УДК 517.946

И. Л. ВИЛЕНЦ

О РЕГУЛЯРНОЙ ПОЛИНОМИАЛЬНОЙ МНОГОТОЧЕЧНОЙ ЗАДАЧЕ В ПОЛОСЕ ДЛЯ СИСТЕМЫ ЛИНЕЙНЫХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ В ЧАСТНЫХ ПРОИЗВОДНЫХ

Пусть $\Phi = \{\varphi(x)\}$, $(x \in R^1)$ — линейное топологическое пространство, инвариантное относительно сдвигов, отражений аргумента, дифференцирования и умножения на полиномы. Φ' сопряженное к Φ; $C_m^k([0, T], \Phi')$ пространство, элементами которого являются векторы $u(x, t) = \{u_1(x, t), \ldots, u_m(x, t)\}$, каждая компонента которых есть k раз непрерывно дифференцируемое отображение $[0, T]$ в Φ'; $C(\Phi)$ обозначает совокупность свертывателей над Φ, т. е. таких элементов $f \in \Phi'$, что $\forall \varphi(x) \in \Phi$ $(f \ast \varphi) \overset{\text{def}}{=} (f(y), \varphi(x-y)) \in \Phi$. Здесь аргумент y указывает на то, что функционал f действует на $\varphi(x-y)$ как функцию y, а x играет роль параметра. Тем же значком $\ast$ будем обозначать свертку в Φ', т. е., если $f \in C(\Phi)$ и $g \in \Phi'$, $k = f \ast g$ определяется как такой элемент Φ', что $\forall \varphi(x) \in \Phi$ $(k, \varphi) = (g, f \ast \varphi)$. Функцию $a(x) \in C^\infty(R)$ будем называть мультипликатором в Φ, если $a(x)\Phi \subset \Phi$. Множество мультипликаторов пространства Φ обозначим $M(\Phi)$.

Определение 1. *Полиномиальной многоточечной задачей называется задача отыскания* $u(x, t) \in C_m^{(1)}([0, T], \Phi')$, *удовлетворяющей условиям*

$$Lu(x, t) \equiv \frac{\partial u(x, t)}{dt} - P\left(t, \frac{\partial}{\partial x}\right) u(x, t) = 0, \tag{1}$$

$$\sum_{k=1}^{l} G_k(x) * [Q_k(ix)\, u(x, T_k)] = 0. \tag{2}$$

Здесь P — матричный $(m \times m)$ дифференциальный оператор с непрерывными (по t) коэффициентами, $Q_k(ix) = \sum_{j=0}^{N_1} (ix)^j Q_{kj}$, Q_{kj} — — $(m \times m)$ — постоянные матрицы, $G_k(x)$ — $(m \times m)$ — матрицы, элементы которых принадлежат $C(\Phi)$; $\{T_k\}_{k=1}^{l} \in [0, T]$.

В данной работе нас будет интересовать вопрос: в каких пространствах задача (1)—(2) имеет конечномерное пространство решений. Мы на него ответим, предполагая дополнительно, что элементы $F\{G_k(x)\} = A_k(s)$ прннадлежат $M(\Phi)$. (В последнем равенстве и дальше $F\{\cdot\}$ обозначает символ преобразования Фурье по аргументу x).

До настоящей работы исследовались лишь условия отсутствия нетривиального решения задачи (1)—(2) и только в случае постоянных матриц Q_k. Близкой по постановке является также задача, изучавшаяся А. В. Бицадзе в [4]. Она состоит в отыскании функции $u(x)$, удовлетворяющей уравнению Лапласа в ограниченной области $D \subset R^m$ и граничному условию $l(x) \operatorname{grad} u(x) = f(x)$, где $l(x)$ — полиномиальный вектор. Заметим, что мы, в отличие от [4], не делаем никаких предположений в виде оператора L.

Выделим класс задач, который будет рассматриваться. Для этого сделаем формальное преобразование Фурье над задачей (1)—(2). Обозначая $y(s, t) = F\{u(x, t)\}$, получим

$$\frac{dy(s, t)}{dt} = P(t, -is)\, y(s, t), \tag{3}$$

$$\sum_{k=1}^{l} A_k(s)\, Q_k\left(\frac{\partial}{\partial s}\right) y(s, T_k) = 0. \tag{4}$$

Пусть $R(s, t)$ — матрициант (3), нормированный при $t = 0$, т. е. $R(s, 0) = E$, тогда $y(s, t) = R(s, t)\, y(s)$ удовлетворяет (3). Для определения вектора $y(s)$ имеем из (4) обыкновенное дифференциальное уравнение

$$\varepsilon_1(y) \equiv \sum_{k=1}^{l} A_k(s)\, Q_k\left(\frac{\partial}{\partial s}\right) R(s, T_k)\, y(s) = 0. \tag{5}$$

Оператор ε_1 можно представить в виде $\varepsilon_1 = \sum_{j=0}^{N} D_j(s) \frac{d^j}{dS^j}$, где $N \leqslant N_1$ и $D_N(s) \not\equiv 0$. Заметим, что $D_j(s) \in C^\infty(R)$ при $j = 0, \ldots, N$.

Определение 2. *Задача* (1)—(2) *называется регулярной, если выполнены следующие условия:* $N > 0$ **(6)**, $\forall s \in R^1$, $\det D_N(s) \neq 0$ **(7)**.

Замечание. Случай $N = 0$, по существу, рассмотрен в [3]. Если $D_j(s)$ при $j = 0, \ldots, N$ продолжаются аналитически в комплексную плоскость и условие (7) остается в силе, то будем говорить, что задача (1)—(2) регулярна в плоскости.

Прежде, чем сформулировать основной результат нашей работы, напомним, что Z обозначает топологическое пространство функций, являющихся преобразованиями Фурье функций из K, т. е. финитных бесконечно дифференцируемых функций.

Теорема 1. *Регулярная полиномиальная многоточечная задача имеет $N \cdot m$-мерное пространство решений в Z'.*

Основную роль в доказательстве теоремы 1 играет «сопряженная задача». Прежде чем ее сформулировать, введем такие обозначения: если B — матрица, то B^* — к ней эрмитово сопряженная, $P_1\left(t, \frac{\partial}{\partial x}\right)$ — оператор, получающийся из $P\left(t, \frac{\partial}{\partial x}\right)$ формальной заменой $\frac{\partial}{\partial x}$ на $-\frac{\partial}{\partial x}$, эрмитовым сопряжением и изменением знаков всех элементов.

Определение 3. *Будем говорить, что $\varphi(x) \in \Phi$ принадлежит множеству разрешимости «сопряженной» задачи при $t = t_0$, если существует* $v(x) = \{v_1(x), \ldots, v_m(x)\}$, $v_j(x, t) = \{v_{j1}(x, t), \ldots, v_{jm}(x, t)\}$, определенные соответственно при $t \in [T_j, t_0]$, $j = 1, \ldots, l$ и принадлежащие Φ, удовлетворяющие условиям:

$$L_1 v_j(x, t) \equiv \frac{\partial v_j(x, t)}{\partial t} - P_1\left(t, \frac{\partial}{\partial x}\right) v_j(x, t) = 0, \quad t \in [T_j, t_0], \quad j = 1, \ldots, l, \tag{9}$$

$$v_j(x, T_j) = Q_j^*(ix)\, G_j^*(x) \divideontimes v(x), \tag{10}$$

$$\sum_{j=0}^{l} v_j(x, t_0) = \varphi(x). \tag{11}$$

Множество разрешимости сопряженной задачи при $t = t_0$ обозначим Φ_{t_0}. Связь между задачей (1)—(2) и (9)—(11) устанавливается в следующем предложении.

Лемма. *Решение задачи* (1)—(2) *ортогонально множеству разрешимости задачи* (9)—(11), *т. е., если* $u(x, t) \in C^1([0, T], \Phi')$ *и удовлетворяет* (1)—(2), *то* $\forall \varphi(x) \in \Phi_{t_0}$ $(u(x, t_0), \varphi(x)) = 0$.

Доказательство. Используя (1), (2), (9)—(11) и формулу интегрирования по частям, имеем

$$0 = \sum_{k=1}^{l} \int_{t_0}^{T_k} (Lu(x, t), v_k(x, t))\, dt = \sum_{k=1}^{l} \int_{t_0}^{T_k} (u(x, t), L_1 v_k(x, t)\, dt +$$

$$+ \sum_{k=1}^{l} (u(x, t), v_k(x, t)) \Big|_{t=t_0}^{t=T_k} = \sum_{k=1}^{l} (u(x, T_k), v_k(x, T_k)) -$$

$$-\sum_{k=1}^{l}(u(x,t_0),\ v_k(x,t_0))=\sum_{k=1}^{l}(u(x,T_k),\ Q_k^*(ix)\,G_k^*(x)\ast v(x))-$$
$$-(u(x,t_0),\ \sum_{k=1}^{l}v_k(x,t_0)=(\sum_{k=1}^{l}G_k(x)\ast Q_k(ix)\,u(x,T_k),\ v(x))-$$
$$-(u(x,t_0),\ \varphi(x))=-(u(x,t_0),\ \varphi(x)).$$

Таким образом, окончательно получили $(u(x,\ t_0),\ \varphi(x))=0$. Вернемся к доказательству теоремы 1. Оно проходит по следующей схеме. Как видим, задача (3)—(4) имеет N_m линейно независимых решений вида $r_j(s,t)=R(s,t)\,\alpha_j(s)$, где $\alpha_j(s)$ — фундаментальная система решений ε_1. Функции $r_j(s,t)\in C^\infty(R)$ при $\forall t\in[0,T]$, поэтому определяют регулярные функционалы над K.

Следовательно, $\pi_j(x,t)=F^{-1}\{r_j(s,t)\}\in Z'$ и являются линейно независимым решением (1)—(2). Далее, сделав преобразование Фурье над (9)—(11), можно убедиться, что $F\{Z_{t_0}\}=\Big\{\Psi(s)\in K:\int\limits_{-\infty}^{\infty}\Psi(s)\,r_j\times$ $\times(s,t_0)\,dS=0\Big\}$. Из этого вытекает, что любое решение задачи (1)—(2), принадлежащее $C^1([0,\ T],\ Z')$, представимо в виде $u(x,t)=$ $=\sum_{j=1}^{N}c_j(t)\,\pi_j(x,t_0)$. Подставив $u(x,t)$ в таком виде в (1), легко проверить, что $c_j(t)=\mathrm{const}$, чем и заканчивается доказательство теоремы 1.

Рассматривая подкласс корректных по Петровскому систем, выделенных условием

$$\|R(s,t)\|\leqslant c\,(1+|\sigma|)^k\exp\{b\,|\tau|^\alpha\},\ s=\sigma+i\tau,\ \alpha>0, \tag{8}$$

можно получить для регулярной в плоскости задачи, более широкое пространство типа W (см. [5]), в котором задача (1)—(2) имеет конечномерное пространство решений.

Теорема 2. *Если определитель регулярной в плоскости полиномиальной многоточечной задачи для системы с условием (8) допускает оценку* $|\Delta(s)|\leqslant c_1(1+|\sigma|)^{k_1}\exp\{b_1|\tau|^\alpha\}$, $s=\sigma+i\tau$, *то она имеет* N_m*-мерное пространство решений в пространстве* $W_M^\Omega=F\{W_{M_1}^{\Omega_1}\}$, *где* $M_1(x)=|x|^r$, $\Omega_1(y)=\exp\{|y|^\beta\}-1$.

Здесь r — некоторое положительное число и $\beta=\dfrac{1}{\alpha}$.

Список литературы: 1. *Борок В. М.* Классы единственности решения краевой задачи в бесконечном слое для систем линейных дифференциальных уравнений.— Мат. сб., 1969, т. 79, № 121, вып. 2, с. 293—304. 2. *Антыпко И. И.* О краевой задаче в бесконечном слое для систем дифференциальных уравнений в частных производных, — Вестн. Харьк. ун-та, 1971, № 67, вып, 36, с. 62—71. 3. *Віленць І. Л.* Класи єдності розв'язку крайової загальної задачі в шарі для систем лінійних диференціальних рівнянь у частинних похідних.— Докл. АН УРСР, сер. А, 1974, № 3, с. 195—197. 4. *Бицадзе А. В.* Краевые задачи для эллиптических уравнений второго порядка. — М.: Физматгиз, 1966. — 625 с. 5. *Гельфанд И. М., Шилов Г. Е.* Обобщенные функции, вып, 2. М.: Физматгиз, 1958.— 247 с.

Поступила 10 сентября 1979 г.