УДК 517.4

И. Д. ЧУЕШОВ

ЗАМЕЧАНИЕ О НЕУСТОЙЧИВЫХ РЕГУЛЯРИЗАЦИЯХ ОПЕРАТОРА ШРЕДИНГЕРА С СИНГУЛЯРНЫМ ОТТАЛКИВАЮЩИМ ПОТЕНЦИАЛОМ.

1. Гамильтониан квантовой системы $H_\lambda = H_0 + \lambda V$ в случае высокосингулярных потенциалов V приходится определять как предел регуляризированных операторов вида $H_0 + \lambda V_n$, где $\{V_n\}$ — некоторое семейство ограниченных потенциалов, сходящееся в каком-либо смысле к V [1]. При этом возникает вопрос об устойчивости регуляризации, т. е. стремится ли при $\lambda \to +0$ динамика системы, описываемой гамильтонианом H_λ к свободной? Ведь известно [2], что в одномерной квантовой системе с потенциалом $V(x) = |x|^{-\alpha}$, $\alpha > 2$, устойчивых регуляризаций не существует (это явление принято называть эффектом Клаудера). Вместе с тем в работах автора [3, 4] было показано, что для d-мерного ($d \geqslant 2$) N-частичного ($N \geqslant 1$) оператора Шредингера эффект Клаудера возникнуть не может, если гриновская емкость множества S сингулярностей потенциала взаимодействия равна

нулю (это условие будет выполнено, например, если S лежит на каком-либо гладком компактном многообразии коразмерности 2).

В статье доказано, что у многомерного оператора Шредингера эффект Клаудера тем не менее возникает, если множество сингулярностей потенциала содержит гладкое многообразие коразмерности 1. Вместе с полученными ранее результатами [3, 4] это дает некоторый критерий существования (или отсутствия) эффекта Клаудера в квантовой системе с конечным числом степеней свободы.

2. Напомним некоторые обозначения и определения. Пусть $(-H_0)$ — оператор Лапласа с естественной областью определения в $L^2(R^d)$ $d \geqslant 1$, $V(x)$ — неотрицательный потенциал с множеством сингулярностей S.

Последовательность ограниченных потенциалов $\{V_n\}$ называется L^1-регуляризирующей для $V(x)$, если

1) для любого компакта K в $R^d \setminus S$ $\lim\limits_{n\to\infty} \int_K |V_n(x) - V(x)| \times \times dx = 0$;

2) $\exp\{-it(H_0 + \lambda V_n)\}$ при $n \to \infty$ сильно сходится к некоторой группе унитарных операторов $U_\lambda(t) = \exp\{-itH_\lambda\}$, $0 \leqslant \leqslant \lambda \leqslant \lambda_0$.

Оператор H_λ в этом случае называется L^1-регуляризацией оператора $H_0 + \lambda V$. Регуляризация называется положительной, если $V_n(x) \geqslant 0$ почти всюду, начиная с некоторого n_0. Регуляризация называется устойчивой, если $s - \lim\limits_{\lambda \to +0} U_\lambda(t) = U_0(t) = = \exp(-itH_0)$.

Отметим, что выше вместо сходимости экспонент можно требовать сильную сходимость соответствующих резольвент (см. [5]).

Приведенные определения относятся к одночастичному оператору. В случае нескольких частиц они аналогичны [4]. Ниже мы рассматриваем лишь одночастичный случай. Обобщение на многочастичную ситуацию не составляет особого труда (см. следствие теоремы 2).

Пусть S — гладкая поверхность в R^d коразмерности 1, $\mu_S \times \times (dx)$ — мера на S, индуцированная мерой Лебега в R^d и $\sum(S)$ — соответствующая σ-алгебра. Для любого $P \in \Sigma(S)$ определим $P_h = \{x \mid x = x_0 + \tau n_{x_0},\ x_0 \in P,\ |\tau| < h\}$ **(1)**, где n_{x_0} — единичная нормаль к S в точке x_0.

Будем говорить, что S является существенно сингулярным множеством неотрицательного потенциала $V(x)$, если для любого множества $P \in \Sigma(S)$, имеющего положительную поверхностную меру, существует $\delta > 0$ такое, что

$$\lim_{\varepsilon \to 0} \int_{P_\delta \setminus P_\varepsilon} V(x)\, dx = \infty. \qquad (2)$$

Если $\{V_n(x)\}$ L^1 — регуляризирующая последовательность неотрицательных потенциалов для $V(x)$, то из (2) вытекает, что для любого множества $P \in \Sigma(S)$ положительной поверхностной меры существует $\delta > 0$ такое, что

$$\lim_{n\to\infty} \int_{P_h} V_n(x)\,dx = \infty \tag{3}$$

для всех $0 < h < \delta$

3. Основным результатом исследования является следующее описание L^1-регуляризации оператора $H_0 + \lambda V$.

Теорема 1. *Пусть неотрицательный потенциал $V(x)$ лежит в $L^1_{\text{loc}}(R^d \setminus S)$, где S — гладкая компактная поверхность коразмерности 1, имеющая кусочно гладкий компактный край Γ. Предположим также, что S является существенно сингулярным для $V(x)$. Тогда, если $\{V_n(x)\}$ L^1 — регуляризирующая последовательность неотрицательных потенциалов для $V(x)$, то последовательность операторов $H_0 + \lambda V_n$ в сильном резольвентном смысле сходится к оператору $H_\lambda = -\Delta_S + \lambda V(x)$, где Δ_S — оператор Лапласа с условиями Дирихле на S, а сумма понимается в смысле форм.*

Напомним, что оператор Δ_S имеет область определения $H^2 \times (R^d) \cap H^1_0(R^d \setminus S)$. Здесь и далее $H^k(R^d)$ — соболевское пространство порядка k, $H^1_0(R^d \setminus S)$ — множество элементов из $H^1 \times (R^d)$ обращающихся в нуль на поверхности S. Так как $\operatorname{codim} S = 1$, то $H^1_0(R^d \setminus S) \neq H^1(R^d)$.

При доказательстве теоремы мы воспользуемся следующим утверждением о плотности, по существу совпадающим с известной леммой Соболева.

Лемма 1. *Пусть S удовлетворяет условиям теоремы 1. Тогда а) $C_0^\infty(R^d \setminus S)$ плотно в $Q(\Delta_S) = H^1_0(R^d \setminus S)$, б) $C_0^\infty(R^d \setminus S)$ плотно в $Q(\Delta_S) \cap Q(V)$ по норме $|\cdot| = \|(-\Delta_S + \lambda V + 1)^{1/2} \cdot\|$, где $Q(A)$ — область определения полуторалинейной формы, отвечающей оператору A.*

Из леммы 1 легко извлечь, что форм-сумма H_λ при $\lambda \to +0$ в сильном резольвентном смысле сходится к оператору $H_{PF} = -\Delta_S$, т. е. в системе возникает эффект Клаудера.

Доказательство теоремы 1 опирается также на следующее утверждение, принадлежащее Тейлору (см. [6]).

Лемма 2. *Пусть $q(\tau)$ — ограниченная, неотрицательная функция на $[-h, h]$ и пусть $\lambda_h(q) = \inf\{a_h(q, u) \mid u \in C^\infty(-h, -h), \int_{-h}^{h} |u|^2 d\tau = 1\}$, где $a_h(q, u) = \int_{-h}^{h} (|u'|^2 + q\,|u|^2)\,d\tau$. Тогда $\lambda_h(q)^{-1} \leqslant 8h\left(h + \left[\int_{-h}^{h} q(\tau)\,d\tau\right]^{-1}\right)$.*

Доказательство теоремы 1. Пусть $\{V_n\}$ — регуляризирующая последовательность, тогда $w_n = (-\Delta + \lambda V_n + 1)^{-1} f$ сильно сходится к некоторому элементу $u \in L^2(R^d)$. Мы должны доказать, что $u = (-\Delta_S + \lambda V + 1)^{-1} f$, где $-\Delta_S + \lambda V$ — форм-сумма операторов $-\Delta_S$ и λV. Для этого, в силу леммы 1, достаточно показать, что $u \in H_0^1(R^d \setminus S) \cap Q(V)$. Так как $V_n \geqslant 0$ для достаточно больших n, то легко установить, что $u \in H^1(R^d) \cap \cap Q(V)$. Покажем теперь, что сужение функции u на S обращается в нуль. Пусть P — произвольная окрестность на S, диффеоморфная открытому единичному шару K в R^{d-1} (γ — соответствующий диффеоморфизм из P в K). Для достаточно малых h можно γ продолжить до диффеоморфизма $\tilde{\gamma}: P_h \to K_h$, сопоставляя каждой точке вида $x = x_0 + \tau n_{x_0}$, где $x_0 \in P$, n_{x_0} — нормаль к S в x_0, точку $\tilde{\gamma}(x) = (\gamma(x_0), \tau)$. При этом $\det|\tilde{\gamma}'| = \det|\gamma|$. Поэтому для малых $h > 0$ имеем, что

$$\frac{1}{h}\int_{P_h} |w_n|\, dx \leqslant \frac{c}{h}\int_{K_h} |\tilde{w}_h(y, \tau)|\, dy\, d\tau \equiv \frac{c}{h} I_h^n, \tag{4}$$

где $\tilde{f}(y, \tau) = f(\tilde{\gamma}^{-1}(y, \tau))$, константа C от n и h не зависит. Запишем I_h^n в виде

$$I_h^n = \int_k dy\, [a_h(\lambda \tilde{V}_n(y, \cdot) + 1, \tilde{w}_n(y, \cdot))]^{1/2} \times$$
$$\times \frac{\int_{-h}^{h} |\tilde{w}_n(y, \tau)|\, d\tau}{[a_h(\lambda \tilde{V}_n(y, \cdot) + 1, \tilde{w}_n\, y, \cdot)]^{1/2}}.$$

Пользуясь теперь неравенством Буняковского, леммой 2 и свойствами диффеоморфизма $\tilde{\gamma}$, нетрудно показать, что

$$I_h^n \leqslant Ch\left(h + \int_K \left[2h + \lambda \int_{-h}^{h} \tilde{V}_n(y, \tau)\, d\tau\right]^{-1} dy\right)^{1/2}. \tag{5}$$

Но из (3) вытекает, что при $n \to \infty$ для почти всех $y \in K$ $\int_{-h}^{h} \times \times \tilde{V}_n(y, \tau)\, d\tau \to \infty$ **(6)**. Поэтому, переходя в (4) к пределу сначала при $n \to \infty$, а затем при $h \to 0$, с помощью (5) и (6) получаем, что $\int_P |u|\, \mu_S(dx) = 0$.

Отсюда в силу произвольности P имеем, что сужение u на S равно нулю.

Замечание 1. Если ограничиться лишь случаем неубывающих регуляризирующих последовательностей, то теорему 1 можно доказать без обращения к лемме 2. Для этого следует воспользоваться известными теоремами о сходимости монотонной последовательности самосопряженных операторов (см. [5]).

Замечание 2. Из приведенных выше рассуждений ясно, что утверждения леммы 1 и теоремы 1 остаются в силе, если S есть объединение конечного числа поверхностей, удовлетворяющих условиям теоремы 1. Кроме того, если $V(x)$ лежит в $L^2_{\text{loc}} \times$

$\times (R^d \setminus (S \cup S'))$, где S' — компакт нулевой гриновской емкости, отстоящий от S на положительном расстоянии, то, комбинируя теорему 1 и результаты работы [3], можно показать, что $H_{PF} = -\Delta_S$, т. е. остаточные эффекты на редком множестве S' исчезают.

4. Если множество S сингулярностей потенциала $V(x)$ не удовлетворяет условиям теоремы 1 (или замечания 2), а имеет более сложную структуру, то дать полное описание регуляризаций затруднительно. Тем не менее можно указать достаточно общие условия на S, при которых в системе возможен эффект Клаудера, а именно можно доказать следующее утверждение.

Теорема 2. *Пусть S — сингулярное множество потенциала $V(x)$. Предположим, что существует $S' \subset S$, удовлетворяющее условиям теоремы 1 и такое, что для достаточно малых $h > 0$ $S'_h \cap S = S'$. Тогда любая положительная регуляризация оператора $-\Delta + \lambda V$ является неустойчивой, т. е. возникает эффект Клаудера.*

Из этой теоремы легко извлечь

Следствие. *Пусть неотрицательный потенциал $V(x)$ лежит $L^1(R^d \setminus S)$, где S удовлетворяет условиям теоремы 2. Тогда любая положительная регуляризация N — частичного оператора Шредингера.*

$$-\sum_{i=1}^{N} \Delta_{x_i} + \sum_{i \neq j} V(x_i - x_j) \tag{7}$$

является неустойчивой.

Доказательство. Если S' удовлетворяет условиям теоремы 2, то в R^{dN} можно указать множество S'_N, являющееся $(Nd-1)$-мерным многообразием так, что к оператору (7) применима теорема 2.

Список литературы: 1. *Рид М., Саймон Б.* Методы современной математической физики, т. 2. — М.: Мир, 1978.—396 с. 2. *Esawa H., Klauder J. R., Shepp L. A.* Vestigial effects of singular potentials in diffusion theory and quantum mechanics. — J. Math. Phys., 1975, **16**, № 4, р. 783—799. 3. *Чуешов И. Д.* Устойчивость регуляризаций оператора Шредингера с сингулярным отталкивающим потенциалом. — Теор. и мат. физика, 1978, 37, № 2. с. 237—242. 4. *Чуешов И. Д.* Устойчивость регуляризаций оператора Шредингера с сингулярным отталкивающим потенциалом парного взаимодействия. — Теор. и мат. физика, 1980, 43, № 1, с. 57—64. 5. *Като Т.* Теория возмущений линейных операторов. — М.: Мир, 1972.—740 с. 6. *Rauch J., Taylor M.* Potential and scattering theory on wildly perturbed domains. — J. Funct. Anal., 1975, 18, № 1, p. 27—59.

Поступила в редколлегию 09. 03. 81.