УДК 519.21.5

А. М. УЛАНОВСКИЙ

ОБ АСИМПТОТИЧЕСКОМ ПОВЕДЕНИИ БЕЗГРАНИЧНО ДЕЛИМЫХ РАСПРЕДЕЛЕНИЙ НА БЕСКОНЕЧНОСТИ

Штейтель [1] показал, что одномерное безгранично делимое распределение (б. д. р.) P, отличное от нормального, характеризуется следующим убыванием на бесконечности:

$$\limsup_{r\to\infty} (r \ln r)^{-1} \ln [1/P(U_r)] < \infty, \tag{1}$$

где $U_r = \{x : |x| > r\}$.

В работе В. М. Круглова [2] содержатся следующие результаты об убывании на бесконечности б. д. р. в R^n, $n \geqslant 1$. 1. Для того, чтобы спектральная мера Леви б. д. р. P была сосредоточена в шаре конечного радиуса, необходимо и достаточно, чтобы

$$\liminf_{r\to\infty} (r \ln r)^{-1} \ln [1/P(U_r)] > 0. \tag{2}$$

2. Для того, чтобы б. д. р. P было нормальным, необходимо и достаточно, чтобы $\lim\limits_{r\to\infty} (r \ln r)^{-1} \ln [1/P(U_r)] = \infty$.

Целью настоящей работы является уточнение и некоторое обобщение приведенных результатов.

Введем некоторые обозначения. Пусть P — б. д. р. в R^n, $n\geqslant 1$, ν_P — его спектральная мера Леви, т. е. мера, фигурирующая в представлении характеристической функции (х. ф.) формулой Леви

$$\varphi(t;\ P)=\exp\{i<\beta,\ t>-Q(t)+\int\limits_{R^n/\{0\}}\left(e^{i<t,\ x>}-1-\frac{i<t,\ x>}{1+|x|^2}\right)\times$$
$$\times\nu_P(dx)\}. \tag{3}$$

Пусть V — замкнутое ограниченное выпуклое множество, для которого точка нуль является внутренней. Положим $K_r=R^n/rV$, $r>0$ и обозначим через $R(V;\ P)$ величину $\inf\{r:\nu_P(K_r)=0\}$ (при этом условимся считать $R(V;\ P)=\infty$, если $\nu_P(K_r)>0$ при всех $r>0$).

Основным результатом работы является следующая теорема.

Теорема 1. *Существует предел*

$$\lim_{r\to\infty}(r\ln r)^{-1}\ln[1/P(K_r)]=1/R(V;\ P). \tag{4}$$

Если в качестве V взять единичный шар U в R^n, то $R(U;P)$, очевидно, равняется радиусу наименьшего шара, содержащего носитель меры ν_P, а равенство $R(U;\ P)=0$ означает, что P — нормальное (возможно вырожденное) распределение. Поэтому из теоремы 1 вытекают приведенные выше результаты работ [1, 2] в несколько уточненном виде: в (1) и (2) существуют обычные пределы и эти пределы равны $1/R(U;\ P)$.

В одномерном случае теорему 1 можно несколько дополнить. Положим $\alpha(P)=\inf\{r:\nu_P([r,\ +\infty))=0\}$, считаем $\alpha(P)=\infty$, если $\nu_P([r,\ +\infty))>0$ при всех $r>0$.

Теорема 2*. *Существует предел*

$$\lim_{r\to\infty}(r\ln r)^{-1}\ln[1/P([r,\ +\infty))]=1/\alpha(P).$$

Обозначим $\Theta(u,\ v)=(v\ln v)^{-1}\ln(1/u)$, $v>1$, $0\leqslant u\leqslant 1$ *(считаем* $\Theta(0;\ v)=\infty$).

Для доказательства теоремы 1 нам понадобится следующая

Лемма. *Пусть P_1, P_2 — распределения в R^n, V — замкнутое выпуклое ограниченное множество, для которого нуль является внутренней точкой, $K_r=R^n\diagdown rV$. Введем одномерные распределения F_i, $i=1,\ 2$, полагая $F_i([0,\ r])=P_i(rV)$, $r>0$. Справедливы неравенства*

$$\limsup_{r\to\infty}\Theta((P_1*P_2)(K_r):r)\leqslant\limsup_{r\to\infty}\Theta(P_1(K_r);\ r), \tag{5}$$

$$\liminf_{r\to\infty}\Theta((P_1*P_2)(K_r);\ r)\geqslant(\liminf_{r\to\infty}\Theta((F_1*F_2)([r,\ +\infty));\ r). \tag{6}$$

Доказательство. Докажем сначала неравенство (5). Для любого $\alpha>0$ имеем $(P_1*P_2)(K_r)=\int\limits_{R^n}P_1(K_r-s)\,P_2(ds)\geqslant$

* После того как статья была сдана в печать, теорема 2 была получена другим путем [4[.

$\geqslant \int\limits_{\alpha V} P_1(K_r - s) P_2(ds)$. Учитывая, что множество $V \subset R^n$ ограничено и нуль является для него внутренней точкой, нетрудно показать, что существует не зависящее от r число $\gamma > 0$ такое, что при всех $s \in \alpha V$ имеем $K_r - s \supset K_{r+\gamma}$. Поэтому $(P_1 \ast P_2) \times \times (K_r) \geqslant P_1(K_{r+\gamma}) P_2(\alpha V)$. Отсюда, считая α выбранным так, чтобы $P_2(\alpha V) > 0$, получаем (5).

Для доказательства (6) заметим, что для любого $\delta > 0$

$$(P_1 \ast P_2)(K_r) = \int\limits_{R^n} P_1(K_r - s) P_2(ds) = \sum_{j=1}^{\infty} \int\limits_{K_{(j-1)\delta} \setminus K_{j\delta}} P_1(K_r - z) P_2(ds). \quad (7)$$

Полагая $K_r = R^n$ при $r \leqslant 0$, заметим, что при $s \notin K_{(j-1)\delta}$ имеем $K_r - s \subset K_{r-(j-1)\delta}$. Поэтому $\int\limits_{K_{(j-1)\delta} \setminus K_{j\delta}} P_1(K_r - s) P_2(ds) \leqslant P_1 \times \times (K_{r-(j-1)\delta}) P_2(K_{(j-1)\delta} \setminus K_{j\delta}) = F_1([r - (j-1)\delta, +\infty)) F_2(((j-1) \times \times \delta, j\delta])$. Подставляя это неравенство в (7) и делая затем предельный переход $\delta \to 0$, заключаем, что $(P_1 \ast P_2)(K_r) \leqslant (F_1 \ast \ast F_2)([r, +\infty))$, откуда следует справедливость (6).

Докажем теперь теорему 1 при дополнительном предположении, что х. ф. распределения P имеет вид

$$\varphi(t; P) = \exp \int\limits_{K_\delta} (e^{i<t,\, x>} - 1)\, \nu_P(dx), \quad (8)$$

причем $\delta > 0$, $\nu_P \not\equiv 0$.

Доказательство будет состоять из двух частей: 1) сначала докажем, что $\limsup\limits_{r \to \infty} \Theta(P(K_r); r) \leqslant 1/R(V; P)$ **(9)**; 2) затем получим неравенство $\liminf\limits_{r \to \infty} \Theta(P(K_r); r) \geqslant 1/R(V; P)$. **(10)**

Из определения величины $R(V; P)$ следует, что хотя бы в одном из координатных гипероктантов Γ найдется последовательность точек $\lambda_j \in R(V; P)V$, сходящаяся к границе $\partial K_{R(V;\, P)}$ (к ∞, если $R(V; P) = \infty$), обладающая свойством $\nu_P(\Gamma + \lambda_j) > 0$. Положим $\mu_j = \nu_P(\Gamma + \lambda_j)\varepsilon_{\lambda_j} + \nu_P(\Gamma \setminus (\Gamma + \lambda_j))\varepsilon_0$, где ε_a — мера Дирака, сосредоточенная в точке a. Докажем, что для всех натуральных k, j и любых $r > 0$ $c \geqslant 0$ выполняется

$$\mu_j^{k*}(K_r - c\lambda_j) \leqslant \tilde{\nu}_P^{k*}(K_r - c\lambda_j), \quad (11)$$

где $\tilde{\nu}_P$ — сужение меры ν_P на гипероктант Γ.

Применим индукцию по k. При $k = 1$ неравенство очевидно. Пусть оно верно при $k \leqslant l$. Имеем $\tilde{\nu}_P^{(l+1)*}(K_r - c\lambda_j) = \int\limits_{\Gamma} \tilde{\nu}_P^{l*}(K_r -$

$-c\lambda_j-s)\,\tilde{\nu}_P(ds)=\int\limits_{\Gamma+\lambda_j}\tilde{\nu}_P^{l*}(K_r-c\lambda_j-s)\,\tilde{\nu}_P(ds)+\int\limits_{\Gamma\setminus(\Gamma+\lambda_j)}\tilde{\nu}_P^{l*}(K_r-$ $-c\lambda_j-s)\,\tilde{\nu}_P(ds)$. При любом $s\in\Gamma+\lambda_j$ выполняется $(K_r-c\lambda_j-$ $-s)\cap\Gamma\supset(K_r-(c+1)\lambda_j)\cap\Gamma$, а при любом $s\in\Gamma$ выполняется $(K_r-c\lambda_j-s)\cap\Gamma\supset(K_r-c\lambda_j)\cap\Gamma$. Поэтому $\tilde{\nu}_P^{(l+1)*}(K_r-c\lambda_j)\geqslant$ $\geqslant\tilde{\nu}_P^{l*}(K_r-(c+1)\lambda_j)\,\tilde{\nu}_P(\Gamma+\lambda_j)+\tilde{\nu}_P^{l*}(K_r-c\lambda_j)\,\tilde{\nu}_P(\Gamma\setminus(\Gamma+\lambda_j))\geqslant$ $\geqslant\mu_j^{l*}(K_r-(c+1)\lambda_j)\cdot\mu_j(\{\lambda_j\})+\mu_j^{l*}(K_r-c\lambda_j)\,\mu_j(\{0\})=\mu_j^{(l+1)*}\times$ $\times(K_r-c\lambda_j)$. Обозначая через P_1 — б. д. р. со спектральной мерой, равной $\tilde{\nu}_P$, а через P_2 — б. д. р. со сп ктральной мерой $\nu_P-\tilde{\nu}_P$, будем иметь $P=P_1\ast P_2$. Заметим, что

$$P_1=e^{-\nu_P(\Gamma)}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{k!}\tilde{\nu}_P^{k*}.$$

Применяя неравенство (5), получим $\limsup\limits_{r\to\infty}\Theta(P(K_r);\ r)\leqslant$ $\leqslant\limsup\limits_{r\to\infty}\Theta(P_1(K_r);\ r)$.

Положим

$$P_{1j}=e^{-\nu_P(\Gamma)}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{k!}\mu_j^{k*}.$$

Из (11) видно, что $P_1(K_r)\geqslant P_{1j}(K_r)$, поэтому получаем

$$\limsup_{r\to\infty}\Theta(P(K_r);\ r)\leqslant\limsup_{r\to\infty}\Theta(P_{1j}(K_r);\ r).\tag{12}$$

Так как носитель меры μ_j^{k*} состоит из точек $\{0,\ \lambda_j,\ \dots,\ k\lambda_j\}$ и $k\lambda_j\in K_r$ при $r<k\rho_j$, где $\rho_j=\sup\{t:\lambda_j\in K_t\}$, то полагая $k_0=$ $=[r/\rho_j]+1$, имеем

$$P_{1j}(K_r)=e^{-\nu_P(\Gamma)}\sum_{k=k_0}^{\infty}\frac{1}{k!}\mu_j^{k*}(K_r)\geqslant\frac{e^{-\nu_P(\Gamma)}}{k_0!}[\mu_j(\{\lambda_j\}]^{k_0}\geqslant\exp\{-k_0\ln k_0+k_0\times$$
$$\times\ln\mu_j(\{\lambda_j\})=\exp\{-(r/\rho_j)\ln r+O(r)\}.$$

Поэтому, используя (12), получаем $\limsup\limits_{r\to\infty}\Theta(P(K_r);\ r)\leqslant 1/\rho_j$. Так как при $j\to\infty$ имеем $\rho_j\to R(V;\ P)$, то получаем (9).

Если $R(V;\ P)=\infty$, то (10) — тривиально. Пусть $R(V;\ P)<\infty$. Легко видеть, что для $\alpha\in\partial K_{R(V;\ P)}$ при любом натуральном k верно неравенство $[\nu_P(R^n)]^k\,\varepsilon_\alpha^{k*}(K_r)\geqslant\nu_P^{k*}(K_r)$. Так как $P=$ $=e^{-\nu_P(R^n)}\sum\limits_{k=0}^{\infty}\frac{1}{k!}\nu_P^{k*}$, то $P(K_r)\leqslant e^{-\nu_P(R^n)}\sum\limits_{k=0}^{\infty}\frac{[\nu_P(R^n)]^k}{k!}\varepsilon_\alpha^{k*}(K_r)$.

При $k \geqslant k_1 = [r/R(V;\ P)] + 1$ имеем $\varepsilon_\alpha^{k*}(K_r) = 1$, поэтому $P(K_r) \leqslant$

$$\leqslant \bar{e}^{\nu_P(R^n)} \sum_{k=k_1}^{\infty} \frac{[\nu_P(R^n)]^k}{k!} = \exp\{-k_1 \ln k_1 + O(k_1)\} =$$

$= \exp\{-(r/R(V;\ P) \ln r + O(r)\}$, откуда вытекает (10).

Таким образом, мы доказали теорему 1 в случае, когда х. ф. б. д. р. P имеет вид (8).

Докажем теорему 1 для произвольного б. д. р. P. Пусть сначала $R(V;\ P) > 0$. Формулу (3) для х. ф. $\varphi(t;\ P)$ можно записать в виде

$$\varphi(t;\ P) = \exp\{\int_{K_\delta} (e^{i<t,\ x>} - 1)\,\nu_P(dx)\}\exp\{i < \beta_1,\ t> -$$

$$-Q(t) + \int_{\delta V \setminus \{0\}} \left(e^{i<t,\ x>} - 1 - \frac{i<t,\ x>}{1+|x|^2}\right)\nu_P(dx), \qquad (13)$$

где $\delta < R(V;\ P)$.

Отсюда $P = P_1 \divideontimes P_2$, где мера Леви б. д. р. P_1 сосредоточена в множестве K_δ, а б. д. р. P_2 — в множестве δV. По доказанному, существует предел

$$\lim_{r\to\infty} \Theta(P_1(K_r);\ r) = 1/R(V;\ P_1) = 1/R(V;\ P). \qquad (14)$$

Отсюда, применяя неравенство (5), получим, что б. д. р. P удовлетворяет неравенству (9).

Докажем теперь, что $\liminf\limits_{r\to\infty} \Theta(P(K_r);\ r) \geqslant 1/R(V;\ P)$. Для этого нам понадобится утверждение: существует константа c, не зависящая от δ, такая, что

$$\liminf_{r\to\infty} \Theta(P_2(K_r);\ r) \geqslant 1/c\delta. \qquad (15)$$

В силу ограниченности множества V, для любого t

$$|\varphi(t;\ P_2)| \leqslant \exp e^{B(\delta|t|+1)}, \qquad (16)$$

где B — положительная константа, не зависящая от δ.

Пусть Γ — гипероктант такой, что $P_2(\Gamma) > 0$, $b \in \Gamma$ — вектор с координатами ± 1. Очевидно, что величина $d_\Gamma = \min\limits_{x \in \Gamma \cap K_1} < b,\ x>$ больше нуля. Отсюда для любых $u > 0$ и $\tau > 0$ имеем $\varphi(-iub;$ $P_2) \geqslant \int\limits_\Gamma e^{u<b,\ x>} P_2(dx) = \sum\limits_{j=1}^{\infty} \int\limits_{K_{(j-1)\tau} \setminus K_{j\tau}} e^{u<b,\ x>} P_2(dx) \geqslant \sum\limits_{j=1}^{\infty} \exp \times$ $\times \{ud_\Gamma(j-1)\tau\} P_2((K_{(j-1)\tau} \setminus K_{j\tau}) \cap \Gamma)$. Устремляя τ к нулю, получим $\varphi(-iub;\ P_2) \geqslant \int\limits_0^\infty e^{d_\Gamma ur} F_\Gamma(dr)$, где $F_\Gamma([0,\ r]) = P_2(rV \cap \Gamma)$.

Учитывая, что $|b| = \sqrt{n}$, из неравенства (16) получаем

$$\exp e^{B(\delta u\sqrt{n}+1)} \geqslant \varphi(-iub;\ P_2) \geqslant \int_0^\infty e^{d_\Gamma ur} F_\Gamma(dr).$$

Из теоремы 3 работы [3] вытекает, что для одномерного распределения F с целой х. ф. $\varphi(t;\ F)$ имеем

$$\liminf_{r\to\infty} \Theta(F(-\infty, -r] \cup [r, +\infty));\ r) =$$
$$= \liminf_{r\to\infty} \frac{r}{\ln\ln|\varphi(-ir;\ F) + \varphi(-ir;\ F)|}. \quad (17)$$

Применяя эту теорему к распределению $F_\Gamma | F_\Gamma(R^1)$ и учитывая, что $F_\Gamma([r, +\infty)) = P_2(K_r \cap \Gamma)$, будем иметь

$$\liminf_{r\to\infty} \Theta(P_2(K_r \cap \Gamma);\ r) \geqslant d_\Gamma | B\sqrt{n}\cdot\delta.$$

Так как это неравенство справедливо для любого гипероктанта Γ такого, что $P_2(\Gamma) > 0$, то тем самым (15) доказано.

Выберем в (13) $\delta < R(V;\ P)\min\{1;\ 1/c\}$. Тогда из (15) следует, что

$$\liminf_{r\to\infty} \Theta(P_2(K_r);\ r) > 1/R(V;\ P). \quad (18)$$

Далее будем пользоваться неравенством (6). Напомним, что распределения F_i в (6) связаны с распределениями P_i равенствами $F_i([r, +\infty)) = P_i(K_r)$, $i = 1, 2$. В силу (18) и (14) при $r > r_0$ имеем $F_1([r, +\infty)) > F_2([r, +\infty))$. Поэтому

$$(F_1 * F_2)([r, +\infty)) = \left(\int_0^{r-r_0} + \int_{r-r_0}^\infty\right) F_2([r-s, +\infty))\, F_1(ds) \leqslant$$
$$\leqslant \int_0^{r-r_0} F_1([r-s, +\infty))\, F_1(ds) + \int_{r-r_0}^\infty F_1(ds) \leqslant (F_1 * F_1)([r, +\infty)) +$$
$$+ F_1([r-r_0, +\infty)). \quad (19)$$

Так как $\varphi(t;\ F_1 * F_1) = [\varphi(t;\ F_1)]^2$, то из равенства (17), примененного к $F = F_1 * F_1$, и из (14) видно, что

$$\lim_{r\to\infty} \Theta((F_1 * F_1)([r, +\infty));\ r) = 1/R(V;\ P).$$

Поэтому из (14) и (19), следует, что $\liminf_{r\to\infty} \Theta((F_1 * F_2)([r, +\infty)) \geqslant$ $\geqslant 1/R(V, P)$. Используя (6), заключаем, что б. д. р. P удовлетворяет неравенству (10), так как P так же удовлетворяет неравенству (9), то существует предел (4).

Заметим, что если $R(V;\ P) = 0$, то при любом $\delta > 0$ имеем $P_1 = \varepsilon_0$, $P = P_2$ и равенство (4) следует из (15).

Доказательство теоремы 2. Пусть $0<\delta<\alpha(P)$. Из формулы (3) следует, что

$$\varphi(t;\ P)=\exp\left\{\int_{\delta}^{\infty}(e^{itx}-1)\,\nu_P(dx)\right\}\exp\left\{\int_{-\infty}^{-\delta}(e^{itx}-1)\,\nu_P(dx)\right\}\times$$

$$\times\exp\left\{i\beta_1 t-\gamma t^2+\int_{-\delta}^{\delta}\left(e^{itx}-1-\frac{itx}{1+x^2}\right)\nu_P(dx)=\right.$$

$$=\varphi(t;\ P_1)\,\varphi(t;\ P_2)\,\varphi(t;\ P_3). \tag{20}$$

Распределение P_1 сосредоточено на $[0,\ +\infty)$, а P_2 — на $(-\infty,\ 0]$, причем $P_1(\{0\})>0$ и $P_2(\{0\})>0$.

В силу теоремы 1 существуют пределы

$$\lim_{r\to\infty}\Theta(P_1^{j*}([r,\ +\infty));\ r)=1/\alpha(P_1^{j*})=1/\alpha(P_1)=1/\alpha(P) \tag{21}$$

(мы воспользовались тем, что носители меры Леви для P_1^{j*} и P_1 совпадают). Справедливы следующие неравенства:

$$(P_1 * P_2)^{j*}([r,+\infty))=\int_{-\infty}^{0}P_1^{j*}([r-s,\ +\infty))\,P_2(ds)\leqslant P_1^{j*}([r,\ +\infty)); \tag{22}$$

$$(P_1 * P_2)^{j*}([r,\ +\infty))\geqslant\int_{-\tau}^{0}P_1^{j*}([r-s,\ +\infty))\,P_2(ds)\geqslant$$

$$\geqslant P_1^{j*}([r+\tau,\ +\infty))\,P_2^{j*}([-\tau,\ 0]). \tag{23}$$

Из (21) и неравенств (22), (23) следует, что существуют пределы

$$\lim_{r\to\infty}\Theta((P_1^{j*} * P_2^{j*})([r,\ +\infty));\ r)=1/\alpha(P). \tag{24}$$

В силу (15) $\big($роль $P_2(K_r)$ играет $P_3,(-\infty,\ -r)\cup[r,\ +\infty)\big)$, имеем

$$\lim_{r\to\infty}\Theta(P_3([r,\ +\infty));\ r)>1/c\delta. \tag{25}$$

Выберем в (20) $\delta<\alpha(P)\min\left\{1;\ \frac{1}{c}\right\}$. Тогда, учитывая (25) и (24) с $j=1$, получим для всех $r>r_0$ $P_3([r,\ +\infty))>(P_1 * P_2)([r,\ +\infty))$.

Поэтому можем применить неравенство (19) к распределениям $F_1=P_1 * P_2$ и $F_2=P_3$. Получим

$$P([r,\ +\infty))\leqslant(P_1 * P_2)([r-r_0,\ +\infty))+(P_1 * P_2)^{2*}(r,\ +\infty). \tag{26}$$

Кроме того, имеем

$$P([r,\ +\infty))\geqslant\int_{-\tau}^{\tau}(P_1 * P_2)([r-s,\ +\infty))\,P_3(ds)\geqslant$$

$$\geqslant(P_1 * P_2)([r+\tau,\ +\infty])\,P_3([-\tau,\ \tau]). \tag{27}$$

Выберем τ таким, чтобы $P_3([-\tau, \tau]) > 0$. Тогда из существования предела (24) при $j = 1$ и из неравенств (26) и (27) заключаем, что существует предел $\lim\limits_{r\to\infty} \Theta([P([r, +\infty)); r) = 1/\alpha(P)$.

Пусть $\alpha(P) = 0$. Аналогично (22) получаем $(P_2 \ast P_3)([r, +\infty)) \leqslant P_3([r, +\infty))$. Так как при любом $\delta > 0$, $P_1 = \varepsilon_0$, то $P = P_2 \ast P_3$ и, следовательно,

$$\liminf_{r\to\infty} \Theta(P([r, +\infty)); r) \geqslant \liminf_{r\to\infty} \Theta(P_3([r, +\infty)); r),$$

В силу произвола в выборе δ утверждение теоремы 2 следует из (25).

Список литературы: 1. *Steutel F. W.* On the tails of infinitely divisible distribution.— Z. Wahrscheinlickeitstheor. Verw. Geb., 1974. vol. 28, p. 273—276. 2. *Круглов В. М.* Характеризация одного класса безгранично делимых распределений в гильбертовом пространстве.— Мат. заметки 1974, т. 16, вып. 5, с. 777—783. 3. *Яковлева Н. И.* О росте целых характеристических функций вероятностных законов.— Вопросы мат. физики и функц. анализа.— Киев, Наук. думка, 1976, с. 43—54. 4. Hikaru Ohkubo.— Yokohama Math. J., 1979, 27, N 2, p. 74—89.

Поступила 29 октября 1979 г.