УДК 517.43

Т. И. РЯБУШКО

УСТОЙЧИВОСТЬ ВОССТАНОВЛЕНИЯ КРАЕВОЙ ЗАДАЧИ ШТУРМА — ЛИУВИЛЛЯ НА ПОЛУОСИ ПО ДВУМ СПЕКТРАМ

Рассмотрим две граничные задачи, порождаемые дифференциальным уравнением

$$-y'' + q(x)\,y = \lambda y, \quad (0 \leqslant x < \infty) \tag{1}$$

и граничными условиями $y'(0) = 0$, (2) $y(0) = 0$, (3), где потенциал $q(x)$ — действительная непрерывная функция, обеспечивающая дискретность спектра.

Обозначим собственные значения задачи (1)—(2) через $\{\mu_k\}$, а задачи (1)—(3) — через $\{\lambda_k\}$. Известно, числа $\{\mu_k\}$ и $\{\lambda_k\}$ однозначно определяют функцию $q(x)$.

Решим для одного класса потенциалов задачу о том, какие сведения об уравнении (1) можно получить, если известны только N собственных значений краевых задач (1)—(2) и (1)—(3).

Рассмотрим краевые задачи, порождаемые уравнением

$$l[y] \equiv -y'' + [x^2 + p(x)]\, y = \lambda y, \quad (0 \leqslant x < \infty) \tag{4}$$

и граничными условиями $y(0) = 0$ **(5)**, $y'(0) = 0$ **(6)**, где $p(x)$ — дифференцируемая на полуоси $(0, \infty)$ функция, обращающаяся в нуль при $x \geqslant a > 0$.

Пусть $\{\lambda_k(p)\}$ — собственные значения краевой задачи (4)—(5), а $\{\mu_k(p)\}$ — собственные значения краевой задачи (4)—(6). Для простоты можно считать, что они неотрицательны.

Обозначим через $f_0(x, \lambda)$ решение уравнения

$$l_0[y] \equiv -y'' + x^2 y = \lambda y, \quad (0 \leqslant x < \infty), \tag{7}$$

принадлежащее $L_2(0, \infty)$ и через $f_p(x, \lambda)$ — решение уравнения (4), которое совпадает с $f_0(x, \lambda)$ при $x \geqslant a$. Тогда существует такая дважды непрерывно дифференцируемая по обеим переменным функция $K(x, t)$, что

$$f_p(x, \lambda) = f_0(x, \lambda) + \int\limits_x^{2a-x} K(x, t)\, f_0(t, \lambda)\, dt. \tag{8}$$

Функция $K(x, t)$ является решением дифференциального уравнения

$$\frac{\partial^2 K(x, t)}{\partial x^2} - [x^2 - p(x)]\, K(x, t) = \frac{\partial^2 K(x, t)}{\partial t^2} - t^2 K(x, t)$$

с условиями $K(x, 2a - x) = 0$, $K(x, x) = \frac{1}{2}\int\limits_x^a p(t)\, dt$, откуда вытекает, что функция $K(x, t)$ должна удовлетворять такому интегральному уравнению:

$$K(x, t) = \int\limits_{\frac{x+t}{2}}^{a} d\xi \int\limits_{\frac{x-t}{2}}^{0} [4\xi\eta + p(\xi + \eta)]\, K(\xi + \eta, \xi - \eta)\, d\eta +$$

$$+ \frac{1}{2}\int\limits_{\frac{x+t}{2}}^{a} p(\xi)\, d\xi.$$

Существование решения у этого интегрального уравнения доказывается методом последовательных приближений, при этом сразу же получается следующая оценка для решения:

$$|K(x, t)| \leqslant \frac{1}{2}\, w\left(\frac{x+t}{2}\right) \exp\left\{\left(\frac{x-t}{2}\right)^2 \left[a^2 - \left(\frac{x+t}{2}\right)^2\right] + \sigma_1(x) - \right.$$

$$\left. - \sigma_1\left(a + \frac{x-t}{2}\right) - \sigma_1\left(\frac{x+t}{2}\right)\right\}, \tag{9}$$

где

$$w(x) = \max_{x \leqslant t < \infty} \left| \int_t^a p(\xi)\, d\xi \right|, \quad \sigma_0(x) = \int_x^a |p(t)|\, dt, \quad \sigma_1(x) = \int_x^a \sigma_0(t)\, dt.$$

Обозначим через $V(a, \beta_0, \beta_1)$ множество краевых задач (4)—(6), удовлетворяющих условиям:

$$p(x) = 0, \quad (x > a), \quad \int_0^a |p(t)|\, dt \leqslant \beta_0, \quad \int_0^a \sigma_0(t)\, dt \leqslant \beta_1. \tag{10}$$

Известно [1], что решением уравнения (7), принадлежащем $L_2(0, \infty)$, является функция

$$f_0(x, \lambda) = e^{-x^2/2} H_{\frac{\lambda-1}{2}}(x), \tag{11}$$

где $H_\nu(x)$ — функция Эрмита.

Очевидно, что собственные значения $\{\lambda_n(p)\}$, $\{\mu_n(p)\}$ краевых задач (4)—(5), (4)—(6) совпадают с корнями уравнений

$$f(0, \lambda) = 0, \quad f'(0, \lambda) = 0. \tag{12}$$

Согласно (7) и (11)

$$f(0, \lambda) = f_0(0, \lambda) + \int_0^{2a} K(0, t) \frac{1}{\lambda} [-f_0''(t, \lambda) + t^2 f_0(t, \lambda)]\, dt = H_{\frac{\lambda-1}{2}}(0) +$$

$$+ \frac{1}{\lambda} \left\{ K(0, 0) H'_{\frac{\lambda-1}{2}}(0) - K'(0, 0) H_{\frac{\lambda-1}{2}}(0) + \int_0^{2a} l_0[K(0, t)] f_0(t, \lambda)\, dt \right\},$$

$$f'(0, \lambda) = H'_{\frac{\lambda-1}{2}}(0) - K(0, 0) H_{\frac{\lambda-1}{2}}(0) + \frac{1}{\lambda} \{ B(0) H'_{\frac{\lambda-1}{2}}(0) - B'(0) H_{\frac{\lambda-1}{2}}(0) +$$

$$+ \int_0^{2a} l_0[B(t)] f_0(t, \lambda)\, dt \Big\},$$

где $B(t) = K_x'(x, t)|_{x=0}$.

Если обозначить через $\varphi_0(x, \lambda)$ и $\theta_0(x, \lambda)$ — решения уравнения (7) с начальными условиями

$$\varphi_0(0, \lambda) = 1, \quad \varphi_0'(0, \lambda) = 0, \quad \theta_0(0, \lambda) = 0, \quad \theta_0'(0, \lambda) = 1,$$

тогда уравнения (12) примут вид:

$$\frac{H_{\frac{\lambda-1}{2}}(0)}{H'_{\frac{\lambda-1}{2}}(0)} = -\frac{1}{\lambda} \frac{K(0, 0) + \int_0^{2a} l_0[K(0, t)]\, \theta_0(t, \lambda)\, dt}{1 - \frac{1}{\lambda} \left\{ K'(0, 0) + \int_0^{2a} l_0[K(0, t)]\, \varphi_0(t, \lambda)\, dt \right.},$$

$$\frac{H'_{\frac{\lambda-1}{2}}(0)}{H_{\frac{\lambda-1}{2}}(0)} = \frac{K(0,\ 0) + \frac{1}{\lambda}\left\{B'(0) + \int\limits_0^{2a} l_0[B(t)]\,\varphi_0(t,\ \lambda)\,\mathrm{dt}\right\}}{1 + \frac{1}{\lambda}\left\{B(0) - \int\limits_0^{2a} l_0[B(t)]\,\theta_0(t,\ \lambda)\,\mathrm{dt}\right\}}.$$

Лемма 1. *Существуют такие константы* $C = C(a,\ \beta_0,\ \beta_1)$, $M = M(a,\ \beta_0,\ \beta_1)$, *что для всех* $p(x) \in V(a,\ \beta_0,\ \beta_1)$ *при* $n > C$ *справедливы равенства*

$$\lambda_n(p) = 4n + 3 + \frac{K(0,\ 0)}{\pi\sqrt{4n+3}} + \frac{M_n^{(1)}(p)}{n\sqrt{n}},\quad \mu_n(p) = 4n + 1 + {}$$
$$+ \frac{4K(0,\ 0)}{\pi\sqrt{4n+1}} + \frac{M_n^{(2)}(p)}{n\sqrt{n}},$$

где $|M_n^{(j)}(p)| \leqslant M \quad (j = 1,\ 2)$.

Лемма 2. *Пусть* $p_j(x) \in V(a,\ \beta_0,\ \beta_1)$, $(j = 1,\ 2)$ *и* $\lambda_n(p_1) = \lambda_n(p_2)$, $\mu_n(p_1) = \mu_n(p_2)$ *при* $n = 1,\ 2 \ldots N$, *где* $N > C$, $(a,\ \beta_0,\ \beta_1)$. *Тогда при* $k > N$ $|\lambda_k(p_1) - \lambda_k(p_2)| < \frac{4M}{N\sqrt{k}}$, $|\mu_k(p_1) - \mu_k(p_2)| < \frac{4M}{N\sqrt{k}}$.

Теорема 1. *Если выполнены условия леммы 2, то*

$$\operatorname*{var}_{-\infty < \mu < \frac{1}{2}N} \{\rho_1(\mu) - \rho_2(\mu)\} < \frac{7M}{N\sqrt{N}} \exp\left\{\frac{7M}{N\sqrt{N}}\right\} \rho_1\left(\frac{N}{2}\right), \tag{13}$$

где

$$\rho(\mu) = \sum_{\lambda_k(p) < \mu} \frac{1}{\alpha_k(p)},\quad \alpha_k(p) = \int\limits_0^\infty f^2(\lambda_k(p),\ x)\,\mathrm{dx}.$$

Доказательство. Так как

$$\rho_1(\mu) - \rho_2(\mu) = \sum_{\lambda_k(p) < \mu} \frac{1}{\alpha_k(p)}\left(1 - \frac{\alpha_k(p_1)}{\alpha_k(p_2)}\right),$$

поэтому при $\mu_0 < \frac{1}{2}N$

$$\operatorname*{var}_{-\infty < \mu < \mu_0} \{\rho_1(\mu) - \rho_2(\mu)\} \leqslant \rho_1\left(\frac{N}{2}\right) \max_{\lambda_k(p) < \frac{1}{2}N} \left|1 - \frac{\alpha_k(p_1)}{\alpha_k(p_2)}\right|. \tag{14}$$

Из известных [2] формул для нормировочных коэффициентов $\alpha_k(p)$ вытекает

$$1 - \frac{\alpha_k(p_1)}{\alpha_k(p_2)} = 1 - \prod_{n=N+1}^{\infty} \frac{[\mu_n(p_1) - \mu_k(p_1)]\,[\lambda_n(p_1) - \mu_k(p_1)]}{[\mu_n(p_2) - \mu_k(p_2)]\,[\lambda_n(p_2) - \mu_k(p_2)]}.$$

Поэтому, используя результаты леммы 2, получаем при $N>C$

$$\max_{\lambda_k(p)<\frac{N}{2}}\left|1-\frac{\alpha_k(p_1)}{\alpha_k(p_2)}\right|<\frac{7M}{N\sqrt{N}}\exp\left\{\frac{7M}{N\sqrt{N}}\right\},$$

отсюда и следует утверждение теоремы.

Теорема 2. *Если выполнены условия леммы 2, тогда при* $N>$ $>C(a,\ \beta_0,\ \beta_1)$ *справедливо неравенство*

$$\frac{\max\limits_{x\leqslant t<\infty}|f_{p_1}(t,\lambda)-f_{p_2}(t,\lambda)|^2}{\max\limits_{x\leqslant t<\infty}|f_{p_1}(t,\lambda)f_{p_2}(t,\lambda)|}<\frac{M(a,\ \beta_0,\ \beta_1)}{\sqrt{N}}$$

для всех $0\leqslant\lambda\leqslant\frac{1}{4}N.$

Данное утверждение является очевидным следствием предыдущей теоремы, формулы (2.11) и теоремы 1 из [3].

Список литературы: 1. *Титчмарш Э. Ч.* Разложения по собственным функциям, связанные с дифференциальными уравнениями второго порядка.— М.: Изд-во иностр. лит., т. 1, 1960. —278 с. 2. *Гасымов М. Г., Левитан Б. М.* Определение дифференциального уравнения по двум спектрам.— Усп. мат. наук, 1964. т. 19, вып. 2 (116), с. 3—63. 3. *Марченко В. А., Маслов К. В.* Устойчивость задачи восстановления оператора Штурма — Лиувилля по спектральной функции.— Мат. сб., 1970, т. 81, вып. 4, с. 525—551.

Поступила 19 марта 1979 г.