УДК 519.9

М. Я. ЖИТОМИРСКИЙ

ОБ ЭКВИВАЛЕНТНОСТИ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ ФОРМ

1. *Классификация билинейных форм.* Вопрос о классификации билинейных форм относительно линейных преобразований координат сводится к вопросу о классификации матриц относительно следующего действия полной линейной группы: $TA = T^tAT$, где t — значок транспонирования, $\det T \neq 0$. Две матрицы, эквивалентные в смысле такого действия полной линейной группы, назовем t-эквивалентными.

Согласно [2, с. 362, т. 4], две неособые матрицы A и B t-эквивалентны тогда и только тогда, когда элементарные делители матриц $A^t - \lambda A$ и $B^t - \lambda B$ совпадают. (Основное поле — поле комплексных чисел). Нас интересует также канонический вид матрицы A относительно указанных преобразований, который сейчас и будет построен. Мы ограничимся тем случаем, когда A — неособая комплексная матрица порядка n, удовлетворяющая следующему условию: если n — четно — все собственные числа матрицы $A^{-1}A^t$, а если n — нечетно — все, кроме одного (с учетом кратности), отличны от ± 1.

Назовем это условие условием P. Его формулировка связана с тем, что в случае нечетного порядка по крайней мере одно собственное число матрицы $A^{-1}A^t$ равно 1.

Пусть элементарные делители матрицы $A^{-1}A^t$ равны $d_1(\lambda), \ldots, d_s(\lambda)$, $d_j(\lambda) = (\lambda - \alpha_j)^{\gamma_j}$ $(j = 1, \ldots, s)$. Так как матрица A удовлетворяет условию P, то мы вправе считать, что $\alpha_p \cdot \alpha_l \neq 1$ при $p, l \leqslant [s/2]$. Каждому элементарному делителю $d_j(\lambda)$ при $j \leqslant [s/2]$ сопоставим две матрицы: $B_j = \| b_{ik} \|$, $C_j = \| c_{ik} \|$ порядка γ_j с элементами:

$$b_{ik} = \begin{cases} \lambda_j, & i + k = \gamma_j + 1, \\ 1, & i + k = \gamma_j + 2, \\ 0, & i + k \neq \gamma_j + 1, \gamma_j + 2, \end{cases} \qquad c_{ik} = \begin{cases} 1, & i + k = \gamma_j + 1, \\ & \gamma_j + 2, \\ 0, & i + k \neq \gamma_j + 1, \\ & \gamma_j + 2. \end{cases}$$

Построим теперь матрицу D следующим образом. На второй главной диагонали разместим последовательно матрицы $B_1, \ldots, B_{[s/2]}$, начиная с верхнего правого угла. Начиная с левого нижнего угла, последовательно разместим матрицы $C_1, \ldots, C_{[s/2]}$. Если s — нечетно, то на пересечении двух главных диагоналей матрицы D будет стоять 1.

Теорема 1. *Матрицы A и D t — эквивалентны.*

Доказательство. Покажем сначала, что D — неособая матрица порядка n (того же, что и A). Известно, [2, с. 363], что с каждым элементарным делителем $(\lambda - \alpha)^j$ матрицы $A^{-1}A^t$ в систему ее элементарных делителей входит $(\lambda - \alpha^{-1})^j$. Отсюда следует, что s — четно тогда и только тогда, когда n — четно, и что порядки матриц A и D совпадают. Матрица D — неособая, так как иначе особой была бы матрица A.

Найдем теперь элементарные делители матрицы $D^{-1}D^t$ или, что все равно, λ-матрицы $D^t - \lambda D$. Они, очевидно, равны $d_1(\lambda), \ldots, d_\nu(\lambda)$, $d_1'(\lambda), \ldots, d_\nu'(\lambda)$, если n — четно, и $d_1(\lambda), \ldots, d_\nu(\lambda)$, $(\lambda - 1)$, $d_1'(\lambda), \ldots, d_\nu'(\lambda)$, если n — нечетно. Здесь $d_j'(\lambda) = (\lambda - \alpha_j^{-1})^{\gamma_j}$, $\nu = [s/2]$. Матрица $A^{-1}A^t$ имеет точно такие же элементарные делители, и остаётся воспользоваться указанной в начале п. 1 теоремой. Теорема 1 доказана.

Матрицу D естественно назвать каноническим видом матрицы A. Если элементарные делители матрицы $A^{-1}A^t$ просты, то каноническим видом матрицы A будет «кособиагональная» матрица. Подробнее теорема 1 имеет

Следствие. Пусть матрица A удовлетворяет условию P и все элементарные делители матрицы $A^{-1}A^t$ просты. Тогда матрица A подобна матрице $D = \| d_{ik} \|$, где

$$d_{ik} = \begin{cases} \lambda_i, & i + k = n + 1, \ i \leqslant [s/2], \\ 1, & i + k = n + 1, \ i > [s/2], \\ 0, & i + k \neq n + 1, \end{cases}$$

а $\lambda_1, \ldots, \lambda_{[s/2]}$ — собственные числа матрицы $A^{-1}A^t$, такие, что $\lambda_p \cdot \lambda_l \neq 1$ при $p, l \leqslant [s/2]$.

2. *Канонический вид дифференциальной формы.* Пусть $L(n)$ — пространство формальных отображений вида

$$\varphi(x) = \left\{ \sum_{|\alpha| \geqslant 2} \varphi^j_\alpha x^\alpha \right\}_{j=1}^n, \quad \varphi^j_\alpha \in C, \ x \in R^n,$$

α-мультииндекс, $\alpha = (\alpha_1, \ldots, \alpha_n)$, $|\alpha| = \sum_{i=1}^n \alpha_i$, $x^\alpha = x_1^{\alpha_1} \cdot \ldots \cdot x_n^{\alpha_n}$.
Тогда множество G формальных отображений вида $\Phi(x) = x + \varphi(x)$, $\varphi \in L(n)$ является группой относительно обычной композиции.

Пусть $\Lambda^1(n)$ — пространство дифференциальных форм I степени от n переменных. Группа G действует в $\Lambda^1(n)$ обычным образом: образ $\omega \in \Lambda^1(n)$ под действием $\Phi \in G$ есть дифференциальная форма $\Phi.\omega$, получающаяся из ω при формальной замене переменной $x = \Phi(y)$.
Будем рассматривать дифференциальные формы вида $\omega = [(Ax + g(x)) \cdot dx]$, где $dx = (dx_1, \ldots, dx_n)$; A — линейный оператор в G^n, $g \in L(n)$ и $[\zeta \cdot \mu] = \sum_{i=1}^n \zeta_i \mu_i$, $\zeta, \mu \in \mathbf{C}^n$, $\zeta = (\zeta_1, \ldots, \zeta_n)$, $\mu = (\mu_1, \ldots, \mu_n)$.

Пусть $\Phi(x) \in G$, тогда $\Phi(x) = x + \varphi(x)$, $\varphi \in L(n)$. Легко видеть, что $\Phi.\omega = [Ax \cdot dx] + [(L_A(\varphi) + M_{A,g}(\varphi))\, dx]$, где $M_{Ag}(\varphi) = g(x + \varphi) + (\varphi')^t A\varphi + (\varphi')^t g(x + \varphi)$, а $L_A : L(n) \to L(n)$ — линейный оператор, действующий по формуле $L_A(\varphi) = A\varphi + (\varphi')^t Ax$.

Пусть $L^{(m)}(n)$ — подпространство $L(n)$, состоящее из однородных полиномиальных отображений степени m, $m \geqslant 2$. В пространство $L^{(m)}(n)$ введем скалярное произведение: пусть $\varphi(x) \in L^{(m)}(n)$, $\psi(x) \in L^{(m)}(n)$, тогда $(\varphi \cdot \psi) = \sum_{j=1}^n \sum_{|\alpha|=m} \varphi^j_\alpha \bar{\psi}^j_\alpha$. Поскольку подпространства $L^{(m)}(n)$ инвариантны относительно действия оператора L_A, то мы можем определить оператор $L_A^{(m)}$ как ограничение оператора L_A на подпространство $L^{(m)}(n)$. Через $\overset{*}{L}_A$ обозначим такой оператор в $L(n)$, что его ограничение на $L^{(m)}(n)$ есть $(L_A^{(m)})^*$ $(m \geqslant 2)$.

Теорема 2. *Пусть* $\omega \in \Lambda^1(n)$ *и* $\omega = [(Ax + g(x))\, dx]$, $g \in L(n)$. *Существует такое отображение* $\varphi \in L(n)$, *что* $(x + \varphi(x)).\,\omega = [(Ax + \zeta(x))\, dx]$, *где* $\zeta \in \operatorname{Ker} \overset{*}{L}_A$.

Доказательство. Введем обозначения. Пусть $\varphi \in L(n)$,

$$\varphi = \left\{ \sum_{|\alpha| \geqslant 2} \varphi^j_\alpha x^\alpha \right\}_{j=1}^n. \quad \text{Тогда } P^{(i)}(\varphi) = \varphi^{(i)} = \left\{ \sum_{|\alpha| = i} \varphi^j_\alpha x^\alpha \right\}_{j=1}^n.$$

Для доказательства теоремы 2 достаточно найти такое отображение $\varphi \in L(n)$, что для всех $i \geqslant 2$

$$P^{(i)}(L_A(\varphi) + M_{A,g}(\varphi)) \in \operatorname{Ker}(L_A^{(i)})^*. \tag{1}$$

Определим отображения $\varphi_j \in L^{(j)}(n)$ следующим индуктивным построением: пусть $g^{(2)} = L_A^{(2)}(\tau_2) + \nu_2$, $\tau_2 \in L^{(2)}(n)$, $\nu_2 \in \operatorname{Ker}(L_A^{(2)})^*$

(такое разложение существует и единственно). Тогда $\varphi_2 = -\tau_2$. Допустим, что определены отображения φ_j при $2 \leqslant j \leqslant k-1$. Рассмотрим отображение $\psi_k = \sum\limits_{j=2}^{k-1} \varphi_j$. Пусть $P^{(k)}(M_{A,\,g}(\psi_k)) = L_A^{(k)}(\tau_k) + \nu_k$, $\nu_k \in \operatorname{Ker}(L_A^{(k)})^*$. Положим тогда $\varphi_k = -\tau_k$.

Покажем, что отображение $\varphi = \sum\limits_{j=2}^{\infty} \varphi_j$ искомое, т. е. условие (1) выполнено для всех $i \geqslant 2$. Заметим, что $P^{(i)}(M_{A,\,g}(\varphi)) = P^{(i)} \times \times (M_{A,\,g}(\psi_i))$ $(i > 2)$ и что $P^{(i)}(L_A(\varphi)) = L_A(\varphi_i)$. Значит, нам надо доказать, что выполнены условия

$$L_A(\varphi_i) + P^{(i)}(M_{A,\,g}(\psi_i)) \in \operatorname{Ker}(L_A^{(i)})^*, \tag{2}$$

$$L_A(\varphi_2) + P^{(2)}(M_{A,\,g}(\varphi)) \in \operatorname{Ker}(L_A^{(2)})^*. \tag{3}$$

Выполнение (2) следует из построения отображений φ_i при $i > 2$, выполнение (3) — из построения φ_2 и из того, что $P^{(2)}(M_{A,\,g}(\varphi)) = g^{(2)}$. Теорема 2 доказана.

3. *Линеаризация и резонансные соотношения.* Найдем условия на матрицу A, при которых любая форма вида $\omega = [(Ax + g(x)) \times \times dx]$, $g \in L(n)$ «линеаризуется», т. е. эквивалентна форме $[Ax \times dx]$ относительно действия группы G.

Теорема 3. *Для того чтобы дифференциальная форма вида* $\omega = [(Ax + g(x))\,dx]$ (A — фиксированная матрица, $g \in L(n)$) *линеаризовалась, необходимо и достаточно, чтобы* $\operatorname{Ker} L_A^* = \{0\}$.

Доказательство. Достаточность следует из теоремы 2. Покажем необходимость. Пусть $\operatorname{Ker} L_A^* \neq \{0\}$ и пусть p — наименьшее из натуральных чисел, обладающих тем свойством, что $\operatorname{Ker}(L_A^{(p)})^* \neq \{0\}$. Тогда $\operatorname{Im} L_A^{(p)} \neq L^{(p)}(n)$, т. е. существует такое отображение $f \in L^{(p)}(n)$, что $f \,\overline{\in}\, \operatorname{Im} L_A^{(p)}$. Положим $\tau_j = 0$ при $j \neq p$, $\tau_p = -f$. Пусть $\tau \in L(n)$ и $\tau^{(j)} = \tau_j$. Покажем, что форма $[(Ax + \tau(x))\,dx]$ не линеаризуется. Действительно, согласно теореме 2, для ее линеаризации необходимо существование такого отображения $\varphi \in L(n)$, что

$$L_A(\varphi^{(p)}) + P^{(p)}(M_{A,\,\tau}(\varphi)) = 0. \tag{4}$$

Но $P^{(p)}(M_{A,\,\tau}(\varphi)) = \tau^{(p)} = -f$, т. е. для выполнения (4) должно быть: $L_A(\varphi^{(p)}) = f$, что невозможно, так как $f \,\overline{\in}\, \operatorname{Im} L_A^{(p)}$. Теорема 3 доказана.

Вопрос о тривиальности ядра оператора L_A^* аналогичен вопросу о существовании резонансных соотношений в случае дифференциальных уравнений. Если это пространство нетривиально, то форму $\omega = [(Ax + g(x))\,dx]$ можно привести к каноническому виду, который соответствует теореме Пуанкаре — Дюлака для дифференциальных уравнений.

Для нахождения аналога резонансных соотношений рассмотрим сначала случай симметрической невырожденной матрицы A.

Теорема 4. *Пусть A — симметрическая невырожденная матрица порядка $n \geqslant 2$. Тогда* 1) $\operatorname{Ker} L_A^* \neq \{0\}$; 2) *каждая форма* $\omega = [(Ax + g(x))\,dx]$, $g \in L(n)$ *эквивалентна форме вида* $[(Ax + \zeta(x))\,dx]$, *где отображение* $\zeta(x) = \{\sum_{|\alpha| \geqslant 2} \zeta_\alpha^j x^\alpha\}_{j=1}^n$ *обладает следующим свойством для любого* $k \in (1, \ldots, n)$ *и любого мультииндекса* β, $|\beta| \geqslant 2$ *выполнено условие* $\sum_{\substack{j=1\\ \beta_j \neq 0}}^n \zeta^j_{\beta - 1_j + 1_k} = 0$, где $\beta = (\beta_1, \ldots, \beta_n)$.

Замечание. Если A — матрица первого порядка (ненулевая), то $\operatorname{Ker} L_A^* = \{0\}$, так как оператор L_A будет следующим: $L_A(\varphi) = a\varphi + a\varphi' x$, $a \in \boldsymbol{C}$, следовательно, $L_A^{(i)}(\varphi) = a(i+1)\varphi$, где $\varphi \in L^{(i)}(n)$.

Доказательство теоремы 4. Непосредственные вычисления показывают, что $L_A^*(\varphi) = A^*\varphi + \bar{A}(\varphi')^t x$, где $\bar{A}$ — комплексно-сопряженная к A матрица. Так как $A^* = \bar{A}$ и $\det A \neq 0$, то пространство $\operatorname{Ker} L_A^*$ состоит из таких $\varphi \in L(n)$, для которых $\varphi + (\varphi')^t x \equiv 0$. Для коэффициентов φ_α^j это означает, что для любого $k \in (1, \ldots, n)$ и мультииндекса β, $|\beta| \geqslant 2$ выполнено

$$\sum_{\substack{j=1\\ \beta_j \neq 0}}^n \varphi^j_{\beta - 1_j + 1_k} = 0. \tag{5}$$

Мы доказали второе утверждение теоремы. Для доказательства того, что $\operatorname{Ker} L_A^* \neq \{0\}$, рассмотрим равенство (5) при всевозможных $k = 1, \ldots, n$ и мультииндексах β, $|\beta| = m$, где m — любое фиксированное натуральное число не меньше 2. Мы получим систему линейных уравнений, определяющую $\operatorname{Ker}(L_A^{(m)})^*$. В этой системе одинаково число уравнений и неизвестных, но некоторые уравнения совпадают, например, при $\beta = \beta_0$, $k = k_0$ и при $\beta = \beta_0 - 1_l + 1_{k_0}$, $k = l$ (если только $\beta_{0_l} \neq 0$). Тем самым, $\operatorname{Ker}(L_A^{(m)})^* \neq \{0\}$ значит, $\operatorname{Ker} L_A^* \neq \{0\}$. Теорема 4 доказана.

Определим теперь аналоги резонансных соотношений для того случая, когда матрица A удовлетворяет условиям следствия теоремы 1.

Теорема 5. *Пусть матрица A порядка n удовлетворяет условиям следствия теоремы 1. Тогда равенство* $\operatorname{Ker} L_A^* = \{0\}$ *эквивалентно соотношениям*

$$\frac{\tau_k}{\tau_k - 1} + \sum_{\substack{i=1\\ i \neq (n+1)/2}}^n \frac{m_i}{\tau_i - 1} \neq 0 \ \ (1 \leqslant k \leqslant n,\ k \neq (n+1)/2)$$

для собственных чисел τ_i $(i = 1, \ldots, n)$ *матрицы* $A^{-1}A^t$ *и любых* *целых неотрицательных* m_i, *таких, что* $\sum_{i=1}^{n} m_i \geqslant 2$ (если порядок матрицы $A n = 2l+1$, считаем, что $\tau_{l+1} = 1$).

Доказательство. Сначала покажем, что условие тривиальности ядра оператора $\overset{*}{L}_A$ инвариантно относительно преобразований $A \to T^t A T$, $\det T \neq 0$. Согласно теореме 3, для этого достаточно показать эквивалентность двух утверждений: 1) форма $\omega_A = [(Ax = g(x)) \cdot dx]$ эквивалентна форме $[Ax \cdot dx]$ при любом $g(x) \in L(n)$; 2) форма $\omega_T = [(T^t A T x + \mu(x))\, dx]$ эквивалентна форме $[T^t A T x \cdot dx]$ при любом $\mu(x) \in L(n)$ $(\det T \neq 0)$.

Предположим, что утверждение 1) верно. В форме ω_T сделаем замену переменной $x = T^{-1} y$, получим новую форму вида $\omega_2 = [(Ay + \mu_1(y))\, dy]$, $\mu_1 \in L(n)$. Поскольку утверждение 1) верно, то существует отображение $\varphi(z) \in L(n)$, такое, что $(z + \varphi(z))$; $\omega_2 = [Az \cdot dz]$. В полученной форме $[Az \cdot dz]$ произведем замену $z = Tu$. Получим форму $[(T^t A T u \cdot du]$. В конечном счете, мы произвели замену $x = T^{-1}(Tu + \varphi(Tu))$, $\varphi \in L(n)$. Легко видеть, что отображение $T^{-1}(Tu + \varphi(Tu))$ принадлежит группе G, т. е. утверждение 2) верно.

Предположим теперь, что утверждение 2) верно. Пусть $B = T^t A T$. Тогда $A = (T^{-1})^t B T^{-1}$ и, воспользовавшись уже доказанным, получаем, что справедливо утверждение 1).

В связи со сказанным выше, мы можем, воспользовавшись следствием теоремы 1, считать, что

$$A = \| a_{ik} \|, \quad a_{ik} = \begin{cases} \tau_i, & i+k = n+1,\ i \leqslant [n/2], \\ 1, & i+k = n+1,\ i > [n/2], \\ 0, & i+k \neq n+1, \end{cases}$$

где $\tau_1, \ldots, \tau_{[n/2]}$ — такие собственные числа матрицы $A^{-1}A^t$, что $\tau_i \tau_j \neq 1$ $(i, j = 1, \ldots, [n/2])$.

Пусть существует $\varphi \in L(n)$, $\varphi \neq 0$ такое, что $\overset{*}{L}_A(\varphi) = 0$, т. е. $B^t \varphi + B(\varphi')^t x = 0$, где $B = \overline{A}$. Тогда для каждого $m \geqslant 2$ существует $\varphi \in L^{(m)}(n)$:

$$B^t \varphi + B(\varphi')^t x = 0, \quad \varphi \in L^{(m)}(n). \tag{6}$$

Равенство (6) задает систему линейных уравнений (для каждого фиксированного $m \geqslant 2$) для коэффициентов φ_α^j, $|\alpha| = m$, именно:

$$(\overline{\lambda}_k \beta_{n+1-k} + \overline{\lambda}_{n+1-k})\, \varphi_\beta^{n+1-k} + (\beta_{n+1-k} + 1)\, \overline{\lambda}_k \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq n+1-k,\ \beta_j \neq}}^{n} \varphi^j_{\beta+1_{n+1-k}-1_j} = 0 \tag{7}$$

$(k = 1, \ldots, n$, β — мультииндекс, $\beta = (\beta_1, \ldots, \beta_n)$, $|\beta| = m)$. Здесь $\lambda_k = \tau_k$ при $k \leqslant [n/2]$ и $\lambda_k = 1$ при $k > [n/2]$. Зафиксируем номер $l \in (1, \ldots, n)$ и мультииндекс α, $|\alpha| = m$. Выпишем из (7) те уравнения, в которых $\beta = \alpha - 1_{n+1-j} + 1_{n+1-l}$, $k = j$, $(j = 1, \ldots, n$, $\alpha_{n+1-j} \neq 0)$. В эти уравнения в качестве неизвестных входят только $\varphi^j_{\alpha - 1_j + 1_{n+1-l}}$, где j пробегает такое множество номеров, что $\alpha_j \neq 0$. Тем самым система (7) распадается на несколько систем, каждая из которых зависит от номера l и мультииндекса α, $|\alpha| = m$. Детерминанты этих систем будем обозначать $D_{l,\alpha}$. Вычисления показывают, что

1) если n — четно, то

$$D_{l,\alpha} = P_{l,\alpha}\left(\frac{h_l}{h_l - 1} + \sum_{j=1}^{n} \frac{\alpha_{n+1-j}}{h_j - 1}\right);$$

2) если $n = 2p + 1$, $l \neq p + 1$, $\alpha_{p+1} \neq 0$, то

$$D_{l,\alpha} = R_{l,\alpha}\left(\frac{h_l}{h_l - 1} + \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq p+1}}^{n} \frac{\alpha_{n+1-j}}{h_j - 1}\right);$$

3) если $n = 2p + 1$, $l \neq p + 1$, $\alpha_{p+1} \neq 0$, то $D_{l,\alpha} = -\alpha_{p+1} R_{l,\alpha}$;

4) если $n = 2p + 1$, $l = p + 1$, то $D_{l,\alpha} = (\alpha_{p+1} + 1) R_{l,\alpha}$.

Здесь $h_j = \overline{\lambda}_{n+1-j}/\overline{\lambda}_j$ $(j = 1, \ldots, n)$, $P_{l,\alpha} = \prod_{j \in M_{l,\alpha}} (\overline{\lambda}_{n+1-j} - \overline{\lambda}_j)$, где $M_{l,\alpha}$ — некоторое подмножество множества $(1, \ldots, n)$, $R_{l,\alpha} = \prod_{j \in N_{l,\alpha}} (\overline{\lambda}_{n+1-j} - \overline{\lambda}_j)$, где $N_{l,\alpha}$ — подмножество множества $(1, \ldots, n)$, не содержащее $[n/2] + 1$.

Поскольку матрица A удовлетворяет условию P, то $R_{l,\alpha} \neq 0$ ни при каких парах номера l и мультииндекса α, а $P_{l,\alpha} \neq 0$, когда порядок матрицы A четен. Поэтому в случаях 3), 4) $D_{l,\alpha} \neq 0$ для всех пар l и мультииндекса α; $\overline{h}_j$ суть собственные числа матрицы $A^{-1}A^t$ при $j = 1, \ldots, n$. Отсюда и вытекает утверждение теоремы. Теорема 5 доказана.

Приношу глубокую благодарность Г. Р. Белицкому за постановку задачи и научное руководство.

Список литературы: 1. *Арнольд В. И.* Дополнительные главы теории обыкновенных дифференциальных уравнений.— М.: Физматгиз, 1978.—304 с. 2. *Мальцев А. И.* Основы линейной алгебры.—М.—Л.: Гостехиздат, 1948.—424 с.

Поступила 14 мая 1979 г.