УДК 513.86

Ю. Ш. АБРАМОВ

ЗОНЫ И СПЕКТРЫ СЕМЕЙСТВ АБСТРАКТНЫХ ТЕПЛИЦЕВЫХ ОПЕРАТОРОВ

В статье доказываются следующие результаты, анонсированные в работе [1][1].

Теорема 1. *Пусть* $\mathbf{F}$ — *семейство абстрактных* $\{\Omega, A, \varphi, m\}$ *теплицевых операторов и гомоморфизм* φ *удовлетворяет условию: если мера* $\mu \in M\varphi$ — *абсолютно непрерывна относительно* m, *то* $\mu = m$. *Тогда множества* $W(\mathbf{F} \mid H^2(m) \setminus \ker\varphi)$, $W(\mathbf{F})$ *и* $\tilde{W}(\mathbf{F})$ — *выпуклы.*

Теорема 2. *Пусть* $\mathbf{F}$ — *семейство теплицевых операторов в пространстве Харди* $H^2(\theta)$ *на единичной окружности. Тогда зоны* $W(\mathbf{F})$, $W_0(\mathbf{F})$ *и* $\tilde{W}(\mathbf{F})$ — *выпуклые множества.*

Теорема 3. *Пусть* G — *коммутативная компактная группа и* Γ — *некоторая полугруппа группы характеров* $\hat{G}$ *такая, что* $0 \in \mathbf{\Gamma}$, $\mathbf{\Gamma} \cup -\mathbf{\Gamma} = \hat{G}$, $\mathbf{\Gamma} \cap -\mathbf{\Gamma} = \{0\}$. *Пусть далее* A_Γ — *функциональная алгебра на* G *равномерных пределов конечных линейных комбинаций характеров* χ_a, $a \in \Gamma$ *и* m — *мера Хаара на* G, *представляющая некоторый гомоморфизм* φ_0. *Тогда для любого семейства абстрактных* $\{G, A_\Gamma, \varphi_0, m\}$ *теплицевых операторов* $\overline{W(\mathbf{F})} = \overline{\mathrm{conv}}\, \sigma(F)$.

Докажем сначала некоторые вспомогательные утверждения.

Лемма 1. *Если мера* m *удовлетворяет условию теоремы 1, то справедливы следующие свойства:*

а) множество $A + A^*$ *плотно в* $L^2(m)$;

б) если $h \in L^1(m)$, $h \geqslant 0$, *то* $\inf\limits_{f \in \ker\varphi} \int |1 - f|^2 h dm = \exp\left(\int \log h dm\right)$;

в) справедливо неравенство: $\int \log|f| dm \geqslant \log|\varphi(f)|$, $f \in H^2(m)$;

г) имеет место разложение: $L^2(m) = H^2(m) \oplus [H_0^2(m)]^*$, *где* $H_0^2(m)$ — *замыкание* $\ker\varphi$ *в пространстве* $L^2(m)$; A^*, $[H_0^2(m)]^*$ — *совокупности функций, комплексно-сопряженных к функциям из соответствующих множеств.*

Доказательство этой леммы можно найти в [2].

Лемма 2. *Пусть* φ *и мера* $m \in M_\varphi$ *удовлетворяют условию теоремы 1. Пусть* $h \in L^1(m)$, $h \geqslant 0$. *Следующие условия эквивалентны: 1)* $\log h \in L^1(m)$;

2) $h = |f|^2$, $f \in H^2(m) \setminus \ker\varphi$.

[1] По сравнению с работой [1] вместо рукописных латинских букв здесь приводятся латинские полужирные, а вместо готических — латинские.

Доказательство. Здесь используется техника, развитая в [2]. Покажем, что из 1) следует 2). Пусть E — замыкание $\ker\varphi$ в $L^2(hm)$ и пусть Φ — ортогональная проекция 1 на подпространство E в $L^2(hm)$. Согласно свойству *б*) леммы 1 $\rho^2 = \exp\left(\int \log h dm\right) = \int |1 - \Phi|^2 h dm$, где ρ — расстояние в $L^2(hm)$ от 1 до подпространства E. Поскольку Φ — ортогональная проекция 1 на E, то $\int g(\overline{1-\Phi}) h dm = 0$, $g \in \ker\varphi$.

Фиксируем $g \in \ker\varphi$. Поскольку $\Phi \in E$, то существует последовательность $f_n \in \ker\varphi$, $f_n \to \Phi$ в $L^2(hm)$. Но $g(1-f_n) \in \ker\varphi$, поэтому $\int g(1-f_n)(\overline{1-\Phi}) h dm = 0$ для всех n. Переходя к пределу, получаем $\int |1-\Phi|^2 g h dm = 0$, $g \in \ker\varphi$.

Поскольку $\log h \in L^1(m)$, то $\int \log h dm > -\infty$ и $\rho > 0$.

Мера $\mu = \rho^{-2} |1-\Phi|^2 hm$ — неотрицательна; причем, если $f \in A$ то $f - \varphi(f) \in \ker\varphi$, и поэтому $\int (f - \varphi(f)) d\mu = 0$. Следовательно, $\mu \in M\varphi$. Но мера μ — абсолютно непрерывна относительно меры m, поэтому $\mu = m$, т. е. $\rho^{-2}|1-\Phi|^2 h = 1$ (п. в. m). Если теперь $f = \rho(1-\Phi)^{-1}$, то $h = |f|^2$. Покажем, что $f \in H^2(m) \setminus \ker\varphi$. Поскольку $h = |f|^2$ и $h \in L^1(m)$, то $f \in L^2(m)$. Установим, что $f \perp [H_0^2(m)]^*$. Для этого достаточно доказать, что $\int f g dm = 0$, $g \in \ker\varphi$. Пусть $g \in \ker\varphi$, тогда поскольку $1 - \Phi \perp \ker\varphi$ в $L^2(hm)$, то $\rho \int f g dm = \rho^2 \int (1-\Phi)^{-1} g dm = \rho^2 \int (\overline{1-\Phi}) |1-\Phi|^{-2} g dm = \int (\overline{1-\Phi}) \times g h dm = 0$. Теперь из леммы 1, *г*) $f \in H^2(m)$. Вычислим $\varphi(f)$. Поскольку $\rho^2(1-\Phi)^{-1} = (\overline{1-\Phi}) h$, то $\rho \int f dm = \int (\overline{1-\Phi}) \times h dm - \int (\overline{1-\Phi}) \Phi h dm = \int |1-\Phi|^2 h dm = \rho^2$.

Следовательно, $\int f dm = \rho > 0$ и $f \notin \ker\varphi$. Обратное утверждение леммы следует из леммы 1, *в*): $\int \log h dm = 2\int \log|f| dm \geqslant 2\log|\varphi(f)| > -\infty$, поскольку $f \in H^2(m) \setminus \ker\varphi$. Но $\log h < h \in L^1(m)$, поэтому $\log h \in L^1(m)$.

Положим $[H^2(m)] = \{ |f|^2, f \in H^2(m) \}$; $[H^2(m) \setminus \ker\varphi] = \{ |f|^2, f \in H^2(m) \setminus \ker\varphi \}$.

Лемма 3. *Множество* $[H^2(m) \setminus \ker\varphi]$ — *затупленный конус в пространстве* $L^1(m)$.

Доказательство. Ясно, что вместе с u этому множеству принадлежит αu, $\alpha > 0$ — скаляр. Пусть $u, v \in [H^2(m) \setminus \ker\varphi]$, т. е. $u = |f|^2$, $v = |g|^2$, где $f, g \in H^2(m) \setminus \ker\varphi$; тогда $h = u + v \in L^1(m)$ и $h \geqslant 0$ Кроме того, $\log h \geqslant \log 2 + \log|f| + \log|g|$. Из леммы 2 следует, что $\log|f|$, $\log|g| \in L^1(m)$, поэтому $\log h \in L^1(m)$. Вновь по лемме 2 существует $\psi \in H^2(m) \setminus \ker \varphi$ такая, что $h = |\psi|^2$, т. е. h принадлежит множеству $[H^2(m) \setminus \ker \varphi]$.

Доказательство теоремы 1. Положим $X = H^2(m) \setminus \ker\varphi$ и пусть η — зональное отображение семейства $F = \{R_{T_g}, T_g \in \boldsymbol{F}\}$ на X, где R_{T_g} — функционал Релея оператора T_g:

$$R_{T_g}(x) = \frac{\int g\,|x|^2 dm}{\int |x|^2 dm},\ x \in H^2(m).$$

Пусть $\eta(x),\ \eta(y) \in W(X),\ \alpha \in [0, 1]$. Тогда для всех $T_g \in \boldsymbol{F}$ $\alpha\eta(x)[R_{T_g}] + (1-\alpha)\,\eta(y)[R_{T_g}] = \alpha R_{T_g}(x) + (1-\alpha) R_{T_g}(y) =$

$$= \int g\left(\alpha \frac{|x|^2}{(x,x)} + (1-\alpha)\frac{|y|^2}{(y,y)}\right) dm.$$

Поскольку $\alpha \frac{|x|^2}{(x,x)},\ (1-\alpha)\frac{|y|^2}{(y,y)} \in [X]$, то по лемме 3 существует функция $z \in X$ такая, что $|z|^2 = \alpha(|x|^2/(x, x)) + (1-\alpha)(|y|^2/(y, y))$. Поэтому, т. к. $(z, z) = 1$, то $\alpha\eta(x)[R_{T_g}] + (1-\alpha)\eta(y)[R_{T_g}] = \eta(z)[R_{T_g}]$, т. е. $\alpha\eta(x) + (1-\alpha)\eta(y) = \eta(z)$, и тем самым $W(X)$ — выпукло. Покажем теперь, что $\overline{W(\boldsymbol{F})} = \overline{W(\boldsymbol{F}|X)}$, где черта означает слабое $(*)$-замыкание. Ясно, что $\overline{W(\boldsymbol{F})} \supset \overline{W(\boldsymbol{F}|X)}$. Покажем, что $W(\boldsymbol{F}) \subset \overline{W(\boldsymbol{F}|X)}$. Пусть $\eta(x) \in W(\boldsymbol{F}),\ x \in H^2(m)$. Поскольку X плотно в $H^2(m)$, то существует последовательность $x_n \in X$ такая, что $x_n \to x$ в $H^2(m)$. Тогда $\eta(x_n)(f) = f(x_n)$ сходится к $f(x) = \eta(x)(f)$ для всех $f \in F$, т. е. $\eta(x_n) \to \eta(x)$. Но $\eta(x_n) \in \overline{W(\boldsymbol{F}|X)}$, и поэтому $\eta(x) \in \overline{W(\boldsymbol{F}|X)}$. Таким образом, нужное равенство доказано. Теперь, поскольку $W(\boldsymbol{F}|X)$ выпукло, то выпукло и его замыкание $\overline{W(\boldsymbol{F})}$. Выпуклость $\tilde{W}(\boldsymbol{F})$ следует из того, что $\tilde{W}(\boldsymbol{F})$ можно отождествить с множеством $\bigcup\limits_{t>0} t\overline{W(\boldsymbol{F})}$.

Доказательство теоремы 2 подобно доказательству теоремы 1 и дополнительно использует тот факт, что множество $[H^2(\theta)]$ — конус.

Доказательство теоремы 3. Семейству $\boldsymbol{F}$ отвечает семейство $\boldsymbol{F}_1$ операторов умножения в $L^2(m)$ и, соответственно, множество F_1 их функционалов Релея: $T_g \to L_g,\ L_g(f) = gf,\ f \in L^2(m)$, $T_g \in \boldsymbol{F}$; причем для $x \in H^2(m)\ R_{T_g}(x) = R_{L_g}(x)$. Таким образом, существует естественное отображение $v : P(F_1)^* \to P(F)^*$, где $v(\varphi) R_{T_g} = \varphi(R_{L_g})$; $T_g \in \boldsymbol{F}$; $\varphi \in P(F_1)$. Известно соотношение между аппроксимативными спектрами (в нашем случае, поскольку операторы симметричны — просто спектрами) операторов L_g и T_g (см. [3]) $:\sigma(L_g) = \sigma(T_g)$. В частности, $\inf\limits_{x \in L^2(m)} R_{L_g}(x) \geqslant \inf\limits_{x \in H^2(m)} R_{T_g}(x)$, и на самом деле здесь равенство. Отсюда видно, что v отображает множество средних $K(F_1|L^2(m))$ на множество средних $K(F|H^2(m))$.

Пусть $\varphi \in \sigma(F_1)$, т. е. существует последовательность $\{x_\alpha\} \subset L^2(m)$; $\|x_\alpha\| = 1$ такая, что $L_g x_\alpha - \varphi(R_{Lg}) x_\alpha \to 0$ для всех $L_g \in F_1$. Пусть $\{L_{\chi_a},\ a \in \Gamma\}$ — семейство операторов умножения, соответствующее характерам χ_a, $a \in \Gamma$. В случае окружности эти операторы — степени оператора двустороннего сдвига. Из результатов [4] следует, что для любого символа $g \in L^\infty(m)$ справедлива сильная сходимость операторов $L^*_{\chi_a} P L_g P L_{\chi_a} \xrightarrow{a \in \Gamma} L_g$, $L^*_{\chi_a} P L_{\chi_a} \xrightarrow{a \in \Gamma} I$, где $P : L^2(m) \to H^2(m)$ — проектор. Из этого уже легко видеть (находя соответствующую последовательность), что $v(\varphi) \in \sigma(F)$. Таким образом, $v(\sigma(F_1)) \subset \sigma(F)$. Но операторы $L_g \in F_1$ — коммутируют. Нетрудно показать, что для коммутативного семейства операторов верны соотношения: $K(F_1 | L^2(m)) = \overline{W(F_1)} = \overline{\mathrm{conv}}\, \sigma(F)$. Поэтому, используя выпуклость $\overline{W(F)}$ и соотношение $\overline{\mathrm{conv}}\, \sigma(F) \subset K(F | H^2(m)) = v(K(F_1 | L^2(m))) \overline{\mathrm{conv}}\, v(\sigma(F_1))$, получим теорему.

Список литературы: 1. *Абрамов Ю. Ш.* Числовые области, зоны и спектры семейств самосопряженных операторов.— Докл. АН СССР, 1981, **257**, № 5, с. 1033—1037. 2. *Гамелин Т.* Равномерные алгебры. — М.: Мир, 1970.—120 с. 3. *Халмош П.* Гильбертово пространство в задачах. — М.: Мир, 1970.— 125 с. 4. *Coburn L. A., Douglas R. G.* C^*-algebras of operators on a half — space I. — Inst. des Hautes Etudes sci, 1971, т. 40, с. 59 — 67.

Поступила в редколлегию 06.06.80.