УДК 517. 535. 4.

Л. И. БЕЗУГЛАЯ

О ЛОГАРИФМИЧЕСКИ СУБГАРМОНИЧЕСКИХ ФУНКЦИЯХ В КОМПЛЕКСНОЙ ПЛОСКОСТИ, СУММИРУЕМЫХ НА ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНОСТИ ТОЧЕК ВЕЩЕСТВЕННОЙ ОСИ

1. В теории целых функций известен ряд теорем, дающих оценки сверху для целой функции во всей комплексной плоскости в зависимости от ее поведения на последовательности точек. Так, известна теорема М. Картрайт [1]. Пусть $f(z)$ — целая функция экспоненциального типа и пусть $\overline{\lim\limits_{r\to+\infty}} r^{-1}\ln\{|f(ir)|+|f(-ir)|\}\leqslant\sigma$; а $\omega>\sigma$, тогда $\sup\limits_{x\in R}|f(x)|\leqslant C(\sigma,\omega)\cdot\sup\limits_{k\in Z}|f(k\pi/\omega)|$, где $C(\sigma,\omega)<\infty$ — величина, зависящая от σ и ω, но не зависящая от f.

Через $\boldsymbol{R}$ и $\boldsymbol{Z}$ здесь и в дальнейшем обозначим, соответственно, множества вещественных и целых чисел.

В теореме М. Картрайт для целой функции экспоненциального типа дается оценка ее L^∞-нормы на вещественной оси через l^∞-норму на достаточно густой последовательности вещественных точек.

Аналогично теорема Планшереля — Пойя дает для целой функции экспоненциального типа оценку ее L^p-нормы на вещественной оси через l^p-норму на достаточно густой последовательности вещественных точек.

Теорема (Планшерель—Пойя, [2] , п.^{0}, с. 33 — 39). *Пусть* $f(z)$ — *целая функция экспоненциального типа, пусть* $\overline{\lim\limits_{r\to\infty}}\, r^{-1}\ln\{|f(ir)|+|f(-ir)|\}\leqslant\sigma$; $p_0\in(0,\infty)$ — *произвольно, и* $\omega>\sigma$. *Тогда при всех* $p\geqslant p_0$ *выполняется неравенство* $\int\limits_{-\infty}^{\infty}|f(x)|^p dx\leqslant C^p\sum\limits_{k\in\mathbf{Z}}|f(k\pi/\omega)|^p$, *где* $C=C(\sigma, p_0, \omega)<\infty$ — *величина, зависящая от* σ, ω, p_0, *но не зависящая от* p *и* f.

В известных ранее способах получения оценок для целой функции во всей комплексной плоскости через ее значения на последовательности точек использовали средства, специфические для теории аналитических функций, например, разложения функций в интерполяционные ряды. Однако если в соответствующих формулировках фигурируют не сами значения аналитических функций, а лишь абсолютные величины этих значений, то представляется естественным рассмотрение аналогичных вопросов для логарифмически субгармонических функций.

В работах [3, 4] нами были получены теоремы для субгармонических функций, аналогичные теореме М. Картрайт. В настоящей статье, примыкающей к [3]—[4], мы получим для логарифмически субгармонических функций теоремы, аналогичные теореме Планшереля—Пойя.

Теорема 1. *Пусть* $u(z)\not\equiv 0$ — *логарифмически субгармоническая функция в комплексной плоскости экспоненциального типа* $\overline{\lim\limits_{|z|\to\infty}}|z|^{-1}\ln u(z)<\infty$ *и пусть ассоциированная с субгармонической функцией* $\ln u(z)$ *риссовская мера* $d\mu(z)=(2\pi)^{-1}\Delta(\ln u(z))$ *имеет только дискретную компоненту* $d\mu(z)=\sum\limits_j m_j\cdot\delta(z-\lambda_j)$ **(1.1)**, *где* δ — *двумерная* δ-*функция, иными словами* $\delta(z-\lambda_j)$ — *атомная мера единичной величины, сосредоточенная в точке* $z=\lambda_j$, *причем* m_j *отделены от нуля:* $m_j\geqslant\varkappa>0$ **(1.2.)**.

Если $\overline{\lim\limits_{r\to\infty}}\, r^{-1}\ln\{u(ir)+u(ir)\}\leqslant\sigma$ **(1.3)**, *где* $\sigma<\varkappa\omega$ **(1.4)**, *то для любого* $p\in(0,\infty)$ *выполняется неравенство*

$$\int\limits_{x\in\mathbf{R}} u(x)^p dx\leqslant A(\sigma,\varkappa,\omega,p)\cdot\sum_{k\in\mathbf{Z}} u(k\pi/\omega)^p, \tag{1.5}$$

где $A(\sigma,\varkappa,\omega,p)<\infty$ — *величина, зависящая только от* σ, $\varkappa$, ω, p, *но не зависящая от* u. *Более точно для любого* $p_0\in(0,\infty)$ *и для любого* p, $p_0\leqslant p<\infty$ *можно положить* $A(\sigma,\varkappa,\omega,p)=$

$= C^p$ **(1.6)**, *где* $C = C(\sigma/\varkappa\omega,\ p_0)$ — *величина, зависящая только от* p_0 *и отношения* $\sigma/\varkappa\omega$, *конечная при* $p_0 \in (0,\infty)$, $\sigma/\varkappa\omega < 1$.

Теорема Планшереля — Пойя, упомянутая выше, является частным случаем теоремы 1, соответствующим $u(z) = |f(z)|$, где $f(z)$ — целая функция, так как для целой функции риссовская мера, ассоциированная с субгармонической функцией $\ln|f(z)|$, имеет вид (1.1), где m_j — целые, и можно положить в (1.2) $\varkappa = 1$.

2. При доказательстве теоремы 1 этой статьи, как и при доказательстве теоремы 1 работы [3] — [4], важную роль играет вспомогательная функция $S(z)$, с которой сравнивается функция $u(z)$. Функция $S(z)$ строится как потенциал некоторой меры. Для нас важны лишь существование и свойства функции $S(z)$, а не способ построения (построение и исследование свойств функции — в существенном те же, что и в пунктах 1^0, 2^0 работы [3] — [4]), (подробно это проделано в [5]).

Лемма 1. *(Основная лемма о существовании потенциала сравнения).*

Пусть $\omega > 0$, $\varkappa > 0$, $\varepsilon\ (0 < \varepsilon < 1)$, $\delta > 0$ — *заданные числа,* $\boldsymbol{Z} = \boldsymbol{J}_1 \cup \boldsymbol{J}_2$, $\boldsymbol{J}_1 \cap \boldsymbol{J}_2 = \varnothing$ — *разбиение множества* $\boldsymbol{Z}$ *целых чисел на два непересекающихся подмножества* $\boldsymbol{J}_1$ *и* $\boldsymbol{J}_2$ *(возможно* $\boldsymbol{J}_1 = \varnothing$ *или* $\boldsymbol{J}_2 = \varnothing$*). Пусть для каждого* $k \in \boldsymbol{J}_1$ *задана точка* ζ_k *такая, что* $|\zeta_k - k\pi/\omega| < \pi/4\omega$, *а для каждого* $k \in \boldsymbol{J}_2$ — *замкнутое*[1] *множество* γ_k *такое, что* $\gamma_k \cap \{\zeta : |\zeta - k\pi/\omega| = r\} \neq \varnothing$ $(\forall r : 0 \leqslant r < \pi/4\omega)$.

Тогда существует определенная во всей комплексной плоскости функция $S(z)$, *обладающая следующими свойствами:*

а) *функция* $S(z)$ *супергармонична при* $z \bar{\in} \left(\bigcup\limits_{k \in J_1} \{\zeta_k\}\right) \bar{\cup} \left(\bigcup\limits_{k \in J_2} \{\gamma_k\}\right)$;

в) *функция* $S(z) - \varkappa \cdot \ln|z - \zeta_k|$ *супергармонична вблизи точек* $\zeta_k\ (k \in \boldsymbol{J}_1)$;

с) *функция* $S(z)\ (z = x + iy)$ *допускает оценки* $S(z) \leqslant C_1\varkappa + (1 - \varepsilon)\varkappa\omega|y|$ $(\forall z)$ **(2.1)**; $S(z) \geqslant -C_2\varkappa + (1 - \varepsilon)\varkappa\omega|y|$ $\left(z \bar{\in} \bigcup\limits_{k \in J_2} \{\zeta : |\zeta - \zeta_k| \leqslant \delta/\omega)\ (\delta > 0\right)$ **(2.2)**.

Здесь $C_1 < \infty$ — *величина, зависящая лишь от* ε, $C_2 < \infty$ — *зависящая лишь от* ε *и* δ; C_1, C_2 *не зависят от* $\varkappa$, ω, *от разбиения* $\boldsymbol{Z} = \boldsymbol{J}_1 \cup \boldsymbol{J}_2$, *от точек* $\zeta_k\ (k \in \boldsymbol{J}_1)$, *от множеств* $\gamma_k\ (k \in \boldsymbol{J}_2)$.

Мы будем называть функцию $S(z)$ потенциалом сравнения.

Лемма 2. *Пусть* $Q = \{\zeta = \xi + i\eta : a \leqslant \xi \leqslant b,\ c \leqslant \eta \leqslant d\}$ — *прямоугольник такой, что* $K \subset Q \subset S_l$, *где* K — *круг,* $K = \{\zeta : |\zeta| \leqslant 1\}$, S_l — *квадрат,* $S_l = \{\zeta : |\xi| \leqslant L,\ |\eta| \leqslant L\}$. *Пусть* Q_δ — *гомотетичный прямоугольник:* $Q_\delta = \{\zeta : (1 + \delta)a \leqslant \xi \leqslant (1 + \delta)b,\ (1 + \delta)c \leqslant \eta \leqslant (1 + \delta)d\}$, *и пусть* γ, $\gamma \subset K$ — *замкнутое множество, имеющее непустое пересечение с каждой окружностью* $|\zeta| = r$

[1] Будем для простоты считать, что γ_k не содержит иррегулярных точек.

[2] Т. е. гармоническая в $Q_\delta \setminus \gamma$ функция, равная единице на γ и нулю на границе прямоугольника Q_δ (см. с. 9.).

для $0 \leqslant r \leqslant 1$. *Пусть* $\omega(z)$ — *гармоническая мера*[2] *множества* γ *относительно прямоугольника* Q_δ. *Тогда* $\omega(z)$ *оценивается в* Q *снизу:* $\omega(z) \geqslant e^{-cl/\delta}$, *где* $C < \infty$ — *величина, не зависящая от множества* γ, *прямоугольника* Q *и чисел* L, δ.

3. Доказательство теоремы 1. Мы докажем теорему 1 сначала при $p=1$, а затем — в полной общности, сводя случай произвольного $p>0$ к случаю $p=1$. Кроме того, мы сначала докажем неравенство

$$\int_{-\infty}^{\infty} u(x)\,dx \leqslant A(\sigma/\varkappa\omega) \cdot \sum_{k \in Z} u(k\pi/\omega) \tag{3.1}$$

($A(\sigma/\varkappa\omega) < \infty$ при $\sigma/\varkappa\omega < 1$ — величина, не зависящая от u) при априорном предположении конечности интеграла в левой части (3.1). Затем мы освободимся от этого предположения, показав, что из конечности суммы в правой части следует конечность интеграла в левой части.

1^0. Свяжем с функцией $u(z)$, о которой идет речь в условии теоремы 1, потенциал сравнения $S(z)$. Этот потенциал, разумеется, будет зависеть от функции $u(z)$, но будет допускать оценки, зависящие лишь от σ, $\varkappa$, ω, но не от u. Разобьем множество $\boldsymbol{Z}$ целых чисел на два непересекающихся подмножества $\boldsymbol{J}_1$ и $\boldsymbol{J}_2$. Пусть $k \in \boldsymbol{Z}$. Отнесем k к множеству $\boldsymbol{J}_1$, если в круге $\{\zeta : |\zeta - k\pi/\omega| < \pi/4\omega\}$ существует хотя бы одна точка, несущая атом риссовской меры $d\mu(z) = (2\pi)^{-1}\Delta(\ln u(z))$, если же такой точки не существует, отнесем k к множеству $\boldsymbol{J}_2$. Для каждого $k \in \boldsymbol{J}_1$ выберем одну из точек ζ_k, $|\zeta_k - k\pi/\omega| < \pi/4\omega$, несущую атом риссовской меры $d\mu(z)$ (возможный произвол в выборе точек ζ_k безразличен) и зафиксируем этот выбор. Согласно построению и условиям теоремы, каждая точка $\{\zeta_k\}$ несет массу $d\mu$ не меньшую, чем $\varkappa$: $d\mu(\{\zeta_k\}) \geqslant \varkappa$ $(k \in \boldsymbol{J}_1)$ **(3.2)**. Если $k \in \boldsymbol{J}_2$, положим $\gamma_k = \{z : u(z) = u(k\pi/\omega)\} \cap \{z : |z - k\pi/\omega| \leqslant \pi/4\omega\}$.

Весьма существенным для нас будет то, что множество γ_k $(k \in \boldsymbol{J}_2)$ имеет непустое пересечение с каждой окружностью $\{\zeta : |\zeta - k\pi/\omega| = r\}$ для $0 \leqslant r \leqslant \pi/4\omega$. Это свойство множества γ_k следует из гармоничности функции $u(z)$ в круге $\{\zeta : |\zeta - k\pi/\omega| < \pi/4\omega\}$.

Пусть $S(z)$ — потенциал сравнения, обладающий свойствами, описанными в формулировке леммы 1, построенный по этим множествам $\{\zeta_k\}$ $(k \in \boldsymbol{J}_1)$, $\{\gamma_k\}$ $(k \in \boldsymbol{J}_2)$ и числу ε: $\varepsilon = (1 - \delta/\varkappa\omega)/2$ **(3.3)**, где σ, $\varkappa$, ω — фигурируют в условиях теоремы.

Положим $E(z) = \exp\{S(z)\}$; $\Phi(z) = u(z)\,E^{-1}(z)$.

2^0. Из свойства функции $S(z)$ следует, что функция $\Phi(z)$ — логарифмически субгармоническая при $z \overline{\in} \bigcup_{k \in \boldsymbol{J}_2}\{\gamma_k\}$, и что $\Phi(z)$ оценивается сверху вне исключительных кружков

$$\Phi(z) \leqslant C_1(\varepsilon)^{\varkappa} \cdot e^{-\varkappa\omega(1-\varepsilon)|y|}\,u(z)$$
$$\Big(z \overline{\in} \bigcup_{k \in \boldsymbol{J}_1}\{\zeta : |\zeta - \zeta_k| \leqslant \pi/32\omega\}\Big), \tag{3.4}$$

и снизу всюду

$$C_2(\varepsilon)^{\varkappa}\cdot e^{-\varkappa\omega(1-\varepsilon)|y|}u(z)\leqslant\Phi(z)\quad(\forall z)\tag{3.5}$$

($C_1(\varepsilon)<\infty$, $C_2(\varepsilon)<\infty$ при $\varepsilon>0$). Для логарифмически субгармонической $u(z)$ экспоненциального типа, удовлетворяющей (1.3), выполняется неравенство

$$\int\limits_{-\infty<x<\infty}^{\infty}u(x+iy)\,dx\leqslant e^{\sigma|y|}\int\limits_{-\infty}^{\infty}u(x)\,dx.\tag{3.6}$$

Из (3.4), (3.6) и субгармоничности функции $u(z)$ следует неравенство

$$\int\limits_{-\infty<x<\infty}\Phi(x+iy)\,dx\leqslant C_3(\varepsilon)^{1+\varkappa}\cdot e^{-\varkappa\omega\varepsilon|y|}\int\limits_{-\infty<x<\infty}u(x)\,dx$$
$$(-\infty<y<\infty),$$

и, значит, $$\iint\limits_{\substack{-\infty<x<\infty\\-\infty<y<\infty}}\Phi(x+iy)\,dx\cdot dy\leqslant C_4(\varepsilon)^{1+\varkappa}\times$$
$$\times(\varkappa\omega\varepsilon)^{-1}\int\limits_{-\infty<x<\infty}u(x)\,dx.\tag{3.7}$$

Из (3.5) и лог. субгармоничности функции $\Phi(z)$ при $|y|>\pi/4\omega$ следует неравенство

$$\int\limits_{-\infty<x<\infty}u(x)\,dx\leqslant C_5(\varepsilon)^{1+\varkappa}\cdot\omega\cdot\iint\limits_{\substack{-\infty<x<\infty\\-\infty<y<\infty}}\Phi(x+iy)\,dxdy.\tag{3.8}$$

Здесь $C_3(\varepsilon)$, $C_4(\varepsilon)$, $C_5(\varepsilon)<\infty$ при $\varepsilon>0$. Нам понадобится также неравенство

$$\iint\limits_{\substack{-\infty<x<\infty\\-\infty<y<\infty}}\Phi(x+iy)\,dxdy\leqslant C_6(\varepsilon)\cdot(1+\varkappa^{-1})\cdot\iint\limits_{\substack{-\infty<x<\infty\\|y|<\pi/2\omega}}\Phi(x+iy)\,dxdy.\tag{3.9}$$

Докажем его. Из (3.4) и (3.6) следует, что $\Phi(z)=O(e^{-\varkappa\varepsilon|y|})$ при $|y|\geqslant\pi/4\omega$, и значит, для лог. субгармонической $\Phi(z)$ выполняется

$$\int\limits_{-\infty<x<\infty}\Phi(x+iy)\,dx\leqslant e^{-\varkappa\varepsilon\omega(y-3\pi/8\omega)}\cdot\int\limits_{-\infty<x<\infty}\Phi(x+i3\pi/8\omega)\,dx$$
$$(y>3\pi/8\omega).$$

Интегрируя по y левую часть последнего неравенства и оценивая сверху интеграл по прямой $y=3\pi/8\omega$ интегралом по полосе $\pi/4\omega<y<\pi/2\omega$, получим

$$\iint\limits_{\substack{-\infty<x<\infty\\\pi/2\omega<y<\infty}}\Phi(x+iy)\,dxdy\leqslant C_7(\varepsilon)\cdot\varkappa^{-1}\cdot\iint\limits_{\substack{-\infty<x<\infty\\\pi/4\omega<y<\pi/2\omega}}\Phi(x+iy)\,dxdy.$$

Аналогично оценивается интеграл по полуплоскости $\pi/2\omega < -y < \infty$ через интеграл по полосе $\pi/4\omega < -y < \pi/2\omega$.

3°. Пусть R, $R > \pi/4\omega$ — некоторое число, которое будет выбрано позже. Положим $R_1 = R + \pi/4\omega$. Обозначим $\boldsymbol{T} = \{x \in (-\infty, \infty) : \inf_{k \in \boldsymbol{J}_2} |(k\pi/\omega) - x| > R_1\}$. Множество $\boldsymbol{T}$ является объединением не более чем счетного числа непересекающихся открытых интервалов: назовем их интервалами первого рода. С каждой точкой $\{k\pi/\omega\}$, $k \in \boldsymbol{J}_2$ свяжем интервал I, $I = \{x : k\pi/\omega - \alpha_k < x < k\pi/\omega - \beta_k\}$, где $\alpha_k = \min\{d_k^-/2, R_1\}$, $\beta_k = \min\{d_k^+/2, R_1\}$, а $d_k^- = \min_{l:l<k,\, l \in \boldsymbol{J}_2} (k - l)\pi/\omega$, $d_k^+ = \min_{l:l>k,\, l \in \boldsymbol{J}_2} (l - k)\pi/\omega$ (имеем $\pi/2\omega \leqslant \alpha_k$, $\beta_k \leqslant R + \pi/4\omega$). Интервалы I, связанные с точками $\{k\pi/\omega\}$, $k \in \boldsymbol{J}_2$, назовем интервалами второго рода. Множество всех интервалов первого рода обозначим через $\boldsymbol{G}_1$, множество всех интервалов второго рода — через $\boldsymbol{G}_2$. С каждым интервалом $I = (a, b)$ первого рода свяжем полосу $\prod_I = \{x + iy : a - R < x < b + R, -\infty < y < \infty\}$. $I = (a, b)$, $I \in \boldsymbol{G}_1$). С каждым интервалом $I = (a, b)$ второго рода свяжем полосу $\prod_I = \{x + iy : a - \pi/4\omega < x < b + \pi/4\omega - \infty < y < \infty\}$ ($I = (a, b)$, $I \in \boldsymbol{G}_2$). Из построения вытекает, что интервалы I ($I \in \boldsymbol{G}_1 \cup \boldsymbol{G}_2$) попарно не пересекаются и их замыкания I ($I \in \boldsymbol{G}_1 \cup \boldsymbol{G}_2$) покрывают всю вещественную ось. Полосы $\prod_I$ ($I \in \boldsymbol{G}_1 \cup \boldsymbol{G}_2$) покрывают всю комплексную плоскость. Кратность этого покрытия — не выше трех.

Функция $\Phi(z)$ — логарифмически субгармоническая при $z \in \prod_I$ ($I \in \boldsymbol{G}_1$). Функция $\Phi(z)$ — логарифмически субгармоническая при $z \in \prod_I \setminus \gamma_k$ ($I \in \boldsymbol{G}_2$). (Здесь I — интервал, связанный с точкой $\{k\pi/\omega\}$, $k \in \boldsymbol{J}_2$).

Отметим, что построенные множества интервалов и полос определяются разбиением $\boldsymbol{Z} = \boldsymbol{J}_1 \cup \boldsymbol{J}_2$ и выбором числа R.

4°. Пусть $I \in \boldsymbol{G}_1$. Так как R — окрестность (в комплексной плоскости) интервала I содержится в полосе $\prod_I$, а функция $\Phi(z)$ — субгармоническая в этой полосе, то

$$\iint\limits_{x \in I,\ |y| < \pi/2\omega} \Phi(x + iy)\, dxdy \leqslant C_8 (R\omega)^{-1} \cdot \iint\limits_{\Pi_I} \Phi(x + iy)\, dxdy \tag{3.10}$$

($C_8 < \infty$ — ни от чего не зависит).

Пусть $I = (a, b)$ — интервал второго рода, связанный с точкой $\{k\pi/\omega\}$, $k \in \boldsymbol{J}_2$. Через Q_I, Q_I', Q_I'' — обозначим прямоугольники

$$Q_I = \{\xi + i\eta : a - \pi/4\omega < \xi < b + \pi/4\omega,\ |\eta| \leqslant \pi/\omega\};$$
$$Q_I' = \{\xi + i\eta : a - \pi/8\omega < \xi < b + \pi/8\omega,\ |\eta| \leqslant 7\pi/8\omega\};$$
$$Q_I'' = \{\xi + i\eta : a - \pi/16\omega < \xi < b + \pi/16\omega,\ |\eta| \leqslant 3\pi/4\omega\}.$$

Пусть $\omega(z, \gamma_k, Q_I')$ — гармоническая мера множества γ_k относительно прямоугольника Q_I'. Так как множество γ_k имеет непустое пересечение с каждой окружностью $\{\zeta : |\zeta - k\pi/\omega| = r$ при $0 \leqslant r \leqslant \pi/4\omega$, то, согласно лемме 2, имеем $\omega(z, \gamma_k, Q_I') \geqslant \mu$ $(z \in Q_I'')$ **(3.11)**, где

$$\mu = e^{-C_9(R\omega+1)}, \tag{3.12}$$

а $C_9 < \infty$ — ни от чего не зависит. Значит (напомним, что $u(z) = u(k\pi/\omega)$ при $z \in \gamma_k$), для логарифмически субгармонической в прямоугольнике Q_I' функции $u(z)$ выполняется неравенство $u(z) \leqslant u(k\pi/\omega)^{\mu} \cdot \{\max\limits_{\zeta \in \partial Q_I'} u(\zeta)\}^{1-\mu}$ $(z \in Q_I'')$ (через $\partial Q_I'$ обозначена граница Q_I'). Из последнего неравенства и неравенства Юнга ($a^{\alpha} b^{\beta} \leqslant \alpha a + \beta b : a, b, \alpha, \beta \geqslant 0, \alpha + \beta = 1$) вытекает неравенство

$$\max_{z \in Q_I''} u(z) \leqslant \delta(1-\mu) \cdot \max_{\zeta \in \partial Q_I'} u(\zeta) + \delta^{-(1-\mu)/\mu} \times \\ \times \mu \cdot u(k\pi/\omega), \tag{3.13}$$

справедливое при любом $\delta > 0$. Так как $\pi/8\omega$ — окрестность множества ∂Q_I содержится в Q_I, то из (3.13) следует неравенство

$$\max_{z \in Q_I''} u(z) \leqslant \delta \cdot C_{10}(\varepsilon)^{1+\varkappa} \cdot \omega^2 \cdot \iint_{\zeta \in Q_I} u(\xi + i\eta)\, d\xi d\eta + \\ + \delta^{-\frac{1-\mu}{\mu}} u\left(\frac{k\pi}{\omega}\right).$$

Используя (3.5), получаем

$$\max_{z \in Q_I''} u(z) \leqslant \delta \cdot C_{11}(\varepsilon)^{1+\varkappa} \cdot \omega^2 \cdot \iint_{\zeta \in \partial Q_I} \Phi(\xi + i\eta)\, d\xi d\eta.$$

Отсюда и из (3.5) следует, что при $z \in Q_I'' \setminus \bigcup\limits_{l \in J_1} \{\zeta : |\zeta - l\pi/\omega| < \pi/32\omega\}$ выполняется неравенство $\Phi(z) \leqslant \delta\omega^2 \cdot C_{12}(\varepsilon)^{1+\varkappa} \times \iint\limits_{\zeta \in Q_I} \Phi(\xi + i\eta)\, d\xi d\eta + C_{13}(\varepsilon)^{1+\varkappa} \cdot \delta^{-(1-\mu)/\mu} u(k\pi/\omega)$ **(3.14)**. Если при $l \in J_1$ круг $\{\zeta : |\zeta - l\pi/\omega| < \pi/32\omega\}$ содержится целиком в прямоугольнике Q_I'', то неравенство (3.14) выполняется для всех z на границе круга, а вследствие субгармоничности Φ — и для всех z из этого круга. Круг $\{\zeta : |\zeta - l\pi/\omega| < \pi/32\omega\}$, имеющий общую точку с прямоугольником $\{\zeta = \xi + i\eta : \xi \in I, |\eta| \leqslant \pi/2\omega\}$, целиком содержится в прямоугольнике Q_I''. Поэтому неравенство (3.14) выполняется при всех z из прямоугольника $\{\zeta : \zeta \in I, |\eta| \leqslant \pi/2\omega\}$. Так как $|I| \leqslant 2R + \pi/\omega$, то для любого $\delta > 0$ выполняется неравенство $\iint\limits_{x \in I,\, |y| \leqslant \pi/2\omega} \Phi(x + iy)\, dxdy \leqslant \delta \cdot (R\omega + 1) \cdot C_{14}(\varepsilon)^{1+\varkappa} \times \iint\limits_{\Pi_I} \Phi(x + iy)\, dxdy + C_{15}(\varepsilon)^{1+\varkappa} \cdot (R\omega + 1) \cdot \omega^{-1} \delta^{-(1-\mu)/\mu} \times$

$\times u(k\pi/\omega)$ **(3.15)**. Здесь $I \in G_2$ — интервал, связанный с точкой $k\pi/\omega$.

5°. Суммируя неравенства (3.10) по всем $I \in G_1$ и неравенства (3.15) по всем $I \in G_2$, получаем

$$\iint\limits_{\substack{-\infty<x<\infty\\ |y|<\pi/2\omega}} \Phi(x+iy)\,dxdy \leqslant \{C_{16}(\varepsilon)\cdot(R\omega)^{-1} + C_{17}(\varepsilon)^{1+\varkappa}\cdot(R\omega+1)\} \times$$

$$\times \iint\limits_{\substack{-\infty<x<\infty\\ -\infty<y<\infty}} \Phi(x+iy)\,dxdy + C_{18}(\varepsilon)^{1+\varkappa}\cdot(R\omega+1)\times$$

$$\times\,\delta^{-\frac{1-\mu}{\mu}}\cdot\omega^{-1}\cdot\sum_{k\in Z} u(k\pi/\omega).$$

Из последнего неравенства и из (3.9) следует неравенство

$$\iint\limits_{\substack{-\infty<x<\infty\\ -\infty<y<\infty}} \Phi(x+iy)\,dxdy \leqslant \{C_{19}(\varepsilon)\cdot(1+\varkappa^{-1})\times$$

$$\times(R\omega)^{-1} + C_{20}(\varepsilon)^{1+\varkappa}\cdot(1+\varkappa^{-1})\cdot(R\omega+1)\}\times$$

$$\times \iint\limits_{\substack{-\infty<x<\infty\\ -\infty<y<\infty}} \Phi(x+iy)\,dxdy + C_{21}(\varepsilon)^{1+\varkappa}\cdot(1+\varkappa^{-1})\times$$

$$\times(R\omega+1)\cdot\delta^{-\frac{1-\mu}{\mu}}\cdot\omega^{-1}\sum_{k\in Z} u(k\pi/\omega). \tag{3.16}$$

Здесь $C_{19}(\varepsilon)$, $C_{20}(\varepsilon)$, $C_{21}(\varepsilon)<\infty$ при $\varepsilon>0$ зависят только от ε. μ оценено снизу в (3.12).

Неравенство (3.16) выполняется при любом R, $R>\pi/4\omega$, и при любом $\delta>0$. Положим затем $R=(4\omega)^{-1}\cdot(1+\varkappa^{-1})\cdot C_{19}(\varepsilon)$; $\delta=\frac{1}{4}(R\omega+1)^{-1}\cdot\varkappa\cdot(1+\varkappa)^{-1}\cdot C_{20}(\varepsilon)^{-(1+\varkappa)}$. При таком выборе R и δ неравенство (3.16) приобретает вид

$$\iint\limits_{\substack{-\infty<x<\infty\\ -\infty<y<\infty}} \Phi(x+iy)\,dxdy \leqslant \frac{1}{2}\iint\limits_{\substack{-\infty<x<\infty\\ -\infty<y<\infty}} \Phi(x+iy)\,dxdy +$$

$$+\,C_{22}(\varepsilon)^{1+\varkappa}\cdot C_{23}(\varepsilon,\varkappa)\cdot\omega^{-1}\cdot\sum_{k\in Z} u(k\pi/\omega). \tag{3.17}$$

Здесь $C_{22}(\varepsilon)$, $C_{23}(\varepsilon,\varkappa)<\infty$, причем $C_{23}(\varepsilon,\varkappa)\leqslant C_{24}(\varepsilon,\varkappa_0)<\infty$ при $\varkappa\geqslant\varkappa_0>0$. Если функция $u(x)$ суммируемая на вещественной оси, то и интеграл в левой части (3.7) конечен, и из (3.17) следует, что выполняется неравенство $\iint\limits_{\substack{-\infty<x<\infty\\ -\infty<y<\infty}} \Phi(x+iy)\,dxdy \leqslant$ $\leqslant C_{25}(\varepsilon,\varkappa_0)^{1+\varkappa}\cdot\omega^{-1}\sum_{k\in Z} u(k\pi/\omega)$, справедливое при $\varkappa\geqslant\varkappa_0>0$, где

$C_{25}(\varepsilon, \varkappa_0) < \infty$ при $\varepsilon > 0$, $\varkappa_0 > 0$. Из последнего неравенства и (3.8) следует неравенство

$$\int\limits_{-\infty<x<\infty} u(x)\,dx \leqslant C_{26}(\varepsilon, \varkappa_0)^{1+\varkappa} \cdot \omega^{-1} \sum_{k\in Z} u(k\pi/\omega), \tag{3.18}$$

справедливое пока в предположении конечности интеграла в его левой части. $C_{26}(\varepsilon, \varkappa_0)$ здесь — величина, зависящая лишь от $\varkappa_0 > 0$ и ε, определенного в (3.3), т. е. в конечном счете от $\sigma/\varkappa\omega$ и $\varkappa_0$.

6^0. Освободимся теперь от ограничения конечности интеграла в левой части (3.18). Пусть $u(z)$ — функция, удовлетворяющая условиям теоремы 1, такая, что $\sum\limits_k u(k\pi/\omega) < \infty$. Из сходимости этого ряда следует, что $\sup\limits_k u(k\pi/\omega) < \infty$. Из результатов работы [3] — [4] следует, что тогда $u(x)$ ограничена при $x \in \boldsymbol{R}$. Пусть $\sigma_1 = (\sigma + \varkappa\omega)/2$. Имеем $\sigma < \sigma_1 < \varkappa\omega$. Положим для $\tau > 0$. $u_\tau(z) = u(z) \cdot |(\sin \tau z)/(\tau z)|^{\varkappa+2}$, $u_\tau(z)$ — логарифмически субгармоническая функция экспоненциального типа, причем $\overline{\lim\limits_{r\to\infty}}\, r^{-1} \ln\{u_\tau(ir) + u_\tau(-ir)\} \leqslant \sigma_1$, если $\tau > 0$ — достаточно мало. Так как $u(x)$ ограничена на вещественной оси, то $u_\tau(x)$ суммируема на вещественной оси. Функция u_τ удовлетворяет всем условиям теоремы 1 с теми же $\varkappa$, ω и с σ_1 вместо σ (если $\tau > 0$ достаточно мало). Запишем для функции $u_\tau(z)$ неравенство (3.18), учитывая, что $u_\tau(x) \leqslant u(x)$ $(\tau > 0)$, что $u_\tau(z) \to u(z)$ $(\tau \to +0)$ и что константа C_{26} в (3.18) не зависит от τ, получим, что неравенство (3.18) выполняется для функции $u(z)$ без априорного предположения конечности интеграла слева.

Теорема 1 доказана для $p = 1$.

6^0. Сведем теперь случай произвольного $p > 0$ к случаю $p = 1$. Пусть $u(z)$ — функция, удовлетворяющая условиям теоремы 1. Образуем функцию $u_p(z) = (u(z))^p$. Функция $u_p(z)$ — логарифмически субгармоническая экспоненциального типа, удовлетворяющая условиям теоремы 1 с $p = 1$; $\sigma_p = p\sigma$; $\varkappa_p = p\varkappa$; при этом $\sigma_p/\varkappa_p\omega = \sigma/\varkappa\omega$ — не зависит от p, и если $p \geqslant p_0$, то $\varkappa_p \geqslant p_0\varkappa$. Записывая для функции $u_p(z)$ неравенство (3.18), получим (1.5) с константой, определяемой (1.6).

Теорема 1 доказана в полном объеме.

4. Теми же методами можно доказать и более общее, чем теорема 1, предложение. Обобщение может быть сделано в двух направлениях. Во-первых, могут быть видоизменены условия, связанные с риссовской массой $d\mu(z) = (2\pi)^{-1}\Delta(\ln u(z))$. Во-вторых, может быть установлено аналогичное (1.5) неравенство с той же левой частью, в правой части которого фигурирует сумма значения функции $u(z)$ в точках, близких к точкам $k\pi/\omega$.

Определение. *Борелевская мера $d\nu(\zeta)$ в комплексной плоскости удовлетворяет услпвию B_{loc} (локальной ограниченности),* *если существует такая константа* $M<\infty$, *что для любого комплексного* ζ_0 *выполняется* $\int\limits_{\zeta:|\zeta-\zeta_0|<1} \ln \frac{2}{|\zeta - z|}\, d\nu(\zeta) \leqslant M$ $(\forall z: |z-\zeta_0|<1)$.

Мера $d\nu(\zeta)$, имеющая ограниченную плотность, удовлетворяет условию B_{loc}. Мера $d\upsilon(\zeta)$, сосредоточенная на вещественной оси и имеющая ограниченную линейную плотность, удовлетворяет условию B_{loc}.

Теорема 2. *Пусть* $u(z) \not\equiv 0$ — *логарифмически субгармоническая функция в комплексной плоскости экспоненциального типа* $\overline{\lim\limits_{|z|\to\infty}} |z|^{-1} \ln u(z) < \infty$, *и пусть ассоциированная с субгармонической функцией риссовская мера* $d\mu(z) = (2\pi)^{-1} \Delta(\ln u(z))$ *представима в виде* $d\mu(z) = d\lambda(z) + d\nu(z)$, *где мера* $d\nu(z)$ *удовлетворяет условию* B_{loc}, *а мера* $d\lambda(z)$ *представима в виде* $d\lambda(z) = \sum\limits_j m_j \delta(z-\lambda_j)$, *где* m_j *отделены от нуля,* $m_j \geqslant \varkappa > 0$.

Пусть $\{z_k\}_{k\in Z}$ — *последовательность точек комплексной плоскости такая, что* $|z_k - z_j| \geqslant \delta > 0$ $(k \neq j)$, *и при некотором* $L < \infty$ $|z_k - k\pi/\omega| \leqslant L$ $(k \in Z)$. Если $\overline{\lim\limits_{r\to\infty}} r^{-1} \ln \{u(ir) + u(-ir)\} \leqslant \sigma$, где $\sigma < \varkappa\omega$, то для любого $p \in (0, \infty)$ выполняется неравенство

$$\int\limits_{-\infty}^{\infty} u(x)^p\, dx \leqslant A \cdot \sum_{k\in Z} u(z_k)^p.$$

Здесь $A < \infty$ — величина, зависящая лишь от отношения $\sigma/\varkappa\omega$, величин p, L, δ, и M — из условия B_{loc}. Более точно, для любого $p \geqslant p_0$, где $p_0 > 0$, можно положить $A = C^p$, где $C < \infty$ зависит лишь от $\sigma/\varkappa\omega$, p_0, L, δ, M.

Список литературы: 1. *Cartwright M. L.* On certain integral functions of order one. — Quarterly Journal of Math., Oxford ser., 1936, vol. 7, p. 46—55. 2. *Plancherel M., Polya G.* Fonction entiéres et integrales de Fourier multiples. II. — Commentarii Mathematici Helvetici, 1937/38, vol. 10, p. 110—165. 3. *Безуглая Л. И.* О субгармонических функциях комплексного переменного, ограниченных на последовательности точек вещественной оси. I. — Теория функций, функцион. анализ и их прил. 1979, вып. 32, с. 3—7. 4. *Безуглая Л. И.* О субгармонических функциях комплексного переменного, ограниченных на последовательности точек вещественной оси. II. — Теория функций, функцион. анализ и их прил., 1980, вып. 34, с. 5—10. 5. *Безуглая Л. И.* О потенциале сравнения в теоремах типа Картрайт и Планшереля — Пойя. — Реф. журн. «Математика», 1981, 9Б 168 Деп.

Поступила в редколлегию 24.10.80.