следовательно, для этой последовательности $\{S_n\}$ функция $t(x, \varphi) = \sum_{k=0}^{[\varphi(x)]} a_k(x) S_k$ при $x \to \bar{x}_0 - 0$ не будет иметь конечного предела при $x \to \bar{x}_0 - 0$. Этим доказана необходимость условия 1').

Последовательность функций $a_k(x) = (1 - x) x^k (k = 0, 1, 2, \ldots, 0 \leqslant x < 1)$ задает полунепрерывный регулярный положительный метод суммирования последовательностей, называемый методом Абеля-Пуассона. Матрица $A = \|a_k(x)\|$ вместе с функцией $\varphi_1(x) = \frac{1}{(x-1)^{2/3}}$ задает (A, φ_1) — метод суммирования, средние которого запишутся так: $t(x, \varphi_1) = \sum_{k=0}^{[\varphi_1(x)]} a_k(x) S_k = (1 - x) \sum_{k=0}^{[\varphi_1(x)]} S_k x^k$. Так как $a_k(x) \geqslant 0$ для $x \in [0; 1)$ и $k = 0, 1, 2, \ldots$, $\lim\limits_{x \to 1-0} a_k(x) = 0 (k = 0, 1, 2, \ldots)$, $\sum_{k=0}^{[\varphi_1(x)]} a_k(x) = (1 - x) \sum_{k=0}^{[\varphi_1(x)]} x^k = 1 - x^{[\varphi_1(x)]+1} = 1 - ((1 + (x - 1))^{\frac{1}{x-1}})^{(x-1)([\varphi_1(x)]+1)} \to 0 (x \to 1 - 0)$, то (A, φ_1) — метод консервативен. Он суммирует к нулю всякую ограниченную последовательность, чего не делает метод Абеля—Пуассона. Если функция $\varphi_2(x)=\frac{1}{(x-1)^2}$, то $(A,\ \varphi_2)$-метод будет регулярным.

3. *Условие полной неэффективности $(A,\ \varphi)$-метода.* Метод суммирования называется неэффективным на некотором множестве последовательностей, если он не суммирует ни одной последовательности из этого множества.

Лемма 1. *$(A,\ \varphi)$-метод не суммирует ни одной неограниченной последовательности, если*

$$\varliminf_{x\to\bar{x}_0-0}\Big(|a_{[\varphi(x)]}(x)|-\sum_{k=0}^{[\varphi(x)]-1}|a_k(x)|\Big)>0 \tag{6}$$

и $[\varphi(x)]$ для $x\in[x_0'',\ \bar{x}_0)$ принимает все натуральные значения, начиная с некоторого.

Доказательство. Пусть последовательность $\{S_n\}$ не ограничена. Возьмем такую подпоследовательность $\{S_{n_k}\}$, для которой $\max\limits_{0<n<n_k}|S_n|=|S_{n_k}|\to+\infty\ (k\to\infty)$. Так как $[\varphi(x)]$ для $x\in[x_0'';\ x_0)$ принимает все натуральные числа, начиная с некоторого, то для $k>k_0$ найдется точка $x_k\in[x_0'';\ \bar{x}_0)$ такая, что $\varphi(x_k)=n_k$, $x_k\to\bar{x}_0\ (k\to\infty)$. Имеем $|t(x_k,\varphi)|\geqslant|a_{[\varphi(x_k)]}(x_k)||S_{[\varphi(x_k)]}|-\sum\limits_{\nu=0}^{[\varphi(x_k)]-1}|a_\nu\times$ $\times(x_k)||S_\nu|=|a_{n_k}(x_k)||S_{n_k}|-\sum\limits_{\nu=0}^{n_k-1}|a_\nu(x_k)||S_\nu|\geqslant|S_{n_k}|(|a_{n_k}(x_k)|-$ $-\sum\limits_{\nu=0}^{n_k-1}|a_\nu(x_k)|)\to+\infty\ (k\to\infty)$, и лемма доказана.

Консервативный (регулярный) метод суммирования называется вполне неэффективным, если он не суммирует ни одной расходящейся последовательности.

Теорема 3. *Консервативный (регулярный) $(A,\ \varphi)$-метод суммирования вполне неэффективен, если $\varphi(x)$-непрерывная функция в промежутке $[x_0'';\ x_0)$ и выполняется условие* (6).

Доказательство. Так как $\varphi(x)$-непрерывная функция в промежутке $[x_0'';\ \bar{x}_0)$, то $[\varphi(x)]$ будет принимать все натуральные значения, начиная с некоторого. По лемме 1 $(A,\ \varphi)$-метод не будет суммировать ни одной неограниченной последовательности. Покажем, что он не будет суммировать и ни одной расходящейся ограниченной последовательности. Предположим, что $(A,\ \varphi)$-метод, удовлетворяющий условиям теоремы, суммирует некоторую ограниченную расходящуюся последовательность $\{S_n\}$. Предположим, что все члены последовательности $\{S_n^*\}$ принадлежат ядру $K(S)$ этой последовательности. В самом деле, если бы это было не так, то последовательность $\{S_n\}$ можно было бы представить в виде суммы двух последовательностей $S_n=$ $=S_n^*+\alpha_n\ (n=0,\ 1,\ 2,\ \ldots)$ таких, что члены последовательности $\{S_n^*\}$ принадлежат ее ядру $K(S^*)$ и $\alpha_n \to 0\ (n \to \infty)$. В качестве $\{S_n^*\}$ можно взять $S_n^* = \begin{cases} S_n, & \text{если } S_n \in R(S), \\ S_n - \alpha_n, & \text{если } S_n \notin R(S), \end{cases}$ где $|\alpha_n|$ равен расстоянию от точки S_n до ядра $R(S)$. Так как ядром ограниченной последовательности является наименьшее замкнутое выпуклое множество, содержащее все ее частичные пределы, то $\alpha_n \to 0\ (n \to \infty)$, $S_n^* \in R(S^*) = R(S)\ (n = 0, 1, 2, \ldots)$. Так как $t(x, \varphi) = \sum_{k=0}^{[\varphi(x)]} a_k(x) S_k = \sum_{k=0}^{[\varphi(x)]} a_k(x) S_k^* + \sum_{k=0}^{[\varphi(x)]} a_k(x) \alpha_k$ и $\sum_{k=0}^{[\varphi(x)]} a_k(x) \times \alpha_k \to \alpha\ (x \to \bar{x}_0 - 0)$, $\sum_{k=0}^{[\varphi(x)]} a_k(x) S_k \to S'\ (x \to x_0 - 0)$, то расходящаяся ограниченная последовательность $\{S_n^*\}$ суммируется (A, φ)-методом и $S_n^* \in R(S^*)\ (n = 0, 1, 2, \ldots)$. Далее, число S, к которому последовательность $\{S_n\}$ суммируется (A, φ)-методом, можем считать равным нулю, так как в противном случае мы рассмотрели бы расходящуюся последовательность $V_n = S_n - \frac{S}{a}\ (n = 0, 1, 2, \ldots)$, (где число $a = \lim\limits_{x \to \bar{x}_0 - 0} \sum_{k=0}^{[\varphi(x)]} a_k(x)$, в силу (6), отлично от нуля), все члены которой принадлежат ее ядру $R(V)$ и которая суммируется (A, φ)-методом к нулю. Итак, можем предполагать, что (A, φ)-метод суммирует к нулю расходящуюся ограниченную последовательность $\{S_n\}$, все члены которой принадлежат ее ядру. Рассмотрим число $d = \max\limits_{z \in F} |z|$, где F — множество всех крайних точек ядра $R(S)$. Нетрудно видеть, что F — замкнутое множество, поэтому $d = |z^*|$, где z^* крайняя точка ядра $R(S)$, и, следовательно, точка z^* является частичным пределом последовательности $\{S_n\}$. Пусть $S_{n_k} \to z^*\ (k \to \infty)$, тогда в силу непрерывности функции $\varphi(x)$ в промежутке $[x_0''; \bar{x}_0)$ для $k > k_0$ найдется точка $x_k \in [x_0''; \bar{x}_0)$, в которой $\varphi(x_k) = n_k\ (k > k_0)$. Имеем $t(x_k; \varphi) = \left|\sum_{\nu=0}^{[\varphi(x_k)]} a_\nu(x_k) S_\nu\right| \geqslant |a_{n_k}(x_k)|\,|S_{n_k}| - \sum_{\nu=0}^{n_k - 1} |a_\nu(x_k)|\,|S_\nu| \geqslant |a_{n_k}(x_k)|\,|S_{n_k}| - d \sum_{\nu=0}^{n_k - 1} |a_\nu(x_k)| = d\left(|a_{n_k}(x_k)| - \sum_{\nu=0}^{n_k - 1} |a_\nu(x_k)|\right) + o(1)$ и так как $d > 0$, $x_k \to \bar{x}_0$, то $\varliminf\limits_{k \to \infty} |t(x_k, \varphi)| \geqslant d \varliminf\limits_{k \to \infty} \left(|a_{n_k}(x_k)| - \sum_{\nu=0}^{n_k - 1} |a_\nu(x_k)|\right) > 0$, что противоречит равенству $\lim\limits_{x \to \bar{x}_0 - 0} t(x, \varphi) = \lim\limits_{x \to \bar{x}_0 - 0} \sum_{k=0}^{[\varphi(x)]} a_k(x) S_k = S = 0$. Теорема доказана. Она является аналогом известных теорем Агнью [5], а также [2, с. 379], Виланского и Целлера [6].

4. *Ограниченная неэффективность* (A, φ)-*метода*. Консервативный (регулярный) метод суммирования называется ограниченно неэффективным, если он не суммирует ни одной ограниченной расходящейся последовательности. Матрица $A = \|a_k(x)\|$ называется положительной, если $a_k(x) \geqslant 0$ для всех $x \in [0; \bar{x}_0)$ и всех $k = 0, 1, 2, \ldots$. Для регулярных положительных полунепрерывных матриц $A = \|a_k(x)\|$ справедлива теорема Кноппа, утверждающая о том, что ядро последовательности (2) содержит ядро функции $t(x)$ (3) [2, с. 161—162]. Нетрудно убедиться в том, что эта теорема Кноппа справедлива и для (A, φ)-метода суммирования рядов: если (A, φ)-метод регулярен и положителен, то ядро функции $t(x, \varphi) = \sum\limits_{k=0}^{[\varphi(x)]} a_k(x) S_k$ содержится в ядре последовательности $\{S_k\}$.

Теорема 4. *Консервативный (регулярный) положительный* (A, φ)-*метод ограниченно неэффективен, если выполняются следующие три условия:*
1) *функция* $\varphi(x)$ *непрерывна и возрастает в промежутке* $[x_0''; \bar{x}_0)$, 2) $a_k(x)$ $(k = 0, 1, 2, \ldots)$ — *монотонно невозрастающие функции в промежутке* $[x_0''; \bar{x}_0)$ *и* $a_n(\varphi^{-1}(n)) - a_n(\varphi^{-1}(n+1)) \geqslant \geqslant \alpha > 0$ $(n > n_0)$, *где* α *не зависит от* n, 3) *существует натуральное число* p *такое, что* $a_{[\varphi(x)]-p}(x) + a_{[\varphi(x)]-p+1}(x) + \ldots + a_{[\varphi(x)]}(x) \geqslant \theta > \frac{a}{2}$ $(x_0'' \leqslant x < \bar{x}_0)$ (7), где $a = \lim\limits_{x \to x_0} \sum\limits_{k=0}^{[\varphi(x)]} a_k(x)$, а числа p и θ не зависят от x.

Доказательство. Так как $\varphi(x)$ — возрастающая непрерывная функция в промежутке $[x_0''; \bar{x}_0)$, то для натурального числа $n (n > n_0)$ найдется точка $x_n \in [x_0''; \bar{x}_0)$ такая, что $\varphi(x_n) = n$. Обозначим $a_{nk} = a_k(x_n)$ $(k = 0, 1, 2, \ldots, n)$. Тогда $A^* = \|a_{nk}\|$ — нижняя треугольная положительная консервативная матрица, удовлетворяющая следующим двум условиям: 1') $a_{nk} \geqslant a_{n+1k}$ $(k = 0, 1, 2, \ldots, n-1)$, $a_{nn} - a_{n+1n} \geqslant \alpha > 0$ $(n > n_0)$, 2') $a_{nn-p} + a_{nn-p+1} + \ldots + a_{nn} \geqslant \theta > \frac{a}{2}$ $(n > n_0)$. По теореме 1 работы [4] эта матрица $A^* = \|a_{nk}\|$ ограниченно неэффективна. Так как $x_n \to \bar{x}_0$ $(n \to \infty)$, то и (A, φ)-метод не будет суммировать ни одной расходящейся ограниченной последовательности. Теорема доказана. Теорема 4 является аналогом теоремы 1 работы [4].

Лемма 2. *Положительный* (A, φ)-*метод суммирования, удовлетворяющий условию* (7) *с функцией* $\varphi(x)$, *непрерывной в промежутке* $[x_0''; \bar{x}_0)$, *не суммирует неограниченную последовательность* $S_n = \sum\limits_{k=0}^{n} a_k$ $(n = 0, 1, 2, \ldots)$, *для которой* $a_k = 0(1)$.

Доказательство Так как $\varphi(x)$-непрерывная функция в промежутке $[x_0''; \bar{x}_0)$, то для $n > n_0$ найдется точка $x_n \in [x_0''; x_0)$

такая, что $\varphi(x_n)=n$. Обозначим $a_{nk}=a_k(x_n)$ $[k=0,\ 1,\ \ldots,\ n)$. Матрица $A^*=\|a_{nk}\|$ — нижняя треугольная положительная матрица, удовлетворяющая условию $a_{nn-p}+a_{nn-p+1}+\ldots+a_{nn}\geqslant \geqslant\theta>\frac{a}{2}$, где $a=\lim\limits_{n\to\infty}\sum\limits_{k=0}^{n}a_{nk}>0$. По лемме 2 работы [3], она не суммирует неограниченную последовательность $S_n=\sum\limits_{k=0}^{n}a_k$, для которой $a_k=0(1)$. Так как $x_n\to\bar{x}_0$ $(n\to\infty)$, то такая последовательность $\{S_k\}$ не может суммироваться и $(A,\ \varphi)$-методом, удовлетворяющим условию леммы 2.

Следствие 1. *Если ряд* $\sum\limits_{n=0}^{\infty}z_n$ *суммируется положительным консервативным* $(A,\ \varphi)$*-методом, удовлетворяющим трем условиям теоремы 4, и если* $z_n=0(1)$, *то* $\sum\limits_{n=0}^{\infty}z_n=S$. Справедливость следствия вытекает из теоремы 4 и леммы 2.

5. *Неэффективность* $(A,\ \varphi)$*-метода на некотором множестве последовательностей.* Точка z_0 комплексной плоскости называется [3, с. 723] (p)-точкой последовательности $\{S_n\}$, если для любого числа $\varepsilon>0$ существуют последовательности $\{n_k\}$ и $\{m_k\}$ натуральных чисел, для которых $|S_n-z_0|\leqslant\varepsilon$ при $n_k\leqslant n\leqslant \leqslant m_k (k=1,\ 2,\ \ldots)$, где $n_k\leqslant m_k<n_{k+1}$, $m_k-n_k\geqslant p$, p — целое неотрицательное число.

Теорема 5. *Консервативный (регулярный) положительный* $(A,\ \varphi)$*-метод, удовлетворяющий условию* (7), *с функцией* $\varphi(x)$, *непрерывной в промежутке* $[x_0'';\ \bar{x}_0)$, *не суммирует ограниченную расходящуюся последовательность* $\{S_k\}$,, *у которой концы какого-нибудь диаметра ее ядра* $R(S)$ *являются* (p)*-точками этой последовательности.*

Доказательство. В силу непрерывности функции $\varphi(x)$ в промежутке $[x_0'';\ \bar{x}_0)$ для натурального числа $n>n_0$ найдется точка $x_n\in[x_0'';\ \bar{x}_0]$ такая, что $\varphi(x_n)=n$. Обозначим $a_{nk}=a_k(x_n)$ $(k=0,\ 1,\ 2,\ \ldots,\ n)$. Матрица $A^*=\|a_{nk}\|$ — нижняя треугольная положительная консервативная матрица, которая в силу условия (7) для $n>n_0$ удовлетворяет неравенству $a_{nn-p}+a_{nn-p+1}+ +\ldots+a_{nn}\geqslant\theta>\frac{a}{2}$ $(n>n_0)$. Эта матрица по теореме 1 работы [3] не суммирует ограниченной расходящейся последовательности $\{S_k\}$, у которой концы какого-нибудь диаметра ее ядра $R(S)$ являются (p)-точками этой последовательности. Так как $\lim\limits_{n\to\infty}x_n= =\bar{x}_0$, то такая последовательность не будет суммироваться и $(A,\ \varphi)$-методом, удовлетворяющим условию теоремы.

Следствие 2. *Если положительный консервативный (регулярный)* $(A,\ \varphi)$*-метод, удовлетворяющий условию* (7), *с функ-*

цией $\varphi(x)$, *непрерывной в промежутке* $[x_0''; \bar{x}_0)$, *суммирует ряд* $\sum_{k=0}^{\infty} z_k$, *у которого* $z_k = 0(1)$, то $\sum_{k=0}^{\infty} z_k = S$.

Следствие 3. *Если положительный консервативный (регулярный)* (A, φ)*-метод, удовлетворяющий условию* (7), *с функцией* $\varphi(x)$, *непрерывной в промежутке* $[x_0''; x_0)$, *суммирует ряд* $\sum_{k=0}^{\infty} z_k$, *у которого* $z_k = 0$ *для* $k \neq k_n$, $z_{k_n} = 0(1)$, $k_{n+1} - k_n \geqslant p + 1$ $(n = 1, 2, \ldots)$, *то* $\sum_{k=0}^{\infty} z_k = S$. Справедливость следствий 2—3 вытекает из теоремы 5 и леммы 2. Теорема 5 является аналогом теоремы 1 работы [3].

6. *Регулярный положительный* (A, φ)*-метод, сохраняющий ядро ограниченной последовательности.* Точка z_0 комплексной плоскости называется [3, с. 723] (d)-точкой последовательности $\{S_n\}$, если для любого $\varepsilon > 0$ существует последовательность отрезков $[n_k; m_k]$ $(k = 1, 2, \ldots)$ чисел натурального ряда, для которой $|S_n - z_0| \leqslant \varepsilon$ при $n \in [n_k; m_k]$, $n_k < m_k < n_{k+1}$ $(k = 1, 2, \ldots)$, причем $m_k - n_k \to \infty$ $(k \to \infty)$.

Теорема 6. *Если регулярный положительный* (A, φ)*-метод с функцией* $\varphi(x)$, *непрерывной в промежутке* $[x_0''; x_0)$, *обладает следующим свойством: для любого числа* $\varepsilon > 0$ $(0 < \varepsilon < 1)$ *существует целое неотрицательное число* $p(\varepsilon)$, *для которого при* $x \in [x_0''; \bar{x}_0)$ *справедливо неравенство*

$$a_{[\varphi(x)]-p}(x) + a_{[\varphi(x)]-p+1}(x) + \cdots + a_{[\varphi(x)]}(x) > 1 - \varepsilon, \qquad (8)$$

то такой (A, φ)-метод сохраняет ядро всякой ограниченной последовательности $\{S_k\}$, для которой каждая крайняя точка ее ядра будет ее (d)-точкой.

Доказательство. В силу непрерывности функции $\varphi(x)$ в промежутке $[x_0''; \bar{x}_0)$ для натурального числа $n > n_0$ найдется точка $x_n \in [x_0''; \bar{x}_0)$ такая, что $n = \varphi(x_n)$. Обозначим $a_{nk} = a_k \times (x_n)$ $(k = 0, 1, 2, \ldots, n)$. Матрица $A^* = \|a_{nk}\|$ — нижняя треугольная положительная регулярная матрица, которая в силу условия (8) будет удовлетворять неравенству $a_{nn-p} + a_{nn-p+1} + \ldots + a_{nn} > 1 - \varepsilon$. Эта матрица будет удовлетворять всем условиям теоремы 4 работы [3]. По этой теореме эта матрица $A^* = \|a_{nk}\|$ сохраняет ядро всякой ограниченной последовательности $\{S_k\}$, для которой каждая крайняя точка ее ядра будет ее (d)-точкой. Так как $x_n \to x_0$ $(n \to \infty)$ и так как для регулярного положительного (A, φ)-метода справедлива теорема Кноппа (см. пункт 4), то и (A, φ)-метод, удовлетворяющий условиям теоремы, будет сохранять ядро всякой ограниченной последовательности $\{S_k\}$, для которой каждая крайняя точка ее ядра будет ее (d)-точкой.

Замечание. Если $S_k = \sum_{k=0}^{n} z_k$ и $z_k \to 0\,(k \to \infty)$, то каждый частичный предел ограниченной последовательности $\{S_n\}$ будет ее (d)-точкой. Теорема 6 является аналогом теоремы 4 работы [3].

Следствие 4. *Какова бы ни была ограниченная последовательность* $\{S_k\}$, *ее разбавление* $S_0, S_1, S_2, S_2, S_3, S_3, S_3, \ldots, \underbrace{S_n, S_n, S_n, \ldots, S_n}_{n \text{ раз}}, \ldots$ (9) не будет суммироваться положительным консервативным (A, φ)-методом с функцией $\varphi(x)$, непрерывной в промежутке $[x_0'', \bar{x}_0)$, удовлетворяющим условию (7) при какой-нибудь $p \geqslant 0$, а регулярный положительный (A, φ)-метод с функцией $\varphi(x)$, непрерывной в промежутке $[x_0''; \bar{x}_0)$, удовлетворяющий условию (8), будет сохранять ядро последовательности (9). Справедливость следствий вытекает из теорем 5 и 6.

Список литературы: 1. *Харди Г.* Расходящиеся ряды. —М.: Изд-во иностр. лит., 1951. — 504 с. 2. *Кук Р.* Бесконечные матрицы и пространства последовательностей. —М.: Физматгиз, 1960. — 471 с. 3. *Давыдов Н. А.* Консервативные положительные матричные методы суммирования, неэффективные на некоторых множествах последовательностей. —Укр. мат. журн., т. 20, № 6, 1978, с. 723—736. 4. *Давыдов Н. А.* Консервативные положительные матричные методы суммирования, неэффективные на классах последовательностей. — Укр. мат. журн., т. 32, № 2, 1980, с. 155—159, 194, 288. 5. *Агнью* (*Agnew R.*). Equivalence of methods for eva luation of sequences. Proc. Amer. Math. Soc., 3 (1952), 550—565. 6. *Wilansky A.*, *Zeller K.* Summation of bounded divergent sequences, topological methods. Trans. Amer. Math. Soc., 78, № 2, 1955.

Поступила в редколлегию 15.12.80.