УДК 517.946.9

Л. В. БЕРЛЯНД

ОСРЕДНЕНИЕ УРАВНЕНИЙ ЛИНЕЙНОЙ ТЕОРИИ УПРУГОСТИ В ОБЛАСТЯХ С МЕЛКОЗЕРНИСТОЙ ГРАНИЦЕЙ. I

В ряде разделов механики, физики и геофизики возникает необходимость осредненного описания упругих сред с большим числом микронеоднородностей. Например, в [1] рассмотрена задача об осреднении уравнений теории упругости с быстроосциллирующими коэффициентами, которая возникает при расчете упругих конструкций, состоящих из композиционных материалов. Общая теория осреднения дифференциальных операторов с быстроосциллирующими коэффициентами развита в работах О. А. Олейник, Н. С. Бахвалова, Ж.-Л Лионса и их учеников. Достаточно полный список литературы приведен в работе [2].

В настоящей статье рассматривается математическая модель изотропного упругого тела с большим числом мелких пустот.

Пусть G — фиксированная ограниченная область в $\boldsymbol{R}^n$ $(n = 2, 3)$, а $F^{(s)}$ — замкнутое множество, состоящее из большого числа мелких компонент $F_i^{(s)}$ $(F^{(s)}) = \bigcup\limits_{i=1}^{s} F_i^{(s)}$, где $F_i^{(s)}$ — непересекающиеся между собой множества, каждое из которых получается подобным сжатием в $\sqrt[n]{s}$ раз фиксированного тела F, ограниченного гладкой поверхностью. Таким образом, с ростом параметра s число компонент $F_i^{(s)}$ неограниченно растет, а их диаметры $d^{(s)}$ стремятся к нулю. Предположим, что множества $F_i^{(s)}$ располагаются в области G так, что расстояние $r_i^{(s)}$ от $F_i^{(s)}$ до остальных $F_j^{(s)}$ $(i \neq j)$ удовлетворяет неравенству $r_i^{(s)} > c_0 d^{(s)}$ **(1)**, где $c_0 > 0$ не зависит от s. В этом случае будем говорить, что включения $F_i^{(s)}$ расположены регулярно в области G.

Обозначим через A^0 — оператор теории упругости для изотропной среды (см. [3]): $A^0\vec{u} \equiv -\mu\Delta\vec{u} - (\lambda+\mu)\,\mathrm{grad}\,\mathrm{div}\,\vec{\boldsymbol{u}}$ **(2)**, где λ и μ — постоянные Ляме, $\vec{u} = \vec{u}(x)$ — произвольная дважды непрерывно дифференцируемая вектор-функция. Рассмотрим в области $G^{(s)} = G \setminus F^{(s)}$ при каждом s задачу о колебаниях изотропного упругого тела с пустотами $(\partial^2\vec{u}^{(s)})/(\partial t^2) + A^0\vec{\boldsymbol{u}}^{(s)} = 0$, $x \in G^{(s)}$ **(3)**;

$$\vec{t}\,(\vec{u}^{(s)})\,|_{\partial F^{(s)}} = 0;\ \vec{u}^{(s)}\,|_{\partial G} = 0\ \ \textbf{(4)};$$

$$\vec{u}^{(s)}(x0) = \vec{\varphi}(x);\ \ \frac{\partial\vec{u}^{(s)}}{\partial t}(x,\ 0) = \vec{\psi}(x)\ \ \textbf{(5)},$$

где $\vec{u}^{(s)}(x, t)$ — вектор упругих смещений в точке x в момент времени t, $\vec{t}(\vec{u})$ — вектор напряжений (см. [3]). Оказывается, что при довольно общих предположениях, сформулированных ниже в теоремах 1 и 2, решения $\vec{u}^{(s)}(x, t)$ задачи (3)—(5) сходятся в области G при $s \to \infty$ к решению $\vec{u}(x, t)$ такой осредненной задачи:

$$b\,(\partial^2 \vec{u}/\partial t^2) = \frac{\partial}{\partial x_i}\left(a_{iklm}(x)\,\varepsilon_{lm}(\vec{u})\right)\vec{e}_k; \tag{6}$$

$$\vec{u}\,|_{\partial G} = 0; \tag{7}$$

$$\vec{u}\,(x, 0) = \vec{\varphi}(x); \quad \frac{\partial \vec{u}}{\partial t}(x, 0) = \vec{\psi}(x), \tag{8}$$

где $\varepsilon_{lm}(\vec{u}) = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u^l}{\partial x_m} + \frac{\partial u^m}{\partial x_l}\right)$ — компоненты линейного тензора деформаций; $\vec{e}_k$ — орт оси; знак суммирования при повторяющихся индексах здесь и далее опускается, а коэффициенты $a_{iklm}(x)$, $b(x)$ выражаются через определенные характеристики множеств $F^{(s)}$, причем они будут гладкими функциями в G, если выполнено условие (1). Кроме того, коэффициенты a_{iklm} будут удовлетворять соотношениям симметрии $a_{iklm} = a_{lmik} = a_{kilm} = a_{kiml}$ **(9)**.

Таким образом, осредненные уравнения (6) описывают колебания сплошного упругого тела, вообще говоря, анизотропного. Если же пустоты расположены в узлах правильной кубической решетки, то это тело будет ортотропным, т. е. будет иметь три взаимно перпендикулярные плоскости упругой симметрии.

В первой части статьи изучается асимптотическое поведение при $s \to \infty$ решений такой стационарной задачи: $A^0\vec{u}^{(s)} + \tau\vec{u}^{(s)} = \vec{K}(x)$; $x \in G^{(s)}$ **(10)**, $\vec{t}(\vec{u}^{(s)}) = 0$; $x \in \partial F^{(s)}$ **(11)**, $\vec{u}^{(s)} = 0$; $x \in \partial G$ **(12)**, где $\tau > 0$, $\vec{u}^{(s)} = \vec{u}^{(s)}(x)$, $\vec{K}(x)$ — заданный вектор объемных сил ($\vec{K} \in L^2(G)$).

Во второй части статьи полученные результаты используются для исследования задачи о колебаниях (3)—(5).

1. Слабая компактность решений. Введем энергетическую норму:

$$\|\vec{u}\|^2_{A(G)} = \int_G \varepsilon_{ik}(\vec{u})\,\varepsilon_{ik}(\vec{u})\,dx. \tag{13}$$

Без ограничения общности можно считать, что тело F, из которого при помощи гомотетического сжатия получаются тела $F_i^{(s)}$, есть единичный шар. Обозначим через Π шар радиуса $(1 + c_0)$

с тем же центром, $P = \Pi \setminus F$; $\Pi_i^{(s)} = s^{-\frac{1}{n}} \Pi$; $P_i^{(s)} = s^{-\frac{1}{n}} P = \Pi_i^{(s)} \setminus F_i^{(s)}$.

В полученной таким образом области $G^{(s)}$ рассмотрим произвольную функцию $\vec{u}^{(s)} \in H^1(G^{(s)})$, удовлетворяющую краевому условию (12) и неравенству

$$\|\vec{u}^{(s)}\|^2_{L_2(G^{(s)})} + \|\vec{u}^{(s)}\|_{A(G^{(s)})} < c_1. \tag{14}$$

Покажем, что для такой функции существует продолжение $\vec{\tilde{u}}^{(s)} \in H^1(G)$ на всю область G, удовлетворяющее условию

$$\|\vec{\tilde{u}}^{(s)}\|_{H^1(G)} < c_2. \tag{15}$$

Здесь постоянные c_1, c_2 не зависят от s.

Докажем сначала, что существует продолжение $\vec{u}^{(s)}$ на все G такое, что $\|\vec{\tilde{u}}^{(s)}\|_{A(G)} < c_3$.

В области $P = \Pi | F$ рассмотрим функцию $\vec{u}(\xi) = \vec{u}^{(s)}(\rho\xi)$, где ρ — диаметр $F_i^{(s)}$ $(\rho = \rho(s))$. Ясно, что

$$\|\vec{u}\|^2_{L_2(P)} = \rho^{-3} \|\vec{u}^{(s)}\|^2_{L_2(P_i^{(s)})}; \ \|\vec{u}\|^2_{A(P)} = \rho^{-1} \|\vec{u}^{(s)}\|_{A(P_i^{(s)})}. \tag{16}$$

Рассмотрим функцию $\vec{v}(\xi) = \vec{u}(\xi) - \vec{a} - \vec{\omega} \times \vec{r}(\xi)$, где $\vec{\omega} = (2 \operatorname{mes} P)^{-1} \int\limits_P \operatorname{rot} \vec{u}\, d\xi$, $\vec{a} = (\operatorname{mes} P)^{-1} \int\limits_P [\vec{u} - \vec{\omega} \times \vec{r}]\, d\xi$, где $\vec{r}(\xi)$ — радиус-вектор точки ξ. Легко видеть, что $\vec{v}$ удовлетворяет условиям $\int\limits_P \operatorname{rot} \vec{v}\, d\xi = 0$; $\int\limits_P \vec{v}\, d\xi = 0$ **(17)**; $\|\vec{v}\|_{A(P)} = \|\vec{u}\|_{A(P)}$ **(18)**.

Так как функция $\vec{v}$ удовлетворяет условию (17), то для нее справедливо неравенство Корна (см. [3]): $c_4 \|\vec{v}\|^2_{A(P)} \geqslant \int\limits_P |\nabla \vec{v}|^2 d\xi$ **(19)**. Кроме того, из второго равенства в (17) и неравенства Пуанкаре следует, что

$$\|\vec{v}\|_{L_2(P)} \leqslant c_5 \|\nabla \vec{v}\|_{L_2(P)}. \tag{20}$$

Функцию $\vec{v}(\xi)$ можно продолжить в Π так, чтобы продолжение $\vec{\tilde{v}}$ удовлетворяло неравенству

$$\|\vec{\tilde{v}}\|^2_{H^1(\Pi)} < c_6 \|\vec{v}\|^2_{H^1(P)}. \tag{21}$$

Тогда, учитывая (20), имеем

$$\int_{\Pi} |\vec{\tilde{v}}|^2 d\xi \leqslant c_6 \Big(\int_P |\nabla \vec{v}|^2 d\xi + \int_P |\vec{v}|^2 d\xi \Big); \tag{22}$$

$$\int_{\Pi} |\nabla \vec{\tilde{v}}|^2 d\xi \leqslant c_6 \Big(\int_P |\nabla \vec{v}|^2 d\xi + \int_P |\vec{v}|^2 d\xi \Big) \leqslant c_7 \int_P |\nabla \vec{v}|^2 d\xi. \tag{23}$$

Обозначим через $\vec{\tilde{u}}(\xi) = \vec{\tilde{v}}(\xi) + \vec{a} + \vec{\omega} \times \vec{r}(\xi)$, $\vec{\tilde{u}}^{(s)}(\rho\xi) = \vec{\tilde{u}}(\xi)$. Воспользовавшись (16), (18), (23), (19), получим

$$\|\vec{\tilde{u}}^{(s)}\|^2_{A(\Pi_i^{(s)})} = \|\vec{\tilde{v}}^{(s)}\|^2_{A(\Pi_i^{(s)})} \leqslant$$

$$\leqslant 4\|\nabla_x \vec{v}^{(s)}\|^2_{L_2(\Pi_i^{(s)})} = 4\rho\|\nabla_\xi \vec{v}\|^2_{L_2(\Pi)} \leqslant$$

$$\leqslant 4c_7\rho\|\nabla_\xi \vec{v}\|^2_{L_2(P)} \leqslant 4c_7c_4\rho\|\vec{v}\|^2_{A(P)} =$$

$$= 4c_7c_4\rho\|\vec{u}\|^2_{A(P)} = 4c_7c_4\|\vec{u}^{(s)}\|^2_{A(P_i^{(s)})},$$

$$\text{т. е. } \|\vec{\tilde{u}}^{(s)}\|^2_{A(\Pi_i^{(s)})} \leqslant c'\|\vec{u}^{(s)}\|^2_{A(P_i^{(s)})}. \tag{24}$$

Из неравенства (24) следует аналогичное неравенство для областей G и $G^{(s)}$: $\|\vec{\tilde{u}}^{(s)}\|^2_{A(G)} \leqslant (c'+1)\|\vec{u}^{(s)}\|^2_{A(G^{(s)})} \leqslant (c'+1)c_1 = c_\zeta$.

Теперь применим неравенство Корна для функций $\vec{\tilde{u}}^{(s)}$, определенных во всей области G и удовлетворяющих условию (12), получаем

$$\|\nabla \vec{\tilde{u}}^{(s)}\|^2_{L_2(G)} < c_8\|\vec{\tilde{u}}^{(s)}\|^2_{A(G)} < c_8c_3. \tag{25}$$

Воспользовавшись неравенством Фридрихса, получаем

$$\|\vec{\tilde{u}}\|^2_{L_2(G)} < c_9\|\nabla \vec{\tilde{u}}^{(s)}\|^2_{L_2(G)} < c_8c_3c_9. \tag{26}$$

Из (25), (26) следует неравенство (15), а из (15) следует слабая компактность в $H^1(G)$ семейства продолженных функций $\{\vec{\tilde{u}}^{(s)}\}$.

2. Основная теорема для стационарной задачи. Введем основную характеристику множества $F^{(s)}$, описывающую его влияние на решение (10)—(12). Пусть $K^0 = K(x_0, h)$ — куб с центром в точке $x_0 \in R^n$ и ребрами длины h, ориентированными по координатным осям; $\{R_{ik}\}$ $(i, k = 1 \dots n)$ — симметричный тензор второго ранга. Для сокращения записи введем обозначение

$$\vec{f}_{ik}(x_0) = \frac{1}{2}\left[(x^i - x_0^i)\vec{e}_k + (x^k - x_k^0)\vec{e}_i\right].$$

Рассмотрим величину

$$T_R(s, h, x_0) = \inf_{\vec{v}^{(s)}} \int\limits_{K^0 \bigcap G^{(s)}} \{W(\vec{v}^{(s)}) + h^{-2-\theta} |\vec{v}^{(s)} - R_{ik}\vec{f}_{ik}(x_0)|^2\} dx, \tag{27}$$

где $W(\vec{u}, \vec{v}) = c_{pqrt}\varepsilon_{pq}(\vec{u})\varepsilon_{rt}(\vec{v})$ — билинейная форма составляющих деформации, которая при $\vec{u} = \vec{v}$ представляет собой плотность потенциальной энергии упругой деформации, c_{pqrt} — коэффициенты обобщенного закона Гука для изотропного тела (см. [3]). Нижняя грань берется в классе $H^1(K^0 \bigcap G^{(s)})$. Известно, что существует единственная функция $\vec{v}^{(s)}$, минимизирующая функционал (27). Так как соответствующая краевая задача линейна, то решение $\vec{v}^{(s)}$ представимо в виде $\vec{v}^{(s)} = R_{ik}\vec{v}_{ik}^{(s)}$, где $\vec{v}_{ik}^{(s)}$ минимизирует (27), когда $R_{ik} = \delta_{ik}$. Поэтому $T_R(s, h, x_0) = a_{iklm}(s, h, x_0) R_{ik}R_{lm}$ (28),

$$\text{где } a_{iklm}(s, h, x_0) = \int\limits_{K^0 \bigcap G^{(s)}} \{W(\vec{v}_{ik}^{(s)}\vec{v}_{lm}^{(s)}) + h^{-2-\theta} \times (\vec{v}_{ik}^{(s)} - \vec{f}_{ik}(x_0), \vec{v}_{lm}^{(s)} - \vec{f}_{lm}(x_0))\} dx. \tag{28'}$$

Здесь скобками (., .) обозначено скалярное произведение в $\boldsymbol{R}^n$. Система чисел $a_{iklm}(s, h, x_0)$, вообще говоря, зависит от произвольного параметра θ. Однако при больших s и малых h эта зависимость не существенна, и поэтому в обозначениях не указывается.

Будем говорить, что последовательность вектор-функций $\vec{u}^{(s)} \in L_2(G^{(s)})$ сходится к функции $\vec{u} \in L_2(G)$, если

$$\lim_{s\to\infty} \int\limits_G |\vec{u}^{(s)}\chi^{(s)} - \vec{u}\chi^{(s)}|^2 dx = 0, \tag{29}$$

где $\chi^{(s)} = \chi^{(s)}(x)$ — характеристическая функция множества $G^{(s)}$. Сформулируем основную теорему этого параграфа.

Теорема 1. *Если множества* $F_i^{(s)}$ *располагаются регулярно в области* G, *т. е. выполнено условие* (1), *и в каждой точке* $x \in G$ *выполняются условия:*

1) $\lim\limits_{h\to 0}\lim\limits_{s\to\infty} \operatorname{mes}[K(x, h) \bigcap G^{(s)}]\, h^{-n} = b(x)$;

2) для некоторого θ $(0<\theta<2)$ $\lim\limits_{h\to 0}\varliminf\limits_{s\to\infty} a_{iklm}(s,\ h,\ x)\,h^{-n}=$ $=\lim\limits_{h\to 0}\varlimsup\limits_{s\to\infty} a_{iklm}(s,\ h,\ x)\,h^{-n}=a_{iklm}(x)$, где $b(x)$, $a_{iklm}(x)$ — непрерывные функции в G, а квадратичная форма $a_{iklm}\zeta_{ik}\zeta_{lm}$ положительно определена на подпространстве n^2-мерного пространства переменных ζ_{ik}, определяемом соотношением $\zeta_{ik}=\zeta_{ki}$, то последовательность решений задачи (10)—(12) сходится в смысле (29) к решению $\vec{u}$ такой осредненной задачи:

$$-\frac{\partial}{\partial x_i}\left(a_{iklm}\varepsilon_{lm}(\vec{u})\right)\vec{e}_k+\tau b\vec{u}=b\vec{K},\ x\in G; \tag{30}$$

$$\vec{u}=0,\ x\in\partial G, \tag{31}$$

причем a_{iklm} удовлетворяют соотношениям симметрии (9).

Замечание 1. Из (9) следует, что уравнение (30) описывает упругое тело.

Замечание 2. Аналогично [4] можно показать, что условие 2) выполняется при любом $\theta>0$.

Доказательство. Решение $\vec{u}^{(s)}$ задачи (10)—(12), как известно, минимизирует функционал

$$I(\vec{u}^{(s)})=\int\limits_{G^{(s)}}\{W(\vec{u}^{(s)})+\tau|\vec{u}^{(s)}|^2+2(\vec{K},\ \vec{u}^{(s)})\}\,dx \tag{32}$$

в классе функций из $H^1(G^{(s)})$, удовлетворяющих условию (12). Поэтому $\vec{u}^{(s)}$ удовлетворяет условию (14) и, следовательно, $\vec{u}^{(s)}$ можно продолжить на множество $F^{(s)}$ так, что последовательность продолженных функций $\vec{u}^{(s)}$ будет удовлетворять условию (15), т. е. будет слабо компактной в $H^1(G)$. Выделим из нее подпоследовательность $\{\vec{\tilde{u}}^{(s_k)}\}$, слабо сходящуюся в $H^1(G)$ к некоторой функции $\vec{u}\in H^1(G)$. Покажем, что если выполняются условия теоремы 1, то $\vec{u}$ является решением задачи (30)—(31).

Пусть $\vec{w}(x)$ — произвольная функция из $C_0^2(G)$. Покроем G кубами K^α с ребрами достаточно малой длины h, ориентированными по координатным осям и центрами x_α, образующими пространственную решетку с периодами $h-r$ $(r>0)$. Соотношение между h и r выберем позже. С этим покрытием свяжем разбиение единицы $\{\varphi_\alpha(x)\}$, т. е. построим набор бесконечно дифференцируемых в $\boldsymbol{R}^n$ функций, удовлетворяющих условиям $\varphi_\alpha=0$ при $x\notin K^\alpha$; $\varphi_\alpha=1$ при $x\in K^\alpha\setminus\bigcup\limits_{\beta\neq\alpha}K^\beta$; $\sum\limits_\alpha\varphi_\alpha\equiv 1$,

$\left|\frac{\partial\varphi_\alpha}{\partial x_i}\right| \leqslant cr^{-1} (i = 1, n)$. Обозначим через $\vec{v}_{ik} = \vec{v}_{ik}^{\alpha(s)}(x)$ функцию, минимизирующую, когда K^0 — куб K^α, а $R_{ik} = \delta_{ik}$. Рассмотрим функцию $\vec{w}^{(s)} = \vec{w} + \sum_\alpha \varepsilon_{ik}(\vec{w}) [\vec{v}_{ik} - \vec{f}_{ik}(x_\alpha)] \varphi_\alpha$ **(33)**. Ясно, что $\vec{w}^{(s)} \in H^1(G^{(s)})$ и удовлетворяет условию (12), а так как $\vec{u}^{(s)}$ минимизирует функционал (32) в классе таких функций, то $I(\vec{u}^{(s)}) \leqslant I(\vec{w}^{(s)})$ **(34)**. Оценим правую часть этого неравенства. Из (28′) и условия *2* теоремы 1 следует, что при достаточно больших $s (s \geqslant s(h))$

$$\int_{K^\alpha \bigcap G^{(s)}} W(\vec{v}_{ik}) dx = O(h^n); \tag{35}$$

$$\int_{K^\alpha \bigcap G^{(s)}} \vec{v}_{ik} - \vec{f}_{ik}(x_\alpha)^2 dx = O(h^{n+2+\theta}). \tag{36}$$

Пусть K_1^α — куб с центром в точке x_α и ребрами длины $h = h - 2r$, т. е. $K_1^\alpha = K^\alpha \setminus \bigcup_{\beta \neq \alpha} K^\beta$.

Учитывая (36), имеем

$$\int_{K^\alpha \setminus K_1^\alpha} \{W(\vec{v}_{ik}) + h^{-2-\theta} |\vec{v}_{ik} - \vec{f}_{ik}(x_\alpha)|^2 dx =$$

$$= \int_{K^\alpha \bigcap G^{(s)}} \{W(\vec{v}_{ik}) + h^{-2-\theta} |\vec{v}_{ik} - \vec{f}_{ik}(x_\alpha)|^2\} dx -$$

$$- \int_{K_1^\alpha \bigcap G^{(s)}} \{W(\vec{v}_{ik} + h_1^{-2-\theta} |\vec{v}_{ik} - \vec{f}_{ik}(x_\alpha)|^2 dx + O(rh^{n-1}).$$

Согласно (27) и (28) первое слагаемое в правой части равно $a_{ik\,ik}(s, h, x_\alpha)$, а второе не меньше $a_{ik\,ik}(s, h_1, x_\alpha)$. Поэтому при $s \geqslant s(h)$

$$\int_{K^\alpha \setminus K_1^\alpha \bigcap G^{(s)}} \{W(\vec{v}_{ik}) + h^{-2-\theta} |\vec{v}_{ik} - \vec{f}_{ik}(x_\alpha)|^2\} dx \leqslant$$

$$\leqslant a_{ik\,ik}(s, h, x_\alpha) - a_{ik\,ik}(s, h_1, x_\alpha) + O(rh^{n-1}).$$

Поэтому при $r = O(h)$ в силу условия 2) теоремы 1

$$\int_{K^\alpha \setminus K_1^\alpha \bigcap G^{(s)}} W(\vec{v}_{ik}) dx = O(h^n); \tag{35′}$$

$$\int_{K^\alpha \setminus K_1^\alpha \bigcap G^{(s)}} |\vec{v}_{ik} - \vec{f}_{ik}(x_\alpha)|^2 dx = O(h^{n+2+\theta}). \tag{36′}$$

Дифференцируя (33), находим $\varepsilon_{pq}(\overrightarrow{w^{(s)}})$ и $\varepsilon_{st}(\overrightarrow{w^{(s)}})$.

Подставим полученные формулы в (32) и оценим $I(\overrightarrow{w^{(s)}})$:

$$I(\overrightarrow{w^{(s)}}) = \sum_{\alpha} \int\limits_{K^\alpha \cap G^{(s)}} \{\varepsilon_{ik}(\vec{w})\, \varepsilon_{lm}(\vec{w})\, c_{pqst}\varepsilon_{pq}(\vec{v}_{ik})\, \varepsilon_{st}(\vec{w}_{lm})\}\, dx +$$
$$+ \int\limits_{G^{(s)}} \{\tau \vec{w}^2 + 2(\vec{K}, \vec{w})\}\, dx +$$
$$+ \sum_{\alpha} \int\limits_{K^\alpha \cap G^{(s)}} \{\varepsilon_{ik}(\vec{w})\, \varepsilon_{lm}(\vec{w})\, W(\vec{v}_{ik}, \vec{v}_{lm})(\varphi_\alpha^2 - 1)\}\, dx +$$
$$+ \sum_{\alpha \neq \beta} \int\limits_{K^\alpha \cap K^\beta \cap G^{(s)}} \{\varepsilon_{ik}(\vec{w})\, \varepsilon_{lm}(\vec{w})\, W(\vec{v}_{ik}, \vec{v}_{lm}) \times$$
$$\times \varphi_\alpha \varphi_\beta\}\, dx + E(s, h, r, \vec{w}), \qquad (37)$$

где через $E(s, h, r, \vec{w})$ обозначены остальные слагаемые.

Положим $r = h^{1+\frac{\theta}{2}}$ аналогично [4], используя оценки (35), (36), (35′) и (36′), можно показать, что

$$\lim_{h \to 0} \overline{\lim_{s \to \infty}} |E(s, h, r, \vec{w})| = 0. \qquad (38)$$

Используя оценку (35′), находим

$$\lim_{h \to 0} \overline{\lim_{s \to \infty}} \Big| \sum_{\alpha} \int\limits_{K^\alpha \cap G^{(s)}} \varepsilon_{ik}(\vec{w})\, \varepsilon_{lm}(\vec{w})\, W(\vec{v}_{ik}, \vec{v}_{lm})(\varphi_\alpha^2 - 1)\, dx +$$
$$+ \sum_{\alpha \neq \beta} \int\limits_{K^\alpha \cap K^\beta \cap G^{(s)}} \{\varepsilon_{ik}(\vec{w})\, \varepsilon_{lm}(\vec{w})\, W(\vec{v}_{ik}, \vec{v}_{lm})\, \varphi_\alpha \varphi_\beta\}\, dx = 0. \qquad (39)$$

Далее так как

$$\int\limits_{K^\alpha \cap G^{(s)}} \varepsilon_{ik}(\vec{w})\, \varepsilon_{lm}(\vec{w})\, W(\vec{v}_{ik} \vec{v}_{lm}) \leqslant$$
$$\leqslant \int\limits_{K^\alpha \cap G^{(s)}} \varepsilon_{ik}(\vec{w})\, \varepsilon_{lm}(\vec{w}) \{W(\vec{v}_{ik}, \vec{v}_{lm}) + h^{-2-\theta} \times$$
$$\times (\vec{v}_{ik} - \vec{f}_{ik}(x_\alpha), \vec{v}_{lm} - \vec{f}_{lm}(x_\alpha)\}\, dx,$$

то из условия *2* теоремы 1 и гладкости $\vec{w}(x)$ следует, что при $s \geqslant s(h)$

$$\int\limits_{K^\alpha \cap G^{(s)}} \varepsilon_{ik}(\vec{w})\, \varepsilon_{lm}(\vec{w})\, W(v_{ik} v_{lm})\, dx \leqslant$$
$$\leqslant \varepsilon_{ik}(\vec{w}(x_\alpha)\, \varepsilon_{lm}(\vec{w}(x_\alpha))\, a_{iklm}(s, h, x_\alpha) + O(h^{n+1}). \qquad (40)$$

Из (37)—(40) и условий *1*, *2* теоремы 1 следует, что для любой функции $\vec{w}(x)$

$$\overline{\lim_{s\to\infty}} I(\vec{u}^{(s)}) \leqslant \tilde{I}(\vec{w}), \tag{41}$$

где $\tilde{I}(\vec{w}) = \int\limits_G \{a_{iklm}\varepsilon_{ik}(\vec{w})\,\varepsilon_{lm}(\vec{w}) + \tau b\vec{w} + 2(\vec{k}, w)\,b\}\,dx$, так как C_0^2 плотно в $H^1(G)$, то неравенству (41) удовлетворяет любая функция $\vec{w}(x) \in \overset{\circ}{H}{}^1(G)$. (42)

Пусть $\vec{u}(x)$ — слабый предел продолженных функций $\vec{u_{(s)}}$ в пространстве $H^1(G)$ по некоторой подпоследовательности, тогда справедливо обратное неравенство $\underline{\lim}_{s=s_k\to\infty} I(\vec{u}^{(s)}) \geqslant \tilde{I}(\vec{u})$ **(43).** Рассмотрим дважды непрерывно дифференцируемую функцию $\vec{u}_\varepsilon(x)$ такую, что $\|\vec{u}_\varepsilon - \vec{u}\|_{H^1(G)} < \varepsilon$ **(44).** Построим в областях $G^{(s)}$ последовательность

$$\vec{u}_\varepsilon^{(s)}(x) = \vec{u}^{(s)}(x) + \vec{u}_\varepsilon(x) - \vec{u}(x). \tag{45}$$

Очевидно, что $\vec{u}_\varepsilon^{(s)}$ сходится при $s = s_k \to \infty$, к $\vec{u}_\varepsilon$ в смысле (29), и $\|\vec{u}_\varepsilon^{(s)} - \vec{u}^{(s)}\|_{H^1(G^{(s)})} < \varepsilon$ **(44').** Покроем область G непересекающимися кубами K^α с ребрами длины h, ориентированными по координатным осям. В каждом кубе K^α рассмотрим функцию

$$\vec{v}^{\alpha(s)} = \vec{u}_\varepsilon^{(s)}(x) - \vec{u}_\varepsilon(x_\alpha) - \frac{1}{2}\{\Omega_{ik}(x^k - x_\alpha^k)\vec{e}_i + \Omega_{ki}(x^i - x_\alpha^i)\vec{e}_k\},$$

где $\Omega_{ik} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u_\varepsilon^i}{\partial x_k} - \frac{\partial u_\varepsilon^k}{\partial x_i}\right)(x_\alpha)$ — компоненты вектора линейного поворота (см. [3]).

Из гладкости $\vec{u}_\varepsilon(x)$ следует, что в кубе K^α $\vec{u}_\varepsilon(x_\alpha) = \vec{u}_\varepsilon(x) - \frac{1}{2}\frac{\partial u_\varepsilon^k}{\partial x_i}(x^i - x_\alpha^i)\vec{e}_k - \frac{1}{2}\frac{\partial u_\varepsilon^i}{\partial x_k}(x^k - x_\alpha^k)\vec{e}_i + O(h^2)$ **(47).** Оценим величину $\int\limits_{K^\alpha \cap G(s)} |v^{\alpha(s)} - R_{ik}\vec{f}_{ik}(x_\alpha)|^2 dx$, положив $R_{ik} = R_{ik}^\alpha = \varepsilon_{ik}(\vec{u}_\varepsilon(x_\alpha))$ и учитывая, что $\vec{u}_\varepsilon^{(s)}$ сходится к $\vec{u}_\varepsilon$ в смысле (29), получим

$$\left\{\int\limits_{K^\alpha \cap G^{(s)}} |\vec{v}^{\alpha(s)} - R_{ik}^\alpha \vec{f}_{ik}(x_\alpha)|^2 dx\right\}^{1/2} \leqslant \left\{\int\limits_{K^\alpha \cap G^{(s)}} |\vec{u}_\varepsilon^{(s)}(x) - \vec{u}_\varepsilon(x)|^2 dx\right\}^{1/2} +$$

$$+ \left\{\int\limits_{K^\alpha \cap G^{(s)}} \left| \frac{1}{2}\frac{\partial u_\varepsilon^k}{\partial x_i}(x^i - x_\alpha^i)\vec{e}_k + \frac{1}{2}\frac{\partial u_\varepsilon^i}{\partial x_k}(x^k - x_\alpha^k)\vec{e}_i - \frac{1}{2}\{\Omega_{ik}(x^k - x_\alpha^k) \times\right.\right.$$

$$\left.\left.\times\,\vec{e}_i + \Omega_{ki}(x^i - x_\alpha^i)\vec{e}_k\} - \varepsilon_{ik}(\vec{u}_\varepsilon)\vec{f}_{ik}(x_\alpha)\right|^2 dx\right\}^{1/2} + O(h^{(n+4)/2}).$$ Таким об-

разом, при $s=s_k\to\infty$ имеем $\overline{\lim\limits_{s=s_k\to\infty}} \int\limits_{K^\alpha \bigcap G^{(s)}} |v^{\alpha(s)}-R_{ik}\vec{f}_{ik}(x_\alpha)|^2 dx = O(h^{n+4})$ **(48)**. Из (27) следует, что $\int\limits_{K^\alpha \bigcap G^{(s)}} \{W(\vec{v}^{\alpha(s)})+h^{-2-\theta}|\vec{v}^{\alpha(s)}-R^\alpha_{ik}\vec{f}_{ik}(x_\alpha)|^2\}dx \geqslant T_R{}^\alpha(s,\ h,\ x_\alpha)$. Учитывая (28), (46), (48), имеем $\int\limits_{K^\alpha \bigcap G^{(s)}} W(\vec{u}^{(s)})\,dx \geqslant T_R{}^\alpha - O(h^{n+2-\theta}) = a_{iklm}(s,\ h,\ x_\alpha)\,\varepsilon_{ik}\times$ $\times(\vec{u}_\varepsilon(x_\alpha))\,\varepsilon_{lm}(\vec{u}_\varepsilon(x_\alpha) - O(h^{n+2-\theta}))$. Так как число кубов $N = N(\varepsilon,\ h) = O(h^{-n})$, то $\sum\limits_{\alpha=1}^{N}\int\limits_{K^\alpha \bigcap G^{(s)}}\{W(\vec{u}_\varepsilon^{(s)})+\tau|\vec{u}_\varepsilon^{(s)}|^2+2(\vec{K},\vec{u}_\varepsilon^{(s)})\}dx \geqslant$

$$\geqslant \sum_{\alpha=1}^{N} a_{iklm}(s,\ h,\ x_\alpha)\,\varepsilon_{ik}(u_\varepsilon(x_\alpha))\,\varepsilon_{lm}(u_\varepsilon(x_\alpha)) + \int\limits_{G^{(s)}}\{\tau|\vec{u}_\varepsilon^{(s)}|^2 + 2(\vec{K}, \vec{u}_\varepsilon^{(s)})\}\,dx - O(h^{2-\theta}).$$

Перейдем в этом неравенстве к пределу при фиксированном $\varepsilon > 0$ сначала по $s=s_k\to\infty$, а затем по $h\to 0$. Учитывая при этом условия *1*, *2* теоремы 1, непрерывность $a_{iklm}(x)$, $b(x)$ и гладкость $\vec{u}_\varepsilon(x)$, а также сходимость $\vec{u}_\varepsilon^{(s)}(x)$ к $\vec{u}_\varepsilon(x)$ в смысле (29) получаем $\lim\limits_{s=\zeta_k\to\infty} I(\vec{u}_\varepsilon^{(s)}) \geqslant \int\limits_G \{a_{iklm}\varepsilon_{ik}(\vec{u}_\varepsilon)\,\varepsilon_{lm}(\vec{u}_\varepsilon) + \tau b\vec{u}_\varepsilon^2 + 2(\vec{K},\vec{u}_\varepsilon)\,b\}\,dx$. Переходя к пределу по $\varepsilon\to 0$ и учитывая (44), (44′), приходим к неравенству (43). Из (41) и (43) следует, что для любой функции $\vec{w}(x)\in \overset{\circ}{H}{}^1(G)$ $\tilde{I}(\vec{u}) \leqslant \tilde{I}(\vec{w})$. Поэтому $\vec{u}(x)$ является решением задачи (30) — (31), и теорема 1 доказана.

Список литературы: 1. E. Sanchez — Palencia. Non — Homogeneous media and vibration theory. Springer — Yerlag, 1980, с. 84 — 128. 2. *Жиков В. В.*, *Козлов С. М.*, *Олейник О. А.* О G-сходимости параболических операторов. — Успехи мат. наук. 1980, 36, вып. 1 (127), с. 126. 3. *Михлин С. Г.* Проблема минимума квадратичного функционала.—М.: Наука, 1952.— 214 с. 4. *Хруслов Е. Я.* Асимптотическое поведение решений и собственных значений второй краевой задачи при измельчении границы области. — Мат. сб., 1978, 106 (148), № 4 (8), с. 604 — 621.

Поступила в редколлегию 01.07.81.